知识丛书

从量变看物理世界

关肇直著

8034

从量变看物理世界

关 肇 直 著

《知識丛书》編輯委員会編

一九六三年·北京

知識就是力量。一个革命干部需要有古今中外的丰富知識作为从事工作和学习理論的基础。«知識丛书»就是为了滿足这个需要而編印的；內容包括哲学、社会科学、自然科学、历史、地理、国际問題、文学、艺术和日常生活等知識。为了使这一套丛书編写得更好，我們期望讀者們和作者們予以支持和合作，提供意見和批評。

≪知識丛书≫編輯委員会

从量变看物理世界

关肇直著

*

科学普及出版社出版

（北京市西直門外郝家湾）

北京市书刊出版业营业許可証出字第112号

北京市印刷一厂印刷　新华书店发行

*

开本 787×960 1/32　印張 3 20/32　字数 45,000

1963年10月第1版

1963年10月北京第1次印刷

印数 13,650　定价 0.35元

总号 034　統一书号 13051·019

目　次

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

前　　記

《知識丛书》編輯委員会叫我为这部丛书写一本。这里选择了这样一个題目，企图說明数学在认識自然和改造自然的工作中所起的作用。一般人在各級学校里学习数学时，有时沉醉于推演和計算的兴趣中，也有时为难題所困惑，却往往忽略了这門科学的科学意义和实际意义。希望这本小册子所提供的一些知識，使讀者在中等学校所学到的数学基础上，能够比較正确地认識到数学知識在人类知識中所起的作用。这里只能很粗略地談到一些数学的专业知識。如果讀者想进一步获得更具体或深入的了解，可以参看苏联科学院出版社出版的《数学——它的內容、方法和意义》(有中文譯本，科学普及出版社)，和我所編写的《高等数学教程》(已出版了三册，人民教育出版社)。

1962 年 9 月 7 日

一 引 言

人类在生产过程中，在实践中积累了許多感性知識，逐漸綜合感觉的材料加以整理和改造，造成概念和理論的系統，再把总結出来的理論在实践中考驗，这样，逐步地获得对于自然規律性的认識，积累了关于自然的知識，又利用这些知識改造自然。

对于物理世界的认識，开始只是比較籠統的，例如我們得知物体热脹冷縮，行星繞太阳周而复始，等等。这样的叙述是不够确切的。如果我們不但要认識自然界的規律性，而且还要进一步根据这些規律性来改造自然，为人类謀福利，那末我們就要认識得更确切些。例如为了农业生产定季节，以及航海定方位等，都要求更确切地知道行星繞太阳运动的規律，即不只是知道它“周而复始”，而且要知道它在多少时間内轉一周，它运行的軌道是怎样的，它在什么时候离太阳最近，有多么近，在什么时候离太阳最远，有多么远，等等。于是我們要进一步对物理

世界有定量的认識，也就是說把規律中的变化能够定量地表达出来。在現代的改造自然的工作中，这种对物理世界更确切的了解更是必要的。例如怎样才能引起原子核的裂变，或者怎样发射才能把人造卫星送上天去，等等，也都要求对这些現象作精密地定量的研究，在設計之前作好精密的計算。为此，对于物理世界的变化要作定量的考察和研究。我們获得的理論也要用实驗、观測或直接的生产实践作定量的检驗。

数学是研究現实世界的量的关系和空間形式的一門科学。因此，数学对物理世界的变化作定量的研究。在工程設計中，数学也起着重要的作用。这本小书的目的，就是在不使讀者接触到过多的专門数学知識的条件下，用一些例子和作理論的分析，說明数学是怎样和物理学、力学等科学一起，怎样揭示物理世界的規律，并且人类怎样利用它們征服自然。这只是极其簡单的介紹，更全面的知識就不是本书所要提供的了。

这本书的內容，包括十节。为了从量的变化来了解物理世界，首先要能确切地量測物理現象中的量，也就是說，要能用数字标志它的大小。为此，第二节首先介紹怎样从比較大小的

实践过程中总結出来量测的办法，并为此人們获得和逐步发展了数的概念，建立了实数的理論。其次，要了解物理現象的量的变化，不只是要能量測这个現象中涉及的个别的量，而是要看能用哪些个量来刻画出这个物理現象的状态，为此，在第三节我們介紹怎样用一些量表达一个物理系統的状态，而适应表达着不同物理系統的状态的需要，我們就要引进种种的空間和种种的几何学。刻画物理系統的量有了，但世界是在永恒的变化和发展中的，于是在第四节介紹变量的数学，也就是說，怎样表达量在变化这一事实。世界上各种事物是处于互相联系，互相依賴，互相制約的情况下的，那末这些事物的量也是互相依賴的，也就是說我們要研究变量与变量之間的依賴关系。为了研究这种依賴关系，引入了一个重要的概念，乃是变化率，即平常生活中所說的增长率。第五节介紹变化率的演算——微分积分学。在有了这些概念之后，許多物理現象的变化过程就可以用数学上的一种方程来表达。第六节——微分方程的定解問题就是用几个簡单的例子說明怎样根据物理問题的分析列出描写这种变化过程的方程来。数学方法的好处，就在于它能从已知的量的关系推演出来未知的量的关系——正是这样，它才

