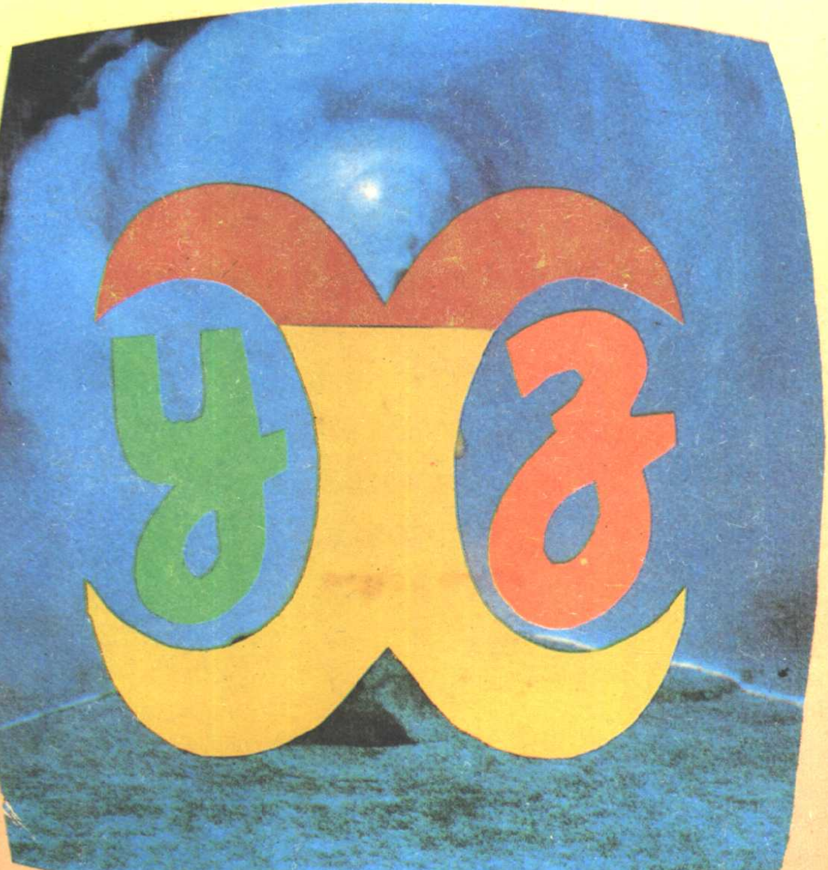
经国家教委中小学教材审定委员会审查通过

九年义务教育四年制初级中学试用课本

代　数

第二册

"五·四"学制教材总编委会



北京师范大学出版社

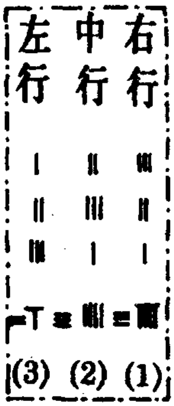
九年义务教育四年制初级中学试用课本
代　数
第二册
“五·四”学制教材总编委会
※
北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
北京联华印刷厂印刷

开本:787×1092　1/32　印张:5.125　字数:82千
1993年10月第2版　　1995年10月第3次印刷

ISBN 7-303-00729-6/G·404
定　价:3.00元

目　录

第四章　一次方程组



$$3X+2Y+Z=39 \quad (1)$$

$$2X+3Y+Z=34 \quad (2)$$

$$X+2Y+3Z=26 \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

运用解一次方程组来解决实际问题，在《九章算术》中就有记载. 书中所载的解法，比 18 世纪法国数学家贝佐(Bézout)提出的相同解法约早 1800 年.

内容提要

1. 二元一次方程、方程的解集.

2. 方程组、二元一次方程组、二元一次方程组的解.

3. 二元一次方程组的解法——消元法:代入消元法、加减消元法.

4. 三元一次方程组及其解法.

