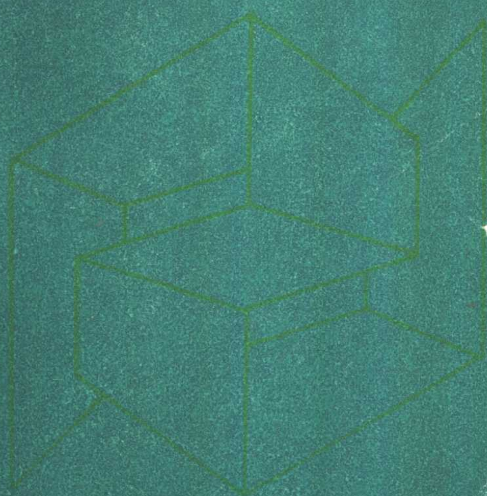
GAODENGSHUXUEXISHOUCHE

高等数学学习手册

赵国清　主编



学术期刊出版社

高等数学学习手册

赵国清 主编

学 术 期 刊 出 版 社

责任编辑：田秀云

封面设计：岳大地

高 等 数 学 [illegible] 习 手 册

赵 [illegible] 清 主编

学 术 期 刊 出 版 社 出 版 发 行

（北京海淀区学院南路86号）

黑龙江省测绘大队印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 4.2印张 89,000字

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数：1—5,000

•

ISBN7-80045-083-X/G·19 定价：1.35元

前　　言

高等数学不仅是理工科各专业的重要基础课。也是医学、生物、管理等专业的必修课程。但由于高等数学知识面广，内容多，且有一定的难度，给初学者带来一定的困难。为了满足广大学生学习的需要，我们把高等数学中重要的概念、公式及定理，编写成“高等数学学习手册”。可供学生学习、记公式或查阅。

我们在编写“高等数学学习手册”过程中，力求简明、实用。由于阅读对象为学习高等数学的学生，因此对一些简单的图形及工程数学的内容都未编入书中。请读者谅解。

参加本书编写的有上海闸北区业余大学黄兆荣、陶健、黑龙江省矿业学院于清泉、吴文祥、河南矿山厂工大张严冰、佳木斯大学程瑞峰、上海电力学院张美琪、吉林大学赵海龙。

本书在编写过程中，受到哈尔滨科技大学教材科的大力支持，陈光海、邓彩霞、李智慧等同志在核对作图等方面做了很多工作，在此向这些同志及有关单位致谢。

由于编者水平有限，再加上时间仓促，一定存在不少缺点及错误，恳请读者批评指正。

赵国清于哈尔滨科技大学

一九八八年八月

目　录

预 备 知 识

一、代数公式

1. 绝对值

$$|a| = \begin{cases} a, & 当a>0 \\ 0, & 当a=0 \\ -a, & 当a<0 \end{cases}$$

$|a| = \sqrt{a^2}$

$|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b \quad (b>0)$

$|a| \geqslant b \iff a \geqslant b$ 或 $a \leqslant -b$

$|a+b| \leqslant |a| + |b|$

$||a| - |b|| \leqslant |a \pm b|$

$|ab| = |a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$

（$\iff$表示"等价于"）

2. 乘法与因式分解公式

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ n为正整数

$a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots +$

$ab^{n-2}-b^{n-1})$　　n为偶数

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$　　n为奇数

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

3. 不等式

1° 若$a>b$，则

$a^n>b^n$　　$(n>0,\ a>0,\ b>0)$

$a^n<b^n$　　$(n<0,\ a>0,\ b>0)$

$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$　　(n为正整数　$a>0,\ b>0$)

2° $\sin x<x<\operatorname{tg}x$　　$(0<x<\frac{\pi}{2})$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (0<x<\pi)$$

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi} \qquad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$$

3° 几个数的算术平均值的绝对值不超过这些数的均方根，即

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

等号只当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立。

4° 设a_1，a_2，$\cdots a_n$均为正数，则它们的几何平均值不超过算术平均值，即

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

等号只当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立。

5° 柯西不等式，设a_i，$b_i$$(i=1, 2, \cdots, n)$为任意实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

4. 牛顿二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \quad C_n^k=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

5. 有限和公式

1° 设c为常数，则

$$\sum_{k=1}^{n} cf(k)=c\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

2° $\sum_{k=1}^{n} [f(k)+g(k)]=\sum_{k=1}^{n} f(k)+\sum_{k=1}^{n} g(k)$

3° $\sum_{k=1}^{n} k!\ k=(n+1)!\ -1$

6. 阶　乘

1° 设n为自然数，则

$n!\ =1\cdot2\cdot3\cdots n$，且规定$0!\ =1$

2° $(2n+1)!!=1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)$，$(-1)!!=0$

3° $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdots(2n)$，$0!!=0$

7. 组　合

1° $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$，　C_n^k也记作$\binom{n}{k}$

2° $C_n^k=\dfrac{n}{n-k}C_{n-1}^k$

3° $C_n^k=C_n^{n-k}$

4° $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$

5° $\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$

8. 有限项求和

1° $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

2° $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

3° $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

4° $1-2+3-\cdots+(-1)^{n-1}n=\begin{cases}\frac{1}{2}(n+1), & n\text{为奇数}\\ -\frac{n}{2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

5° $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}n(n+1)$$

6° $1^3-2^3+3^3-\cdots+(-1)^{n-1}n^3$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}(2n-1)(n+1)^2 & n\text{为奇数}\\ -\frac{1}{4}n^2(2n+3) & n\text{为偶数}\end{cases}$$

7° $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$

8° $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

9° $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$

10° $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$

11° $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

12° $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

9. 方程求根

1° 方程$ax^2+bx+c=0$，则两根为

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad;\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},$$

其判别式$\Delta=b^2-4ac$,

$\Delta>0$有两个不等的实根

$\Delta=0$有两个相等的实根

$\Delta<0$有两个复根

2° 三次方程$x^3-1=0$的三个根分别为

$x_1=1$;

$x_2=\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$;

$x_3=\omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\qquad(i^2=-1)$

二、三角函数

1. 角的度量与换算

1° 整个圆周的$\frac{1}{360}$的弧称为含有1度的弧，1度等于60分，1分等于60秒，分别记为

$1^\circ=60'$, $\qquad 1'=60''$

2° 把等于半径长的弧称为含有1弧度的弧，而1弧度的弧所对的圆心角称为1弧度的角。

3° 弧度与度的关系是

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\theta}{180}$$

式中θ与α分别表示同一角的度数与弧度数。

1（弧度）$=57.29577951^\circ$（度）

1（度）$=0.017453293$（弧度）

π（弧度）$=180^\circ$（度）

4° $\pi=3.141592653589793\cdots$

祖冲之算出的π值为

$3.1415926<\pi<3.1415927$

2. 诱导公式

三角函数的诱导公式表

角 \ 函数	sin	cos	tg	ctg	sec	csc
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$-\csc\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\mp\csc\alpha$	$\sec\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mp\csc\alpha$
$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\mp\mathrm{ctg}\alpha$	$\mp\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\csc\alpha$	$-\sec\alpha$
$2\pi\pm\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\pm\csc\alpha$

3. 基本公式

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\qquad \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\qquad \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1,$$

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\qquad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,$$

$$\sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha=1,\qquad \csc^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\alpha=1.$$

4. 加法公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta\mp1}{\mathrm{ctg}\beta\pm\mathrm{ctg}\alpha}$$

5. 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{ctg}\beta=\pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

6. 积化和差

$$\sin\alpha\sin\beta=-\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

7. 倍角公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\text{ctg}2\alpha=\frac{\text{ctg}^2\alpha-1}{2\text{ctg}\alpha}$$

$$\sin3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\text{tg}3\alpha=\frac{3\text{tg}\alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}$$

$$\text{ctg}3\alpha=\frac{\text{ctg}^3\alpha-3\text{ctg}\alpha}{3\text{ctg}^2\alpha-1}$$

8. 半角公式

下列公式中根号所取符号与等号左边的符号一致。

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\text{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha+1}}$$

$$\csc\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{2\sec\alpha}{\sec\alpha-1}}$$

9. 降幂公式

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin^3\alpha = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$$

$$\sin^4\alpha = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$$

10. 反三角函数的定义域与主值范围

函 数	主 值 记 号	定 义 域	主值范围
反正弦	若$x=\sin y$，则$y=\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$
反余弦	若$x=\cos y$，则$y=\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant \pi$
反正切	若$x=\mathrm{tg}\alpha$，则$y=\mathrm{arctg}x$	$-\infty<x<\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
反余切	若$x=\mathrm{ctg}\alpha$，则$y=\mathrm{arcctg}x$	$-\infty<x<\infty$	$0<y<\pi$

11. 三角形基本定理

1° 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

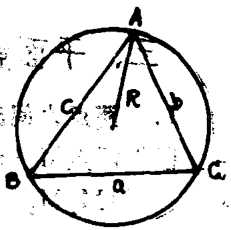


图0—1

2° 余弦正理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

3° 勾股正理

在直角三角形中（C为直角）

$$a^2+b^2=c^2$$

12．双曲函数

1° 双曲函数定义

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$$

$$\operatorname{cth}x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}$$

2° 基本公式

$$\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\operatorname{th}x,\quad \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\operatorname{cth}x,$$

$$\operatorname{th}x\operatorname{cth}x=1,\quad \operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$$

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$$

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x$$

三、平面解析几何

1．两点之间距离

已知两点$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，则两点之间距离

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2．定比分点

已知两点$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$及分点$M(x, y)$

且

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda\neq-1,\text{ 则}$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

3. 直线方程

1° 点斜式

已知直线上的点$M_1(x_1, y_1)$及斜率k，则该直线方程为

$$y-y_1=k(x-x_1)$$

2° 斜截式

已知直线与y轴的截距为b及斜率k，则该直线方程为

$$y=kx+b$$

3° 两点式

已知直线上的两点$M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，则过M_1，M_2两点的直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),\qquad (x_1\neq x_2)$$

4° 截距式

已知直线与x轴y轴的截距分别为a与b，则该直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\qquad (a, b\neq 0)$$

5° 直线方程的一般形式

$$Ax+By+C=0$$

4. 两直线间的位置关系

1° 平行条件

已知直线l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，则l_1平行于l_2的条件为

$$k_1 = k_2$$

2° 垂直条件

已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$；l_2：$y=k_2x+b_2$，则 l_1 垂直于 l_2 的条件为

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

3° 两条直线之间的夹角

已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$；l_2：$y=k_2x+b_2$，则两直线 l_1，l_2 之间夹角 θ，有公式

$$\mathrm{tg}\theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

4° 两条直线的交点

直线 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$，当 $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$ 时，有交点

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

5. 点到直线的距离

已知点 $P(x_0, y_0)$ 直线 l：$Ax+By+C=0$，则

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

6. 圆的标准方程

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

其中圆心是 $C(a, b)$，半径为 r

7. 椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a>b>0)$$

其中 a 为长半轴，b 为短半轴，焦点为 $(\pm c, 0)$ $c=\sqrt{a^2-b^2}$