能成为物理科学的重要工具，和物理科学一起共同探索自然界的奥秘。解方程就是这种从已知关系推演未知关系的一种形式。我們在第七节簡略地介紹解方程的方法。更复杂的物理現象要用更复杂的数学工具来研究。这种更复杂的物理現象中出現的是更高一級的量的关系。这也往往正是要用无穷多个量来表达它的状态的那种物理系統。第八节——具有无穷多个自由度的物理系統——正是介紹研究这种系統的数学方法。第九节介紹与現代技术有关的一个类型的問題——最优控制問題。这种类型的問題随着科学技术的发展还会更多地提出来。这里只举一个簡单的例子。

这只是从量的变化看物理世界的几个方面，而并不是介紹了一切方面。由于篇幅的关系，我們沒有涉及随机現象这一重要方面。物理現象呈現了种种对称性——例如晶体的形状。物理的規律滿足种种不变性——它在不同地点、不同时刻是同样成立的。这种对称性与不变性的研究在数学上抽象成“群論”这一理論，它在研究許多物理現象——例如原子和原子核結构等，具有重要的作用。又如在研究原子內部的变化——也就是所謂微观現象时，我們要用完全另外的数学表达工具——在那里不再用一

个或几个变量来表达物理中的量，而是要用一种算子(見第八节)来表达它們。例如物理系統的能量、粒子的位置与动量等等，都要用算子表达。这就要用到“泛函分析”这一数学分支所提供的工具。以上这些内容都不能在这本小册子里介紹了。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb

二　从量测到实数

在人类生产实践中，我們遇到的最簡单的量有两种。一种是可以“数出个数来的”，例如一間屋子里的人数、某一羊群中羊的头数、某生产队的某种生产工具(例如鋤头)的件数，等等。这种量叫做离散量。在数学上，用“自然数”1，2，3，…… 来表示这种量。关于自然数的运算(加、减、乘、除)，大家已經比較熟悉了。有时，例如当10个人分 5 个饅头时，每个人只分到“半个”。这就不能用自然数表示，还需要更小的单位，即$\frac{1}{2}$个。于是我們有分数，关于分数的基本运算，大家也是足够熟悉的了。

在人类生产实践中，也需要量测另一种量，常称作連續量。例如长度、重量、溫度等等，在平常大小范围內(即在物理学所謂宏观現象中)都可以看成是这样的量。举量长度为例，我們最初只能比較两个东西的长短。但随着人类生产实践的經驗逐漸积累，人們逐漸从任意两个东西的相互比較过渡到把任何东西同一个固定

的东西相比較，也就是取这个固定的东西的长作为标准长度，或叫做“长度单位”，而把要量的东西和它从长短上加以比較。这种标准长有时是“近取諸身”(即从自己身体上选择)的。例如用足长，用臂肘到中指尖端的长，等等。中国古代用过仞、寻等长度单位。顾炎武《日知录》卷十引《說文》：“仞，伸臂一寻八尺。”原註：“《家語》孔子所謂舒肘知寻。”又如英語中的呎 (foot) 和碼 (yard) 也都是由人身上的长度規定的。

当我們用一个具有标准长 l (例如一尺)的杆 AB (例如平常的尺)量度一个綫段 CD (例如桌子的一个边)的长时，先把 A 放在 C 处，使 AB 綫与 CD 綫叠合。如果 D 与 B 重合，那末 CD 与 AB 一样长。如果 B 落在 C,D 之間一点 B' 处，CD 就比 AB 长；于是再把 AB 杆拿起，把 A 端放在 B' 处，仍使 AB 綫与 CD 綫叠合。設 B 落在 CD 之間一点 B'' 处(图 1)