§1 二元一次方程

请看下列问题：

(1)今有货物10吨，要用装货量为2吨、1吨的大、小两种卡车一次运走，需派大、小卡车各几辆？

(2)已知甲数的2倍与乙数的和是10，求甲、乙两数？

问题(1)中有两个未知数. 设派出大车 x 辆，小车 y 辆，由题意可得

$$2x+y=10;$$

问题(2)中也有两个未知数. 设甲数为 x，乙数为 y，由题意得

$$2x+y=10.$$

从形式上看，这两个方程是一样的.

方程含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，这样的方程叫做**二元一次方程**. 和一元一次方程相比，它多了一个未知数.

在问题(1)中，派车的方案显然不止一种，比如，派5辆大车而不派小车；或派4辆大车和2辆小车等等. 由于车的辆数只能是非负整数，用列表方法，根据方程 $2x+y=10$，很容易把派车方案找出来：

x	5	4	3	2	1	0
y	0	2	4	6	8	10

就是说，当 $x=5$、$y=0$ 或者 $x=4$、$y=2$ 时，方程 $2x+y=10$ 左右两边的值相等. 我们说 $x=5$，$y=0$（$x=4$，$y=2$）适合（或满足）方程 $2x+y=10$. 当然上表中的每一对 x、y 值都适合方程 $2x+y=10$.

适合一个二元一次方程的每一对未知数的值，叫做这个**二元一次方程的解**. 若 $x=a$，$y=b$ 是某一个二元一次方程的一组解，则可记作

$$\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$$

例如

$$\begin{cases} x=5, \\ y=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4, \\ y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3, \\ y=4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ y=6; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1, \\ y=8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0, \\ y=10; \end{cases}$$

等等，都分别是方程 $2x+y=10$ 的一组解.

应该指出，对于问题(1)，考虑到问题的具体意义，每组解都限定在非负整数范围内，因而方程 $2x+y=10$ 的解只有上述 6 组. 如果不考虑具体问题，如对于问题(2)，那方程的解就不只上述 6 组，事实

上，可以把方程 $2x+y=10$ 变形，用含有 x 的代数式来表示 y，得

$$y=10-2x,$$

这样，任意取 x 的一个值，都可以求出与它对应的一个 y 值，例如：

取 $x=-1$，可以得到 $y=12$；

取 $x=0$，可以得到 $y=10$；

取 $x=2.5$，可以得到 $y=5$；

取 $x=7$，可以得到 $y=-4$；

取 $x=11.3$，可以得到 $y=-12.6$；

……

这样得到的每一对未知数的值，都适合方程

$$2x+y=10.$$

所以，我们说，任意一个二元一次方程都有无数多组解. 我们把方程的所有解组成的集合叫做**方程的解集**.

***例**　试求二元一次方程 $3x+y=8$ 的正整数解.

解：将原方程变形为

$$y=8-3x.$$

使 x 由小到大取自然数，分别求出 y 值：

当 $x=1$ 时，$y=8-3\times1=5$；

当 $x=2$ 时，$y=8-3\times2=2$；

当 $x=3$ 时，$y=8-3\times3=-1$，不合题意.

显然，当 x 取比 3 大的正整数时，y 值都不是正整数，所以方程 $3x+y=8$ 的正整数解集为

$$\begin{cases}x=1,\\y=5;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$$

练　习

1.（口答）下列方程中，哪些是二元一次方程？哪些不是二元一次方程？为什么？

(1) $2x-3y=9$；　　(2) $x+1=62$；

(3) $\dfrac{1}{x}+4y=2$；　　(4) $x-5=2y^2$；

(5) $3-x=2+x$；　　(6) $\dfrac{1}{y-1}=x-1$.

