

PLASTICITY AND GEODYNAMICS

塑性力学和 地球动力学文集

PEKING UNIVERSITY PRESS
北京大学出版社



930509

0344
8074

0304
8074

庆贺王仁教授七十寿辰

塑性力学和地球动力学文集

PLASTICITY AND GEODYNAMICS

PROFESSOR WANG REN 70TH ANNIVERSARY VOLUME

余同希 王大钧 编

Edited by

Yu Tongxi and Wang Dajun

文集 / 余同希 王大钧 编
990

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本文集汇集了国内塑性力学与地球动力学两个领域内的一些学者和专家撰写的 28 篇论文。它们对这两个领域中近年来的研究成果和研究动向作出了专题综述，并对今后的研究方向也提出了一些建议，也有一部分论文反映了比较重要的研究新成果。因此，本文集是关于这两个学科领域中具有总结性和方向性的专题论文集，它对于有关领域的科研人员和高等院校师生是一本很有价值的参考书。

本文集可供高等院校力学、地学等有关专业的教师、研究生，以及科学研究人员参考。

塑性力学和地球动力学文集

余同希 王大钧 编

责任编辑：邱淑清

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 16开本 16印张 381千字

1990年12月第一版 1990年12月第一次印刷

印数：001—800册

ISBN 7—301—01444—9/O·237

定价：12.00元

序

明年将是王仁先生七十寿辰。他的同事，同行，好友，学生出这本论文专辑为他祝贺，无疑是件很有意义的事。

由于专业相近，我对王先生久有所闻，然而与王先生相识却是1955年我们回国参加工作的时候。自那时以来，我们接触较多，我从王先生处不断地得到许多教益。

我想凡是与王先生相处时间愈久的人，就愈有这样的感受，即王先生不仅是一位有杰出成就的力学家，而且是一位待人极其诚恳，平易近人，从不居功自傲，不论在顺利还是困难的条件下，一贯勤奋工作，努力为祖国作奉献的人。

还在他归国之前，他在塑性动力学方面出色的工作，已经为国际学术界所赏识。回国后，他不仅继续从事这个领域的工作，发表了一系列重要的论文，而且通过教学活动，为在我国开辟和发展塑性力学和塑性动力学整个领域做出了奠基和开拓性的贡献。尤其可贵的是，在七十年代初期极为艰难的环境里，完全出自对祖国的责任感，王先生毅然突破自己所熟悉的领域走上力学与地学相结合的道路，在我国率先开辟了地球构造动力学这个新的领域。我今天仍清晰地记得，他多次充满激情地向我讲解地球表面“之”字形山脉与力学中 Shear lag 的对比，讲解地球构造动力学与寻找矿产资源的关系，讲解如何应用断裂力学原理和有限元方法分析邯郸、海城、唐山地震及推测地震发生趋势时的情景。王先生在力学与地学相结合的努力方面是我们力学界的先驱。他为在我国创建地球构造动力学所做出的杰出贡献会长久地留在人们的记忆中。

王先生回国后三十五个春秋以他辛勤的劳动，严格、创新的治学态度，火一般的奉献精神，为新中国培育了大批优秀的工程技术、科研和教学人材。他的著作“塑性力学基础”等已经成为高等院校的标准教材或参考书。现在出版的这本论文集本身就是王先生在高等教育和科研战线上多年耕耘成果的见证。

值此机会，谨向王先生和夫人表示热烈祝贺，祝他们健康长寿，继续为发展我国力学事业，教育和科学研究做贡献。我想这也正是大家共同的愿望。

郑哲敏

1990年7月于北京

目 录

序.....郑哲敏 (i)

• 塑性力学部份 •

蠕变损伤材料Ⅲ型定常扩展裂纹尖端场.....	黄克智 姜 苇 余寿文 (1)
一种粘弹塑性本构关系探讨.....	杨挺青 余激扬 (9)
微损伤系统演化的一种统计模型.....	白以龙 (17)
塑性力学与土的性质模拟.....	王志良 (23)
应力二次跌落脆塑性模型及其简单应用.....	刘文政 徐秉业 刘信声 (30)
双轴异相位循环塑性行为.....	杨 卫 程 莉 (38)
超塑性大变形扭转的实验研究.....	金泉林 (46)
应力波引起的弹性结构屈曲准则.....	朱兆祥 (56)
材料的热粘塑性失稳分析及其工程应用.....	王礼立 包合胜 卢维娴 (71)
圆柱壳的塑性动力稳定性研究.....	韩铭宝 杨青春 (78)
有限时间内稳定性判据对热塑性失稳问题的应用.....	茹重庆 段祝平 (89)
塑性动态本构关系的一种随机过程模型.....	杨桂通 (98)
关于薄板穿甲弹靶变形现象的研究.....	陈裕泽 乐国培 (103)
任意载荷作用下结构塑性动力响应的位移下界估计.....	黄筑平 金泉林 (114)
结构塑性动力响应中的大变形效应及其分析方法.....	余同希 (124)
材料的塑性行为及其波动和层裂效应.....	李永池 (132)
弹塑性有限元分析的牛顿迭代一致性算法.....	黄文彬 李明瑞 魏祖建 (140)
塑性成形中有限元分析的应用和发展前景.....	曲圣年 杨青春 (149)
金属箔的辗压.....	章亮炽 (155)

• 地球动力学部份 •

滑坡分析预报的理论模式.....	苗天德 (161)
岩石力学系统的非稳定性.....	殷有泉 (167)
构造力学的几个塑性力学问题.....	王维襄 (175)
一种光粘弹性材料及其本构关系.....	黄杰藩 赵永红 (186)

用层状模型处理的若干地球构造动力学问题.....	丁中一 潘尔年 (194)
俄勒岗州增生复合体前缘的孔隙水流动和地热结构.....	石耀霖 王其允 (201)
褶皱的力学研究与数值模拟.....	兰腊保 (207)
地震地质工作中的若干力学问题.....	梁海华 (214)

王仁教授在塑性力学与地球动力学领域内的学术成就.....	王大钧 (220)
王仁教授的论文和著作目录.....	(223)

论文的英文摘要.....	(230)
编后记.....	(245)

CONTENTS

Preface

<i>Zheng Zhemin</i>	(i)
---------------------------	-------

PLASTICITY

Near-Tip Fields for Mode-III Cracks Growing Steadily in Creeping

Materials with Damage

<i>Hwang Kehchih, Jiang Wei, Yu Shouwen</i>	(1)
---	-------

A Constitutive Relationship of Elastic-Viscoplastic Materials

<i>Yang Tingqing, Yu Jiyang</i>	(9)
---------------------------------------	-------

A Brief Review of Statistical Model of Microdamage Evolution

<i>Bai Yilong</i>	(17)
-------------------------	--------

Plasticity and the Modeling of Soil Behaviors

<i>Wang Zhiliang</i>	(23)
----------------------------	--------

On Brittle-Plastic Model with Second Drop of Stresses and its Application

<i>Liu Wenzheng, Xu Bingye, Liu Xinsheng</i>	(30)
--	--------

Biaxial Out-of-Phase Cyclic Plastic Behaviour

<i>Yang Wei, Cheng Li</i>	(38)
---------------------------------	--------

An Experimental Study of Superplastic Torsion under Finite Strain

<i>Jin Quanlin</i>	(46)
--------------------------	--------

Criteria for Stress-Wave-Induced Bucking of Elastic Structures

<i>Zhu Zhaoxiang</i>	(56)
----------------------------	--------

Analysis for Thermo-Viscoplastic Instability of Materials and Its Application in Engineering

<i>Wang Lili, Bao Hesheng, Lu Weixian</i>	(71)
---	--------

Studies of the Dynamic Plastic Instability of Cylindrical shells

<i>Han Mingbao, Yang Qingchun</i>	(78)
---	--------

Thermo-Plastic Instability During a Finite Duration

<i>Ru Chongqing, Duan Zuping</i>	(89)
--	--------

A Stochastic Process Model of Dynamic Constitutive Relation for Elastoplastic Materials

<i>Yang Guitong</i>	(98)
---------------------------	--------

A Phenomenal Study on the Deformations of Both Thin Plate and Projectile Due to Perforation	
<i>Chen Yuze, Le Guopei</i>	(103)
Lower Displacement Bounds on Rigid-Plastic Structures Subjected to Arbitrary Dynamic Loadings	
<i>Huang Zhuping, Jin Quanlin</i>	(114)
The Effects of Large Deformation in the Dynamic Plastic Response of Structures and the Methods to Analyze Them	
<i>Yu Tongxi</i>	(124)
The Plastic Behavior of Materials with its Effects on Wave Propagation and Spallation	
<i>Li Yongchi</i>	(132)
A Consistent Algorithm of Newton Iteration for Elastoplastic Finite Element Analysis	
<i>Huang Wenbin, Li Mingrui, Wei Zujian</i>	(140)
The Applications and Future Developments of Finite Element Analysis in Metal Forming	
<i>Qu Shengnian, Yang Qingchun</i>	(149)
On the Rolling of Metal Foil	
<i>Zhang Liangchi</i>	(155)

GEODYNAMICS

Some Theoretical Model of Landslide Analysis and Prediction	
<i>Miao Tiande</i>	(161)
Instability in Rock Systems	
<i>Yin Youquan</i>	(167)
Some Problems of Plasticity Raised from Tectonomechanics	
<i>Wang Weixiang</i>	(175)
A Photoviscoelastic Material and Its Constitutive Relationships	
<i>Huang Jiefan, Zhao Yonghong</i>	(186)
Some Problems in Geotectonic Dynamics with Layered Earth Models	
<i>Ding Zhongyi, Pan Ernian</i>	(194)
Porous Flow and Thermal Structure in Front of Oregon Accretionary Complex	
<i>Shi Yaolin, Wang Chiyuen</i>	(201)
Mechanics and Numerical Models of Folding	
<i>Lan Labao</i>	(207)

On Some Mechanical Problems in Seismogeological Work	
<i>Liang Haihua</i>	(214)

Professor Wang Ren's Academic Achievements in the Fields of Theory of Plasticity and Geodynamics	
<i>Wang Dajun</i>	(220)
List of Professor Wang Ren's Publications.....	(223)

Abstracts in English.....	(230)
Postscript	(245)

蠕变损伤材料Ⅲ型定常扩展裂纹尖端场^①

黄克智 姜 苇^② 余寿文

(清 华 大 学)

摘要 本文采用 Kachanov 蠕变损伤本构模型对定常扩展下的裂纹尖端场进行了渐近分析, 对Ⅲ型反平面剪切条件下的裂纹尖端场推导了渐近方程和定解条件, 得到了应力、应变及损伤场的渐近解。

一、引 言

现今的断裂力学中广泛研究的是裂纹及其扩展的规律。蓬勃发展的损伤力学研究的则是存在于材料中分布的缺陷。而事实上, 在物体的破坏过程中往往同时伴随着损伤(分布缺陷)和裂纹(奇异缺陷)交互的发展。尤其是在裂纹尖端附近区域的材料必然具有更严重的分布缺陷; 裂纹尖端局部的损伤, 作为一种发展的分布型缺陷, 必然影响裂纹尖端的应力、应变场, 从而影响裂尖区的裂纹扩展行为。因此, 将损伤力学和断裂力学结合起来去研究物体的破坏现象, 对进一步揭示材料的破坏机制有重要意义^[1]。

考虑材料损伤效应的裂纹尖端场渐近分析是一项重要的基础性研究, 然而目前这方面的研究工作还进行得很少。由于问题本身相当困难, 已有的解析(非有限元)结果大都是在一些简化假定下得到的, 即不是小损伤的解就是大损伤的解, 还没有得到能描写不同损伤程度的解, 尤其是关于损伤场的解。

损伤力学的发展已经提供了各种描述材料损伤的模型以及考虑损伤的本构理论, 其中有代表性的有 Kachanov-Rabotnov-Lemaitre 的连续损伤理论^[2,3,4]; Rousselier 的空洞型损伤理论^[5]; Chaboche 的各向异性损伤理论^[6]等等。

本文采用 Kachanov 型的蠕变损伤本构模型^[7], 对定常扩展状态下的Ⅲ型反平面剪切裂纹的尖端场进行了渐近求解, 求解过程中应变与损伤是耦合的, 推导了渐近方程和定解条件, 并在具体的材料常数下得到了应力、应变及损伤场的渐近解。

二、Kachanov-Hayhurst 蠕变损伤本构关系及演化方程

在由 Kachanov 提出并由 Hayhurst 及其合作者发展的蠕变损伤本构模型^[7]中, 假设存在一个标量内变量, 即损伤变量 ω , ω 从零变化到 1。对于原始完好无损的材料有 $\omega = 0$, 对于完全损伤失效的材料有 $\omega = 1$ 。

ω 随时间的演化规律由以下的演化方程决定

① 国家自然科学基金资助项目。

② 现在国家核安全局核安全中心工作。

$$\dot{\omega} = D[\alpha\sigma_I + (1-\alpha)\sigma_e]^\chi(1+\phi)^{-1}(1-\omega)^{-\phi} \quad (2.1)$$

ω 对应力-应变率关系的影响表现在

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij} (1-\omega)^{-n} \quad (2.2)$$

其中, σ_I 为最大拉伸主应力, $\sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{1/2}$ 为等效拉伸应力, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ 为应力张量偏量, “ $\dot{}$ ”表示对物理量的时间导数。

以上方程中, D, α, χ, ϕ, E (杨氏模量), ν (泊松比), B (蠕变系数) 和 n (应力指数) 为材料参数, 这些材料参数可以由不含缺口试件的蠕变试验来确定, 其中 α 的确定需要至少在两种不同应力状态下的试验。然而对于蠕变条件下的各种材料, 目前试验尚进行得很少。

Bendick 等曾做过几种材料的蠕变试验, 其中对于 540°C 温度下的 $\frac{1}{2}\text{Cr}-\frac{1}{2}\text{Mo}-\frac{1}{4}\text{V}$ 钢, 材料常数为 $E = 15 \cdot 10^4$, $B = 2.7 \cdot 10^{-31}$, $n = 10$, $D = 2.0 \cdot 10^{-23}$, $\chi = 7.0$, $\phi = 12.3$, χ 的值未给出, 单位取 MPa, s (见文献[8])。

对于常应力单轴蠕变实验, 方程(2.1)和(2.2)易于积分而给出蠕变曲线^[8]。

为了对裂纹尖端场进行求解, 本文采用了另一个内变量 ψ , ψ 的定义是

$$\psi = 1 - \omega \quad (2.3)$$

ψ 称为连续度或完好度, 是一个从 1 变到零的数, 当 $\omega = 0$ 时, $\psi = 1$, 表示完好无损的材料; 当 $\omega = 1$ 时, $\psi = 0$, 表示完全失效的材料。这样, 本构方程(2.2)和演化方程(2.1)就可以变为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij} \psi^{-n} \quad (2.4)$$

$$(\psi^{1+\phi})^\circ = -D[\alpha\sigma_I + (1-\alpha)\sigma_e]^\chi \quad (2.5)$$

式中 $(\)^\circ$ 表示对括号中物理量的时间导数。

三、基本方程

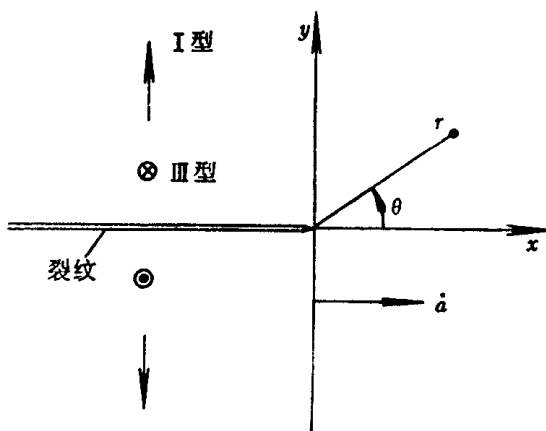


图 1

我们取裂纹尖端为坐标原点, 采用笛卡尔 (x, y, z) 坐标系, 且 z 轴位于裂纹前缘, 同时也采用极坐标系 (r, θ) , 裂纹两岸位于 $\theta = \pm\pi$, 在定常扩展裂纹尖端场中, 取坐标系的原点随裂纹尖端以速度 $\dot{a}$ 沿 x 轴正向运动, 如图1。

对于定常扩展, 有定常条件

$$(\)^\circ = -\dot{a} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (\) - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\) \right] \quad (3.1)$$

对于Ⅲ型问题, 应力张量不为零的分量为

$\sigma_r = \tau_{rz}$, $\sigma_\theta = \tau_{\theta z}$; 应变张量不为零的分量为

$\varepsilon_r = \varepsilon_{rz}$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta z}$ 。若采用以下记法

$$(\quad)' = \frac{\partial}{\partial r}(\quad), \quad (\quad)^{\circ} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\quad)$$

则Ⅲ型问题的基本方程为

平衡方程

$$(r\sigma_r)' + \sigma_{\theta}^{\circ} = 0 \quad (3.2)$$

引入应力函数 Φ , 平衡方程自动满足:

$$\sigma_r = -r^{-1}\Phi^{\circ}, \quad \sigma_{\theta} = \Phi' \quad (3.3)$$

率协调方程

$$(r\varepsilon_{\theta}^{\circ})' - \varepsilon_r^{\circ} = 0 \quad (3.4)$$

本构方程

$$\varepsilon_i^{\circ} = \frac{1}{2G}\sigma_i^{\circ} + \frac{\bar{B}}{2}\sigma^{n-1}\sigma_i\psi^{-n} \quad (i=r, \theta) \quad (3.5)$$

其中 $\sigma = (\sigma_r^2 + \sigma_{\theta}^2)^{1/2}$, $\bar{B} = (\sqrt{3})^{n+1}B$, G 为剪切模量。

演化方程

$$(\psi^{1+\phi})^{\circ} = -\bar{D}\sigma^{\alpha} \quad (3.6)$$

其中 $\bar{D} = (\sqrt{3})^{\alpha}D$, 这里取 $\alpha = 0$, 这只影响裂纹尖端场的角分布情况, 不影响尖端场的奇异性。

四、渐近方程

为了考查在裂纹尖端附近应力、应变及损伤场的渐近行为, 将场内各物理量展成渐近级数, 并只考虑其主奇异项或主项。这里我们采用一般形式的本构方程(2.4)及演化方程(2.5), 对Ⅰ型平面应力及平面应变裂纹和Ⅲ型反平面剪切裂纹进行统一的研究, 因此, 各张量的下标取值1, 2, 3。

设在裂纹尖端附近完好度具有下列展式

$$\psi(r, \theta) = \psi_0 r^{\alpha} \tilde{\psi}(\theta) \quad (4.1)$$

设在裂纹尖端附近应力具有下列展式

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \phi_0 r^{\gamma} \sigma_{ij}(\theta) \quad (4.2)$$

设在裂纹尖端附近应力函数具有下列展式

$$\Phi(r, \theta) = \phi_0 r^s f(\theta) \quad (4.3)$$

则有

$$s = \begin{cases} \gamma + 1 & (\text{Ⅲ型}) \\ \gamma + 2 & (\text{Ⅰ型}) \end{cases} \quad (4.4)$$

利用渐近展式和定常条件, 由本构方程中弹性变形项与蠕变变形项关于 r 的量级协调和演化方程各项关于 r 的量级协调, 解得

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{n - (1 + \phi)}{(1 + \phi)(n - 1) - n\chi} \\ \delta &= \frac{(n - 1) - \chi}{(1 + \phi)(n - 1) - n\chi} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

物理意义要求 $\delta \geq 0$, $\gamma < 0$, 即完好度无奇异性, 应变有奇异性。

对于在本构方程中略去弹性项或者略去蠕变损伤项时的量级分析与相应的尖端场求解, 本文作者将在另文中讨论。

对于Ⅲ型裂纹尖端场, 利用基本方程和渐近展式得到渐近方程。

将本构方程(3.5)代入率协调方程(3.4), 得率协调方程的渐近形式

$$\begin{aligned} \frac{\circ}{G} \phi_0 r^{s-2} [\sin \theta \ddot{f} + (2-s)\cos \theta \ddot{f} + s^2 \sin \theta \dot{f} + s^2(2-s)\cos \theta \dot{f}] \\ + \bar{B} \phi_0^n \psi_0^{-n} r^{n(s-1-\delta)} (f^2 + s^2 f^2)^{(n-3)/2} \tilde{\psi}^{-n-1} \\ \cdot \{ \tilde{\psi} [(nf^2 + s^2 f^2) \ddot{f} + sf \dot{f}^2 (1 + 2ns - s - n - n\delta) \\ + s^3 f^3 (1 + ns - n - n\delta)] - n(f^2 + s^2 f^2) \dot{f} \tilde{\psi} \cdot \} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

演化方程的渐近形式为

$$\begin{aligned} \frac{\circ}{a} \psi_0^{1+\phi} r^{\delta(1+\phi)-1} (\cos \theta \delta (1 + \phi) \tilde{\psi}^{1+\phi} - \sin \theta (1 + \phi) \tilde{\psi}^\phi \tilde{\psi} \cdot) \\ = \bar{D} \phi_0^\gamma r^{\gamma} (f^2 + s^2 f^2)^{\gamma/2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

由 r 的量级协调, (4.6)和(4.7)两式变为以下两个方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{\circ}{G} \phi_0 &= \zeta \bar{B} \phi_0^n \psi_0^{-n} \\ \frac{\circ}{a} \psi_0^{1+\phi} &= \eta \bar{D} \phi_0^\gamma \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta [\sin \theta \ddot{f} + (2-s)\cos \theta \ddot{f} + s^2 \sin \theta \dot{f} + s^2(2-s)\cos \theta \dot{f}] + (f^2 + s^2 f^2)^{(n-3)/2} \tilde{\psi}^{-n-1} \\ \cdot \{ \tilde{\psi} [(nf^2 + s^2 f^2) \ddot{f} + sf \dot{f}^2 (1 + 2ns - s - n - n\delta) \\ + s^3 f^3 (1 + ns - n - n\delta)] - n(f^2 + s^2 f^2) \dot{f} \tilde{\psi} \cdot \} = 0 \\ \eta [\cos \theta \delta (1 + \phi) \tilde{\psi}^{1+\phi} - \sin \theta (1 + \phi) \tilde{\psi}^\phi \tilde{\psi} \cdot] = (f^2 + s^2 f^2)^{\gamma/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

其中 ζ, η 是与 θ 无关的待定常数。

我们可以定义 ϕ_0, ψ_0 , 使得

$$\zeta = \eta = 1 \quad (4.10)$$

这样定义了幅值 ϕ_0, ψ_0 后, $f(\theta)$ 与 $\tilde{\psi}(\theta)$ 的意义也随之确定, 并且由求解微分方程组 (4.9) 的边值问题求出, 求解时不对 $f(\theta)$ 和 $\tilde{\psi}(\theta)$ 提归一化条件。

ϕ_0, ψ_0 可由(4.8)式利用(4.10)式求出, 得

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= \frac{\frac{\circ}{a} r^{-\gamma}}{C_1} \\ \psi_0 &= \frac{\frac{\circ}{a} r^{-\delta}}{C_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= [(\bar{B}G)^{1+\phi} \bar{D}^{-n}]^{\frac{1}{(n-1)(1+\phi)-\chi n}} \\ C_2 &= [(\bar{B}G)^{\chi} \bar{D}^{-(n-1)}]^{\frac{1}{(n-1)(1+\phi)-\chi n}} \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

ϕ_0, ψ_0 分别代表了裂纹尖端的应力强度和完好度程度, 它们依赖于裂纹扩展速率 $\dot{a}$ 和材料常数 $\bar{B}, \bar{D}, G, n, \chi, \phi$. 由于物理意义要求 $\delta \geq 0, \gamma < 0$, 因此应力幅值 ϕ_0 越大, 则完好度幅值 ψ_0 越小, 裂纹扩展速率 $\dot{a}$ 越高.

微分方程组(4.9)是关于 $f(\theta)$ 最高阶导数为三阶, $\tilde{\psi}(\theta)$ 最高阶导数为一阶的两个非线性常微分方程所构成的微分方程组, 该方程组可以化成四个一阶的微分方程所构成的微分方程组来求解.

五、定 解 条 件

由裂纹面上自由条件得

$$f(\pm\pi) = 0 \quad (5.1)$$

由反对称条件得

$$\dot{f}(0) = 0 \quad (5.2)$$

由于问题关于 $\theta = 0$ 的对称性, 可仅考虑 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的上半平面.

还有三个在 $\theta = 0$ 处的边界条件 $f(0), \dot{f}(0), \tilde{\psi}(0)$ 需要确定, 同时注意到, f 和 $\tilde{\psi}$ 在 $\theta = 0$ 处为奇异, 需消除奇异进行求解, 因此要研究在 $\theta = 0$ 处微分方程组的性质.

首先要求微分方程组的解在 $\theta = 0$ 处为正则, 即在 $\theta = 0$ 处, 方程组(4.9)中去掉 $\sin \theta f$ 和含 $\sin \theta \tilde{\psi}$ 的项后得到的方程组仍成立. 由该正则条件, 并应用 l'Hospital 法制, 可求出四维一阶常微分方程在 $\theta = 0$ 处的两个边界条件和两个消除奇异的导数的初值, 得

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\psi}(0) &= \left\{ \frac{[s^2 f^2(0)]^{\chi/2}}{\delta(1+\phi)} \right\}^{\frac{1}{1+\phi}} \\ \dot{f}(0) &= - \frac{s^2(2-s)f(0) + \tilde{\psi}^{-n}(0)(s^2 f^2(0))^{(n-1)/2} s f(0)(1+ns-n-n\delta)}{(2-s) + \tilde{\psi}^{-n}(0)(s^2 f^2(0))^{(n-1)/2}} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\psi}'(0) &= 0 \\ \ddot{f}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

条件(5.2), (5.3), (5.4)和另外一个在 $\theta = \pi$ 处的条件(5.1), 这就确定了一个非线性常微分方程组的边值问题.

六、计 算 及 结 果

对于非线性常微分方程组的边值问题, 采用试射法, 可以当作一个初值问题来解, 由定解条件可知, III型问题的角分布函数微分方程组的求解可归结为一个单参数的打靶问题, 调整的参数为 $f(0)$.

在微分方程组中含有材料参数 n, χ, ϕ , 在满足 $\delta \geq 0, \gamma < 0$ 的条件下, 给定这三个参数,

我们就可以对微分方程组求解，具体的运算程序是采用 Runge-Kutta 积分法。

对于前述的 $\frac{1}{2}\text{Cr} - \frac{1}{2}\text{Mo} - \frac{1}{4}\text{V}$ 材料，其材料参数为 $n=10$, $\chi=7$, $\phi=12.3$ ，由 (4.5) 式可得

$$\gamma = -0.07, \delta = 0.04 \quad (6.1)$$

代入求解微分方程组的边值问题，得到应力场和完好度场关于 θ 的角分布曲线，如图 2 和图

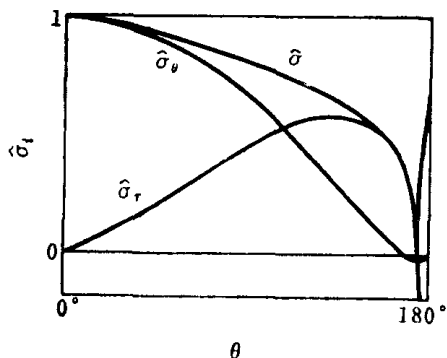


图 2

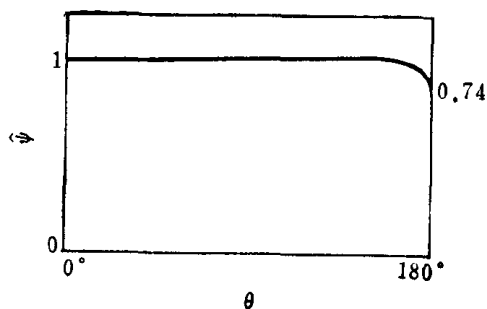


图 3

3 所示，其中图中的物理量已被规一化，即

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_i(\theta) &= \sigma_i(\theta)/\alpha_n, \quad i=r, \theta \\ \hat{\sigma}(\theta) &= \sigma(\theta)/\alpha_n \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

$$\sigma(\theta) = [\sigma_r^2(\theta) + \sigma_\theta^2(\theta)]^{1/2} = (f^2 + s^2 f^2)^{1/2}$$

其中

$$\alpha_n = [\sigma(\theta)]_{\max} = \sigma(0)$$

$$\hat{\psi}(0) = \tilde{\psi}(\theta)/\beta_n \quad (6.3)$$

其中

$$\beta_n = [\tilde{\psi}(\theta)]_{\max} = \tilde{\psi}(0)$$

将本构方程(3.5)的渐近形式对时间积分，其中将蠕变部分对时间的积分换成对角度 θ 的积分，最后得

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^{cr} \\ &= \frac{1}{2G} \phi_0 r^\gamma \left(\sigma_i + (\sin \theta)^\gamma \int_0^\theta (\sin \varphi)^{-\gamma-1} \sigma(\varphi)^{n-1} \sigma_i(\varphi) \cdot \tilde{\psi}^{-*}(\varphi) d\varphi \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

ε_i^{cr} 在 $\theta=0$ 处为 $\frac{0}{0}$ 型。应用 l'Hospital 法则

$$\varepsilon_i^{cr}(\theta=0) = \frac{1}{2G} \phi_0 r^\gamma [-r^{-1}(\sigma(0))^{n-1} \sigma_i(0)(\tilde{\psi}(0))^{-*}] \quad (6.5)$$

对于前述的材料 $\frac{1}{2}\text{Cr} - \frac{1}{2}\text{Mo} - \frac{1}{4}\text{V}$ ，得到蠕变应变场关于 θ 的角分布曲线如图 4 所示，

图中

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i^{cr}(\theta) &= \varepsilon_i^{cr}(\theta)/\gamma_n, \\ \varepsilon_i^{cr}(\theta) &= \varepsilon_i^{cr}(\theta)/\gamma_n \end{aligned} \right\} \quad i=\gamma, \theta \quad (6.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i^{cr}(\theta) &= (\sin \theta)^\gamma \int_0^\theta (\sin \varphi)^{-\gamma-1} \bar{\sigma}^{n-1}(\varphi) \bar{\sigma}_i(\varphi) \bar{\psi}^{-n}(\varphi) d\varphi \\ \varepsilon^{cr}(\theta) &= [(\varepsilon_r^{cr}(\theta))^2 + (\varepsilon_\theta^{cr}(\theta))^2]^{1/2} \\ \gamma_n &= \varepsilon^{cr}(0) \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

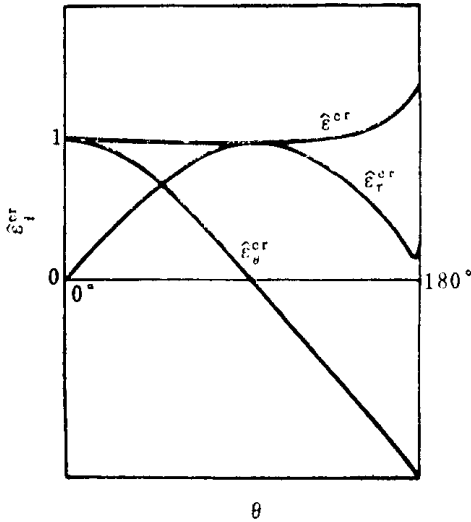


图 4

裂纹尖端损伤区确定如下：①：

定义损伤区的边界为损伤为零或完好度为 1 的等损伤线，由(4.1)式，确定损伤区的边界为

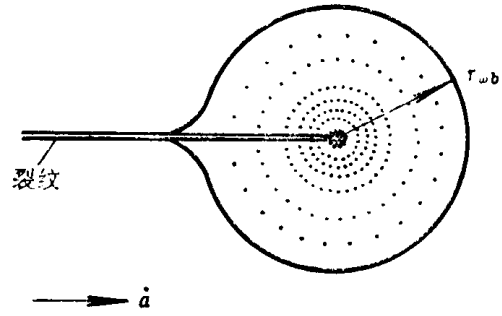


图 5

$$r_{\omega b}(\theta) = \psi_0^{-1/\delta} \bar{\psi}(\theta)^{-1/\delta} \quad (6.8)$$

其中， $r_{\omega b}$ 表示损伤区边界的矢径。利用(4.11) $r_{\omega b}$ 随 a ， ϕ_0 的变化规律为

$$r_{\omega b}(\theta) = C_2^{1/\delta} a \bar{\psi}(\theta)^{-1/\delta} = C_2^{1/\delta} C_1^{-1/\delta} \phi_0^{-1/\gamma} \bar{\psi}(\theta)^{-1/\delta} \quad (6.9)$$

对于材料 $\frac{1}{2}\text{Cr} - \frac{1}{2}\text{Mo} - \frac{1}{4}\text{V}$ ，根据图 3 所示的完好度场角分布，可以确定损伤区的形状如图 5 所示，是近似于一个以裂纹尖端为圆心的圆。

七、结 论 与 讨 论

本文求解了蠕变条件下考虑材料损伤的Ⅲ型定常扩展裂纹尖端的应力、应变场与损伤场，求解过程中蠕变应变与损伤场是耦合的，并考虑了弹性变形，结果表明：

(1) 对于高温下的 $\frac{1}{2}\text{Cr} - \frac{1}{2}\text{Mo} - \frac{1}{4}\text{V}$ 钢，存在完好度或损伤无奇异性的解，其应力、应变具有相同阶次的奇异性，并且明显低于不考虑损伤时的奇异性。在蠕变条件下不考虑材料损伤的扩展裂纹尖端场的渐近解中^[9]，对于 $n=10$ ，应力、应变的奇异性为 $\gamma = -0.11$ ，考虑了损伤后，尖端场的奇异性降低，由(4.5)式， $\gamma = -0.07$ 。这与考虑了塑性的尖端场奇异性低于考虑弹性的尖端场奇异性有类似的地方。

① 利用尖端场的解确定的损伤区尺寸是近似的，但可以看作是损伤区的长度。

(2) 对于一定的材料, 尖端场应力、应变的幅值正比于裂纹扩展速度 $\dot{a}$ 的 $(-\gamma)$ 次方, $(-\gamma) > 0$; 损伤区尺寸正比于裂纹扩展速率 $\dot{a}$ 。

(3) 应力、应变场的角分布规律与不考虑损伤时^[9]的对比变化不大; 完好度的角分布规律为, 在裂纹延长线上为最大, 在裂纹两岸上降为在裂纹延长线上的74%, 在其余角度下近似保持常值不变, 因此损伤区边界的形状是近似于以裂纹尖端为圆心的一个圆。应力幅值越大, 完好度幅值越小, 裂纹扩展速率越高时, 裂纹尖端损伤区越大。

参 考 文 献

- [1] 塑性力学进展, 第二章, 中国铁道出版社 (1988)。
- [2] Kachanov, L. M., On the rupture-time under creep, *Izv. Akademia Nauk SSSR*, 8(1958), 26—31 (in Russian)。
- [3] Rabotnov, Y. N., Creep problems in structural members, North-Holland, Amsterdam (1969)。
- [4] Lemaitre, J., A continuum damage mechanics model for ductile fracture, *J. of Eng. Materials and Technology*, 107 (1985), 83—89。
- [5] Rousselier, G., Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage. IUTAM symposium on three-dimensional constitutive relations and ductile fracture, Ed. by S. Nemat-Nasser, North-Holland Publishing Company (1981), 331—335。
- [6] Chaboche, J. L., Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics, *Nuclear Eng. and Design*, 79 (1984), 309—319。
- [7] Hayhurst, D. A. and Leckie, F. A., Behaviour of materials at high temperatures, in "Mechanical Behaviour of Materials", eds. J. Carlsson and N. G. Ohlsson, Suppl. Vol. Pergamon Press, Oxford and New York (1983), 8—24。
- [8] Riedel, H., Fracture at high temperature. Springer-Verlag, Berlin, N.Y. (1987)。
- [9] Hui, C. Y. and Riedel, H., The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions, *Int. J. Fracture*, 17, 4 (1981), 409—425。
- [10] 姜苇, 蠕变损伤裂纹尖端场与细观损伤的声学探测, 清华大学工学博士学位论文 (1989)。