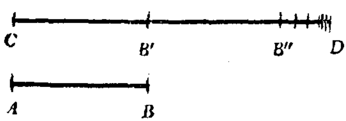

图 1

这样进行下去，直到最后一次 B 落到 D 处为止。如果上面所說的程

序共重复了 7 次，那末我們說 CD 的长含有 7 个 AB 长，也就是說，它的长是 7 个单位。但是，象这样继續进行一些次之后，B 恰巧落在 D 处，只是特殊的情形。往往最后得一点 $B^{(7)}$，使得 $B^{(7)}D$ 不够 AB 那么长，从而上面所說的程序不能继續进行。人类在生产实践中发現这样的作法：把 AB 分成更小的单位，例如把 AB 分成 10 个等分，而在 AB 上取一段 AA_1，它的长是 AB 的$\frac{1}{10}$，再用 AA_1 作标准长，仿上面所說的方式量度 $B^{(7)}D$。如果把这种过程进行 3 次終止，而恰好最后一次 A_1 端落到 D 上，我們說，按标准长 l，CD 的长是

$$7+\frac{3}{10}.$$

这里須用分数概念：十分之三。如果最后一次 A_1 仍不落在 D 上，于是剩余的这一段比 AA_1 为短，我們再把 AA_1 分成 10 等分，把 AA_1 上这样一份 AA_2（它的长是 AA_1 的1/10）作标准长。再仿上面所說的方式进行，如果經过 5 次等分后，恰好程序終止，于是用最后一次的单位 AA_5 經过 4 次把 CD“量尽”，就是說 A_5 落到 D 上，那末用 AB 作单位，CD 的长是

$$7+\frac{3}{10}+\cdots+\frac{4}{10^5}.$$

这个数可以表示成分子分母都是整数的分数

(在上面例中分母是十万，分子是七十三万×千×百×十四)。整数和分数統称做有理数。

在一个特定的具体問題中，即使不能当眞达到“量尽”的地步，但往往当取細分单位的次数足够大，单位就已經足够小了，再把它細分已經难于辨識了。一般說来，这样細分几次之后，就可以終止了。例如在我們日常生活中，尺分10寸，寸分10分，而到了分，对于一般用途已是足够精密的了，从而我們在量长度时，量到几尺几寸几分就够了。

但随着我們对自然界的认識逐漸精密，很多技术上的問題要求量測的准确度越来越高。例如現在研究原子核內部結构，就接触到一些很小的量，需要高度精密的量測。这时不但用尺嫌太大，即使用分，也都过大。原子核的大小要用 0.0000000000001厘米(簡記作10^{-13}厘米)来量，而电子的质量則是 $(9.1085\pm0.0006)10^{-28}$ 克，这里的精确程度要求达到 10^{-34} 公斤！这当然絕不能看作是不可再超过的精确度。

我們认为，人类对自然界的认識的精确程度是沒有止境的。在今天，我們认为10^{-34} 公斤已是足够微小了，沒有再进一步細分的必要或可能了。但再过一些时候，人类对于微观世界的认識更深刻了，10^{-34} 公斤仍嫌太大，我們就

有再进一步細分的必要。于是从人类整个认識过程来看，而不是从认識的某一特定阶段来看，我們对自然界的认識既然是可以无限地日益精密，我們就必須設想上述那种量測也是可以无限地日益精密的。也就是說，有必要无限地細分下去。

早在古希腊时代，人們就已发現，給定两个綫段 CD 与 AB，不論如何細分 AB，有可能 CD 永远不能用 AB 及它的几分之几量尽。也就是說，我們不能按标准长 AB 用一个整数或分数(有理数)表示 CD 的长。例如一个正方形的对角綫 AC 就不能用边长 AB 的整数倍或分数倍表示。

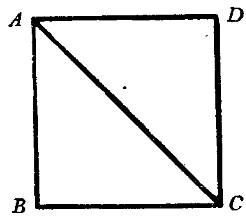

图 2

用 AB 作单位量測 AC 时，每次把 AB 分成十等份，就可以得出如下一串数据：設 a 是 AC 用 AB 作单位量出来的长度，那末

$$1<a<2,$$

$$1.4<a<1.5,$$

$$1.41<a<1.42,$$

$$1.414<a<1.415,$$

………………

依照上面所說，不論这样量多少次，用AB永远不能量尽AC，也就是上列一串不等式沒有終止的时候。我們只能用“无尽”小数表示a：

$$a=1.4142\cdots=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{10000}+\cdots.$$

用无尽小数表示的数叫做实数。整数、分数可以表示成特殊类型的无尽小数，例如

$$3=3.000000\cdots,$$

$$\frac{1}{3}=0.33333\cdots,$$

$$\frac{1}{7}=0.142857142857 14\cdots.$$

可以看出，表示整数或分数(即有理数)的无尽小数都是所謂循环小数，象上列第一个例中，零反复出現，第二个例是3反复出現，第三个例是142857反复出現。用不循环的无尽小数表示的数叫做“无理数”，例如$\sqrt{2}=1.4142\cdots$，还有圓周和直径长的比值（圓周率）$\pi=3.14159265\cdots$。

由前面的討論可以看出，在量測的某一特定結果中，无論精确到什么程度，量測的結果永远用有理数表达，即被量測的长度是所取单位(例如尺)的有理数倍。也就是說，在一特定量測中，受到能达到的精确度的限制，只能精确到“小数点后若干位”，从而所考虑的长度用有理

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongb