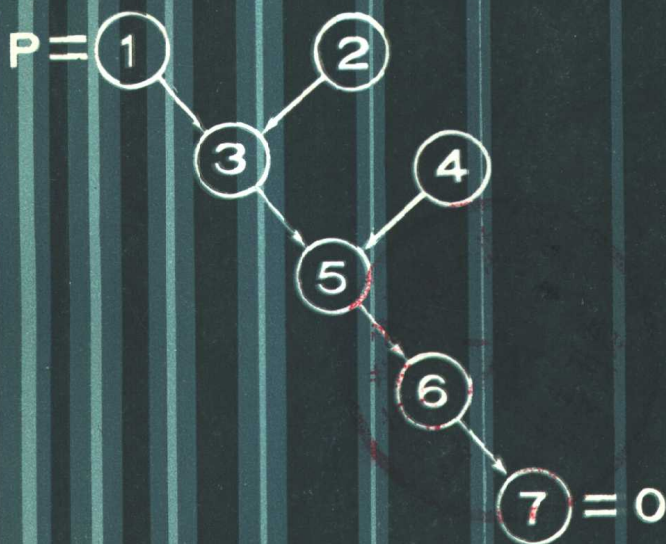


初中数学疑难问答

上册

段云鑫 等 编



地质出版社

初中数学疑难问答

(上 册)

段云鑫 翟工拓 赵喜臻 编写

陈伟侯 校订

地 质 出 版 社

初中数学疑难问答

(上册)

段云鑫 等编写

*

责任编辑：张 朗

地质出版社出版

(北京 西 四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本：787×1092 1/32 印张：9¹³/₁₆ 字数：217,000

1985年10月北京第一版，1985年10月北京第一次印刷

印数：1—44,730册 定价：1.35元

统一书号：7038·新175

前 言

在学习数学的过程中，每个人都会遇到各种各样的疑难问题，例如：这个概念为什么要这样定义？这两个概念有什么区别？这个定理在整个体系中起什么作用？它还有别的证明方法吗？这个法则适用的范围是什么？这种解题方法为什么重要？为什么这样的证明是错误的，等等。所谓疑难问题，当然没有一成不变的标准，对甲来说是疑难，对乙来说却不是了；对低年级来说是疑难，对高年级来说却不是了；对肯动脑筋者来说是疑难，对马虎的人来说却可能发现不了问题的所在。尽管实际情况千变万化，但就处于同一学习阶段的人来说，大多数人总有一些普遍感到疑惑或难理解的问题。

本书参照现行初中数学教材（包括全日制中学和业余中学的），根据编者们的教学经验，以大多数人在初中数学学习过程中容易产生的疑难为标准，编写了有关初中数学的326条疑难问题（其中代数方面的189条，几何及数学推理方面的137条）。这些问题涉及对基本概念、基本定理、基本方法的理解，涉及概念的深化、各定理之间的联系，涉及数学中的一些基本方法，也涉及简单的数学推理知识。书中绝大部分疑难直接源于现行教材，这就为读者学习现行教材，从另一个角度提供了一本辅助读物；少部分疑难问题，则是在大部分疑难问题的基础上提炼而成的。编写解答时，在不违背科学性的前提下，力求通俗、简明、灵活，以帮助

ABC 98/04

读者抓住问题的关键，弄清问题是如何被解决的。在安排疑难问题的顺序上，除照顾教材的常规顺序以外，还力求做到由浅入深、由具体到抽象。

应当说明的是，从初中教材中引伸出来的疑难，有一些不可能在初中范围内得到说明。但在初学者当中，提出这类问题的也不乏其人。因此，本书将少量的这类问题冠以 * 号，写出解答供读者参考，这些很可能会激起一些读者要进一步学习数学的兴趣。

在目前的数学教材中，采用缓慢渗透的方式，向学生传授数学推理知识，培养逻辑思维能力。这种方法是古老的，也是有益的。但就现代化的要求来说，如果较早地了解一些比较系统的数学推理常识，对发展学生的数学能力是很有利的。为此，本书专门加入了数学推理常识这一章，以利于读者将初中阶段学到的数学推理常识进一步系统化。

在目前的小学和中学数学教材中，分散地讲了一点整数的性质方面的知识，讲得不多，而各地的数学竞赛常常在整数上做文章，应该说，整数也是培养逻辑思维能力的的一个方面，为了填补这方面的不足，我们翻译了整数的性质这一参考材料，放在本书的末尾，供广大读者参考。

由于我们的水平有限，编写的时间仓促，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

1985年 8 月

目 录

上 册 代 数

第一章 数	1
1.1 “0”表示“没有”吗?	1
1.2 0是偶数吗?	1
1.3 +、-、 $\times$ 、 $\div$ 符号是怎样产生的?	2
1.4 =、 $>$ 、 $<$ 符号是怎样产生的?	3
1.5 “ $\sqrt{\quad}$ ”是怎样产生的?	3
1.6 常用的记数制有几种?	4
1.7 为什么1不是质数?	5
1.8 怎样造质数表?	6
1.9 怎样判断一个数是不是质数?	6
1.10 有没有最大的质数?	7
1.11 怎样用辗转相除法求两数的最大公约数?	8
1.12 什么是算术基本定理?	11
1.13 怎样判断一个自然数能不能被2、3、5、11整除?	11
1.14 哪一个民族最早认识了负数?	13
1.15 怎样区分性质符号与运算符号?	15
1.16 什么叫实数的绝对值?	16
1.17 为什么“减负”等于“加正”?	17
1.18 什么叫非负数?	18
1.19 “和”的含义是怎样发展的?	19
1.20 为什么“负负得正”?	20
1.21 $0 = 1 = -1$ 的诡辩错在哪里?	23

1.22	什么是有理数？	24
1.23	无理数就是带根号的数吗？	25
1.24	无理数是怎样发现的？	26
1.25	有理数和无理数的名称合理吗？	27
1.26	两个有理数的和、差、积、商一定是有理数吗？	28
1.27	两个无理数的和、差、积、商一定是无理数吗？	29
1.28	怎样证明两个有理数之间存在无限多个有理数？	29
1.29	怎样证明两个有理数之间至少存在一个无理数？	30
1.30	为什么说两个有理数之间存在无限多个无理数？	31
1.31	两个整数相除，可以得到无限不循环小数吗？	32
1.32	怎样证明 $\sqrt[3]{3}$ 是无理数？	33
1.33	怎样在数轴上作出 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、 $\dots$ 、 $\sqrt{n}$ 、的点？	34
1.34	怎样把无限循环小数化成分数？	35
1.35	$0.\dot{9} = 1$ ？还是 $0.9 \approx 1$ ？	37
1.36	什么叫做集合？	38
1.37	怎样表示集合？	38
1.38	什么叫做两个集合的交集？	39
1.39	什么叫做两个集合的并集？	40
1.40	什么是对应？	41
1.41	什么是一一对应？	42
1.42	为什么说实数集有连续性？	45
1.43	奇数和偶数各占整数的一半吗？	45
1.44	怎样把全体正有理数排队编号？	47
1.45	0.2 与 0.20 相等吗？	48
1.46	为什么说我们实际求得的数大多是近似值？	49
1.47	求近似值有哪些舍入方法？	49
• 1.48	什么是代数数？	51
• 1.49	什么是超越数？	51
• 1.50	数与量的意义相同吗？	52
• 1.51	什么是抽屉原则？	53

第二章 式	56
2.1 代数与算术有什么区别?	56
2.2 “代数”这一名词是怎样传入中国的?	57
2.3 代数运算包括哪些运算?	58
2.4 在构造代数式时,为什么要强调只能进行有限次的 代数运算?	58
2.5 怎样正确地读出一个代数式?	59
2.6 怎样用代数式表示一般的奇数与偶数?	61
2.7 单项式可否叫做多项式?	63
2.8 $\frac{x^2-1}{x+1}$ 是整式,还是分式?	64
2.9 怎样掌握乘法公式?	65
2.10 怎样对公式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 进行推广?	67
2.11 什么是杨辉三角形?	69
2.12 讨论多项式的因式分解,为什么要引进数域这一概 念?	70
2.13 什么是一元不可约多项式?	72
2.14 在有理数域上,怎样判断一元多项式是否不可约?	73
2.15 在实数域上,怎样判断一元多项式是否不可约?	75
2.16 什么是因式分解定理?	75
2.17 什么是爱森斯坦判别法?	76
2.18 怎样利用十字相乘法分解因式?	78
2.19 什么是双十字相乘法?	80
2.20 二元二次多项式一定能在实数域内分解吗?	82
2.21 $x^2 \pm a$ 含有 $x \pm a$ 的因式吗?	84
2.22 如何运用拆添项的技巧分解因式?	85
2.23 在因式分解中如何巧用换元法?	86
2.24 什么是恒等式?	88
2.25 怎样证明恒等式?	89
2.26 什么是多项式的恒等定理?	91

2.27	什么是待定系数法？	92
2.28	什么是条件等式？	95
2.29	怎样证明条件等式？	96
2.30	什么是多项式的带余除法？	100
2.31	什么是分离系数法？	102
* 2.32	什么是综合除法？	103
2.33	什么是对称式？	106
2.34	什么是轮换对称式？	108
2.35	怎样用“零值分段法”去掉式子中的绝对值符号？	110
2.36	待定系数的这种求法合理吗？	112
* 2.37	怎样把一个真分式化为部分分式之和？	113
2.38	根式与无理式有何异同？	118
2.39	在初中阶段， $\sqrt[n]{a}$ 表示什么？	119
2.40	为什么规定算术根？	120
2.41	化简根式时，要注意哪儿点？	122
2.42	在作根式运算时，为什么要把分母有理化？	125
2.43	怎样把形如 $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ 的根式变形？	126
2.44	常用的有理化因式有哪些？	128
2.45	为什么要推广指数的概念？	130
2.46	推广指数的原则是什么？	132
2.47	$(-8)^{-\frac{1}{3}} = -2$ 吗？	133
2.48	哪种计算 $0.0081^{-\frac{3}{4}}$ 的方法好？	135
2.49	为什么要定义无理指数幂？	136
* 2.50	怎样定义无理指数幂？	136
2.51	为什么规定对数的底数大于零且不等于1？	138
2.52	为什么利用对数能简化运算？	139
2.53	常用对数表是怎样编制出来的？	142
2.54	怎样把负对数化成负首数正尾数的形式？	143
2.55	什么是对数换底公式？	144
2.56	怎样比较两个表达式的大小？	146

第三章 方程(组)和不等式	149
3.1 “方程”和“元”这两个名词是怎样来的?	149
3.2 什么是表达式中字母的允许取值范围?	150
3.3 什么是方程中未知数的可能取值范围?	151
3.4 怎样求方程中未知数的可能取值范围?	152
3.5 方程的解与方程中未知数的可能取值范围有什么联系?	153
3.6 怎样判别一个等式是否为恒等式?	154
3.7 $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ 是方程还是恒等式?	155
3.8 $0 \cdot x = b$ (b 是字母系数)是方程吗?	156
3.9 恒等式是否就是恒等变形公式?	156
3.10 方程的同解变形以哪些定理为依据? 怎样证明?	157
3.11 恒等变形与同解变形有什么区别?	160
3.12 为什么要学习含字母系数的方程?	161
3.13 什么是配平方法,它为什么重要?	163
3.14 怎样证明韦达定理的逆定理?	166
3.15 韦达定理及其逆定理有何主要应用?	167
3.16 如何全面讨论一元二次方程的根的情况?	174
3.17 在讨论一元二次方程时, $\Delta \geq 0$ 的条件能省略 吗?	178
3.18 对方程进行变形时,在什么情况下会产生增根? 在什么 情况下会发生失根?	180
3.19 解分式方程,为什么可能产生增根,怎样排除增 根?	180
3.20 解分式方程能否省掉验根的步骤?	182
3.21 利用合分比定理来解分式方程,为什么会产生增根或失 根?	184
3.22 解根式方程时,为什么会产生增根?	187
3.23 怎样解含绝对值号的方程?	190
3.24 换元法用在哪些方面?	194
3.25 一元高次方程都有求根公式吗?	197

3.26	什么是代数基本定理?	198
3.27	方程组的同解变形定理有哪几个?	199
3.28	二元一次方程组一定有解吗?	203
3.29	用代入法解方程组会产生增解吗?	205
3.30	实系数二元二次方程组有几组解?	207
3.31	解第一类型的二元二次方程组有哪些常用技巧?	210
3.32	解第二类型的二元二次方程组有哪些常用技巧?	212
3.33	方程组里未知数的个数与方程的个数必须一样多吗?	214
3.34	解方程组时, 两个方程的左、右两端可以对应相除吗?	216
3.35	“甲或乙”与“甲且乙”的意义有什么区别?	218
3.36	应用题的代数解法与算术解法有什么区别与联系?	219
3.37	列方程解应用题时怎样设未知数?	222
3.38	怎样寻求应用题中的等量关系?	225
3.39	怎样用图示分析法列方程?	229
3.40	怎样用列表分析法列方程?	231
3.41	怎样解平均增长率问题?	234
3.42	不等式有哪些类?	235
3.43	不等式有哪些基本性质?	237
3.44	解不等式以哪些同解原理为依据?	239
3.45	怎样解不等式组?	240
3.46	什么是区间?	242
3.47	怎样表示一元不等式的解集?	243
3.48	怎样解一元二次不等式?	244
3.49	$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 与 $f(x) \cdot g(x) > 0$ 为什么同解?	247

3.50	解分式不等式能去分母吗?	250
3.51	在什么条件下, 解一元不等式时可以两边平方?	252
3.52	怎样用零值分段法解一元高次不等式?	255
3.53	怎样解含绝对值的不等式?	257
• 3.54	什么是“百鸡问题”?	259
第四章	函数	261
4.1	为什么说, 变量与常量这两个概念是相对的?	261
4.2	确定一个函数的基本要素是什么?	261
4.3	函数的记号 $f(x)$ 中, f 代表什么?	262
4.4	只能用一个解析式表示函数吗?	263
4.5	怎样求函数中自变量的取值范围(即定义域)?	264
4.6	怎样建立函数的解析式?	266
4.7	给出函数关系时, 不同的 x 可以对应相同的 y 吗?	270
4.8	函数和函数关系是一回事吗?	271
4.9	$f(x)$ 与 $f(a)$ 含义相同吗?	272
4.10	两个函数的和、差、积、商还是函数吗?	273
• 4.11	“函数的函数”还是函数吗?	274
4.12	函数概念是怎样演变发展的?	275
4.13	为什么说平面上的点和有序实数对之间是一一对应的?	277
4.14	直角坐标系上两个坐标轴的单位必须一致吗?	278
4.15	四个象限包括坐标轴吗?	278
4.16	线段的定比分点公式中的 λ 一定是正数吗?	278
4.17	怎样判断两个量是否成正比例或反比例?	279
4.18	为什么说正比例函数是正比例关系的推广?	282
4.19	怎样画一次函数的图象?	283
4.20	$x=2$ 是点, 还是直线?	285
4.21	怎样确定二次函数的表达式?	285
4.22	怎样求二次函数的极值?	287
4.23	函数的极值与最值的意义一样吗?	290

* 4.24	怎样求二次函数在闭区间上的最值?	292
4.25	是否所有的函数都能用描点连线法画近似图象?	296
4.26	自变量与函数的“位置”可以互换吗?	298
* 4.27	怎样求函数的值域?	299
4.28	初等函数包括哪些函数?	302

第一章 数

1.1 “0”表示“没有”吗？

“0”可以表示“没有”，但“0”和“没有”并不完全是一回事，“0”比其它一切数都有更丰富的内容。

尤其是在初中学过有理数之后，“0”的内容更加充实。

0既不是正数，也不是负数，它大于每一个负数，又小于每一个正数，所以0是全体正数与全体负数之间唯一的分界点。它不带符号，是唯一的中性数。

在实际问题中，常常用0代表研究问题的一个起点，从而赋予数0实在的意义。例如，在物理学中，将水结冰的温度定为0度；在地理学中，将通过英国格林威治天文台的经线定为0度；在测量学中，我国将青岛的黄海海面定为海拔0米。

在近似计算中，还常常用0表示近似值的精确程度。例如，近似数6.0、6.00、6.000分别表示它们与准确数的绝对误差小于0.05、0.005、0.0005。

0的内容不但充实，而且还在不断地发展着。

1.2 0是偶数吗？

在小学里，我们在谈到奇数与偶数时，所考虑的范围是自然数。因为0不属于自然数，所以不存在0是不是偶数的问题。

在中学里，我们在谈到奇数与偶数时，所考虑的范围是全体整数（由全体正整数、全体负整数和0组成）。凡是被2整除的整数都叫做偶数，否则叫做奇数。因为 $0 \div 2 = 0$ ，即0能被2整除，所以0是偶数。

1.3 +、-、 $\times$ 、 $\div$ 符号是怎样产生的？

+、-、 $\times$ 、 $\div$ 这些常用的数学符号，是随着人类的数学知识的逐渐丰富而产生的。这些符号经过多次的改进和变化而逐渐形成，最早曾用各种文字和字母来表示，后来逐渐改用符号来表示，但各国使用的符号很不一致，直到十八世纪才统一起来。

符号“+”是由拉丁文“et”演变而来，原字就是“and”，是增加的意思。符号“-”先由拉丁文“minus”缩写成m，后又略去字母m演变而来。“+”、“-”两个符号最初用于商业，分别表示“盈余”和“不足”。后来才表示“加”与“减”。

在正式出版的数学书中，第一次出现“+”“-”符号的，是1489年莱比锡出版的德国数学家维特曼著的《简算和速算》一书。

乘除符号比加减符号产生较晚。

符号“ $\times$ ”是1631年由英国数学家奥特雷德提倡使用的。由于“ $\times$ ”易与拉丁字母“x”相混，十七世纪末经数学家莱布尼兹提出改用“ $\cdot$ ”。“ $\cdot$ ”这个符号是数学家赫锐奥特首创的，后来“ $\times$ ”与“ $\cdot$ ”这两个符号同时并用。一般数字的乘法用“ $\times$ ”，而数字与字母或字母之间相乘用“ $\cdot$ ”。

符号“ $\div$ ”曾在欧洲大陆流行很长时间，但一直作为减

法符号，至于作为除法符号，也是1631年由英国数学家奥特雷德提倡使用的。当时还有用“:”表示除或比，用“ $\frac{a}{b}$ ”的除线表示除的。后来有人把这两个符号合在一起，变成了“÷”。但正式把“÷”作为除法运算的符号，那是在1659年瑞士数学家拉哈所著的一本代数学著作里出现的。

1.4 =、>、< 符号是怎样产生的？

关于等号，韦达最初曾用“ $\sim$ ”表示，笛卡尔采用“ ∞ ”表示，而现在通用的符号“=”是1557年由剑桥的英国数学家利科特引入的。他曾说他所知道的最相象的两件东西是两条平行线，所以这两条平行线应当用来表示相等。但直到十七世纪才真正为数学家公认并普遍使用。

大于号“>”及小于号“<”于公元1631年由英国代数学数学家赫锐奥特首创。至于“ $\lessgtr$ ”、“ $\lessdot$ ”、“ $\lessapprox$ ”这三个符号的出现则是近代的事了。

1.5 “ $\sqrt{\quad}$ ”是怎样产生的？

1220年意大利数学家斐波那契第一次使用“R”表示平方根号。这个符号是从拉丁文Radix取头尾两个字母合并得来。十七世纪初叶，法国数学家笛卡尔在他的著作《几何学》中，第一次用“ $\sqrt{\quad}$ ”表示根号。这个符号包括“ $\sqrt{\quad}$ ”和“—”两部分。“ $\sqrt{\quad}$ ”是由拉丁文的“r”演变而来，它的原词是root，表示方根的意思；上面的短线“—”是括线，相当于现在常用的括号。如 $\sqrt{a+b}+c$ 表示先求 $a+b$ 的平方根再加 c 。所以“ $\sqrt{\quad}$ ”既有结合符号的意思，又有运算符号的意思。

另外，三次方根符号“ $\sqrt[3]{\quad}$ ”是德国数学家鲁道夫在1525年首先使用的。到了十七世纪，法国人将它改为“ $\sqrt[3]{\quad}$ ”，这就是今天我们使用的开立方的符号了。

1.6 常用的记数制有哪几种？

人们在生产和生活中，最常用的是十进制。十进制的产生与人有十个手指有关。十进制就是平时说的“逢十进一”。在十进制记数法中，表示数的每个数字，不但有它本身的符号意义，而且还有它占据的位置意义。例如，

3	1	5	2
千	百	十	个
位	位	位	位

意思是三千一百五十二。由于十进制的这个特点，所以使用起来非常方便。

其次是60进制，即“逢六十进一”。时间单位中常用六十进制，60秒为1分，60分为1小时。角度单位中也常用六十进制，60″为1′，60′为1°。

在电子计算机中，常用的是二进制。二进制是“逢二进一”。所以二进制中只有两个数码0和1。因为电子计算机没有十个手指，只有通电和断电两种状态，可以用“通电”表示“1”，“断电”表示“0”。十进制中1~10十个数码在二进制中的对应值如下：

十进制	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
二进制	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

在电子计算技术中，还常使用八进制，即“逢八进一”。在八进制中，只有八个数字：0、1、2、3、4、5、6、7。十