2. 下面有三组数值：

$$\begin{cases}x=0,\\y=-2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2,\\y=-3;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1,\\y=-5.\end{cases}$$

(1) 哪些是方程 $2x-y=7$ 的解？

(2) 哪些是方程 $x+2y=-4$ 的解？

(3) 哪些是上面两个方程的公共解？

3. 在下列方程中，用含 x 的代数式表示 y：

(1) $2x+y=3$；　　(2) $3x-y=2$；

(3) $x+3y=0$；　　(4) $2x-3y+5=0$.

4. 在方程 $3x+2y=12$ 中，设 $y=2,3,4,5$，分别求出相应的

x 值.

*5. 求 $3y=9-6x$ 的非负整数解集.

*6. 求 $3x+2y=16$ 的正整数解集.

§2 二元一次方程组

我们把§1中的问题(1)增加一个条件，改为“要用装货量分别为2吨、1吨的大、小卡车6辆，一次运走10吨货物，试问大、小卡车各派几辆？”

这时，我们不仅能列出方程

$$2x+y=10, \tag{1}$$

而且根据增加的条件，还可列出方程

$$x+y=6. \tag{2}$$

方程(2)也是一个二元一次方程，其中 x、y 同样分别表示大、小卡车的辆数，也应限制在非负整数范围内取值，它的非负整数解集为：

$$\begin{cases}x=0,\\y=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=5;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=4,\\y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=5,\\y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=6,\\y=0.\end{cases}$$

解决上述问题，就是要求同时适合方程(1)和方程(2)的 x 与 y 的值，也就是求出这两个方程的公

共解.

可以看出，既是方程(1)、又是方程(2)的解只有

$$\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$$

所以它是这两个方程的公共解，即只要派大车 4 辆、小车 2 辆就符合上述问题的要求了.

由此可见，在解决应用问题时，有时需要引入两个或更多个的未知数，列出几个方程，才能使问题得到解决.

由几个方程组成的一组方程，叫做**方程组**. 如果方程组中的每个方程都是一次方程，那么这样的方程组叫做**一次方程组**. 含有两个未知数的一次方程组，叫做**二元一次方程组**. 把上面的方程(1)、(2)合在一起，组成一个二元一次方程组，记作

$$\begin{cases}2x+y=10,\\x+y=6.\end{cases}$$

本章中所说的二元一次方程组，都是指由两个一次方程组成的二元一次方程组.

方程组里所有方程的公共解，叫做这个**方程组的解**.

例如上面方程(1)、(2)的公共解

$$\begin{cases} x=4, \\ y=2, \end{cases}$$

就是方程组

$$\begin{cases} 2x+y=10, \\ x+y=6. \end{cases}$$

的解.

求方程组的解的过程叫做**解方程组**.

练　习

1. 下列方程组中，哪些是二元一次方程组？哪些不是？为什么？

(1) $\begin{cases} x+3y=5, \\ 2x-y=3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=-6, \\ x+2y=3; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=3, \\ x+2=4; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+3y=5, \\ xy=2; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=-3y+3, \\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}=1; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x+3y=2, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=3. \end{cases}$

2. (口答)下面三对数值中，哪一对是下列方程组的解？

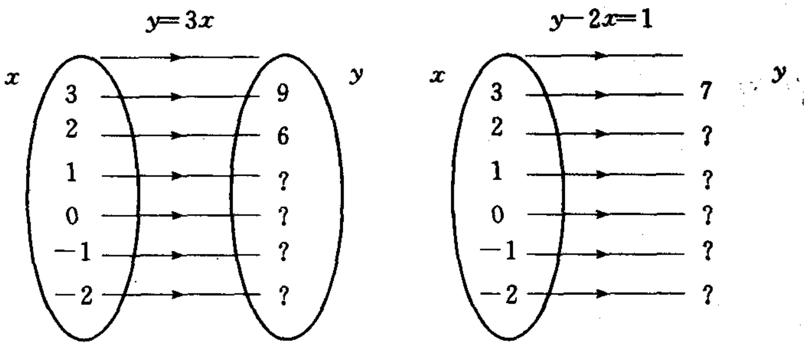
$\begin{cases} x=1, \\ y=-1; \end{cases}$　　$\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases}$　　$\begin{cases} x=4, \\ y=5. \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 3x+4y=10; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y=2x-3, \\ 4x-3y=1. \end{cases}$

3. 根据已知条件求出 y 的值，分别填入下列各图的右圈里，

并找出下列方程组的解：

$$\begin{cases}y=3x,\\y-2x=1.\end{cases}$$



（第 3 题）

§3 二元一次方程组的解法

怎样解二元一次方程组？

假如按照上节所说："先求出方程组中每一个方程的解，再求这些方程的公共解"，那么实际做起来既麻烦，又带有很大的盲目性. 因为每一个二元一次方程都有无数多组解，全部找出来，再求几个方程的公共解绝非易事. 因此，我们需要进一步探求二元一次方程组求解的有效方法.

我们已经学过解一元一次方程，而二元一次方程组比一元一次方程多了一个未知数，只要能想办法消去一个未知数，得到只含一个未知数的一元一次方程，问题就可解决. 把二元方程转化为一元方程求解，叫做**消元法**. 那么，怎么“消元”呢？

例如，解方程组：

$$\begin{cases} 2x-y=0, & (1) \\ x+y=6. & (2) \end{cases}$$

观察二元一次方程组中的方程(1)、(2)的结构特征，注意到方程(1)、(2)中的 x、y 分别表示同一个数. 由方程(1)得 $y=2x$，即 y 与 $2x$ 表示相同的数值，这样，第二个方程中的 y 就可以用第一个方程中表示 y 的代数式 $2x$ 来代替：

$$y=\boxed{2x}, \qquad (3)$$

$$\downarrow$$

$$x+y=6,$$

得

$$x+2x=6. \qquad (4)$$

这样，就由两个二元一次方程得到一个一元一次方程，消去了一个未知数. 再解这个一元一次方程，得 $x=2$，把 $x=2$ 代入(3)，就可以得到 $y=4$.

要检验所得结果是不是原方程组的解，应把解

得的一对数代入原方程组里的每一个方程进行检验.

经过检验可以知道$\begin{cases}x=2,\\y=4\end{cases}$是原方程组的解.

我们再看几个例子.

例 1 解方程组:

$$\begin{cases}y=1-x, & (1)\\3x+2y=5. & (2)\end{cases}$$

解:把(1)代入(2),得

$$3x+2(1-x)=5,$$
$$3x+2-2x=5,$$
$$x=3.$$

把 $x=3$ 代入(1),得

$$y=-2.$$

$$\therefore \quad \begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$$

检验:把 $x=3$,$y=-2$ 代入(1),得

左边$=-2$,　　右边$=1-3=-2$,

左边=右边;

再代入(2),得

左边$=3\times3+2\times(-2)=5$,

右边$=5$,　　左边=右边.

$\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=-2 \end{cases}$ 是原方程组的解.

(检验可用口算,不必写出,以下同)

例 2 解方程组:

$$\begin{cases} 2x+5y=-21, & (1) \\ x+3y=8. & (2) \end{cases}$$

分析:在这个方程组里,只有方程(2)中 x 系数是 1,通过对方程(2)变形,用含 y 的代数式表示 x.这样,就可代入方程(1),消去 x.

解:由(2),得

$$x=8-3y, \quad (3)$$

把(3)代入(1),得

$$2(8-3y)+5y=-21,$$

$$16-6y+5y=-21,$$

$$-y=-37,$$

$$\therefore \quad y=37.$$

把 $y=37$ 代入(3),得

$$x=8-3\times 37=-103.$$

$$\therefore \begin{cases} x=-103, \\ y=37. \end{cases}$$

例 3 解方程组:

$$\begin{cases} 3x+4y=6, & (1) \\ 2x+3y=5. & (2) \end{cases}$$