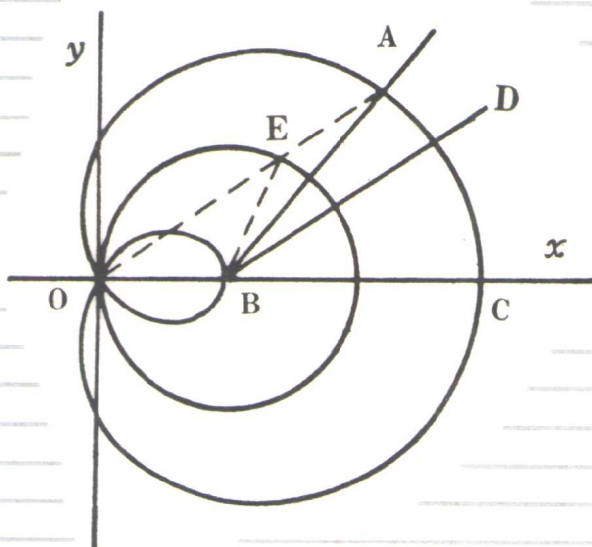


· 董季兰 ·

# 实用数学公式手册



河北科学技术出版社

# 实用数学公式手册

董季兰

---

河北科学技术出版社

# 实用数学公式手册

董季兰

---

河北科学技术出版社出版发行 (石家庄市北马路45号)

河北新华印刷一厂印刷

---

850×1168毫米 1/32 16.75 印张 400,000 字 1988年2月第1版  
1988年2月第1次印刷 印数: 1-5150 定价: 4.35元

ISBN 7-5375-0027-4/N·1

# 前 言

本书可供各类工程技术人员、大专院校师生以及中等学校数理教师研究、计算、参考之用。这本书和大型数学手册性质有所不同；它不是各种数学的综述与总结，而是为使用者提供各项所需的公式和曲线。凡属理论推演、数值计算所必需的算式和方法，尽可能齐全；分类编排，查阅方便，既节省了时间，又提高了工作效率。

书中包容的资料，是作者在多年的科学工作中，遇到数学问题而搜求的结果。既至解决问题之后，就把所用资料记载下来，年长日久，蔚然成集，渐至遇到相应问题，不必他求，一翻即得，成为自写自用的良师益友。既有所成，加以整理增益，毅然付梓，供同行者参考。

由于本书资料积累时间长，涉及范围广；编写中不仅查阅了各类数学书籍，更追踪到各种科学专著以及作者个人论述，有些资料甚至国内书中也不易查到。书中内容并非依照一般数学观点求多，求全，而是在研究中蓄集，着重实用，也可以说是本书的一个特点。

全书包括初等数学、高等数学、工程数学、特殊函数等数学公式和方法 1600 余条；微分积分公式 1700 余条，约 4000 多个式子。书后附有各种实用常数、数据，并附一些短缺而十分有用的特殊函数表，供计算时使用。

由于科技数学包容广泛，科学进步日新月异，限于作者水平

和能力，缺点和不妥之处在所难免，望海内专家及热心读者不吝指教，以便再版时更正。

作者

1986年12月

# 目 录

## 第一部分 数学公式

§ 1 代数函数	( 1 )
一、二项式定理	( 1 )
二、因式	( 4 )
三、代数级数	( 5 )
四、函数的展开	( 9 )
五、反级数	( 11 )
六、级数的乘方	( 11 )
七、伯努利(Bernoulli)数和欧拉(Euler)数	( 12 )
八、二次方程式的根和复数的平方根	( 13 )
九、三次方程式的根	( 14 )
十、四次方程式的根	( 17 )
十一、多元一次方程式的解	( 17 )
十二、行列式	( 18 )
十三、矩阵	( 22 )
§ 2 三角函数	( 29 )
一、基本恒等式	( 29 )
二、和差与积商	( 30 )
三、倍角公式	( 33 )
四、半角公式	( 35 )
五、高次方公式	( 36 )
六、三角函数的级数和	( 37 )

七、三角函数的代数级数 .....	( 38 )
八、平面三角形 .....	( 39 )
九、球面三角形 .....	( 41 )
十、三角函数的周期和一些函数值 .....	( 45 )
十一、三角函数和指数函数的关系 .....	( 49 )
十二、虚数和复数的三角函数 .....	( 49 )
§ 3 反三角函数 .....	( 50 )
一、恒等式 .....	( 50 )
二、反三角函数的代数级数 .....	( 55 )
三、复数的反三角函数 .....	( 56 )
§ 4 指数函数 .....	( 57 )
§ 5 对数函数 .....	( 59 )
§ 6 傅里叶(Fourier)级数 .....	( 63 )
一、基本公式 .....	( 63 )
二、各种波形或函数的傅里叶(Fourier)级数 .....	( 65 )
三、只有曲线而没有方程式的周期函数 .....	( 79 )
§ 7 平面多边形 .....	( 95 )
一、三角形 .....	( 95 )
二、矩形 .....	( 96 )
三、菱形 .....	( 97 )
四、梯形 .....	( 98 )
五、平行四边形 .....	( 98 )
六、任意四边形 .....	( 99 )
七、正多边形 .....	( 99 )
§ 8 平面曲线 .....	(104)
一、坐标变换 .....	(104)
二、直线 .....	(105)
三、圆 .....	(109)
四、抛物线 .....	(111)
五、椭圆 .....	(113)

六、双曲线	(115)
七、一般二元二次方程式所代表的曲线	(117)
八、其他平面曲线	(118)
九、微分学在平面曲线中的应用	(138)
§ 9 双曲线函数	(141)
一、基本方程式	(141)
二、和差与积商	(142)
三、倍角公式	(144)
四、半角公式	(146)
五、高次方公式	(147)
六、双曲线函数的级数和	(149)
七、双曲线函数的代数级数	(149)
八、连分式用双曲线函数表示	(151)
九、双曲线函数和三角函数的复合公式	(152)
十、双曲线函数的虚周期	(152)
十一、双曲线函数的极限值	(154)
十二、双曲线函数和指数函数的关系	(154)
十三、虚数和复数的双曲线函数	(154)
十四、双曲线函数与三角函数乘积的代数级数	(155)
十五、双曲线函数的曲线	(156)
§ 10 反双曲线函数	(158)
一、恒等式	(158)
二、反双曲线函数的代数级数	(162)
三、虚数及复数的反双曲线函数	(163)
四、反双曲线函数的曲线	(165)
§ 11 古德曼(Gudermann)函数	(167)
一、基本关系式	(167)
二、极限数值	(167)
三、级数展开	(167)
四、反古德曼(Gudermann)函数	(168)



五、函数曲线 .....	(168)
§ 12 椭圆函数 .....	(169)
一、不完全椭圆积分 .....	(169)
二、完全椭圆积分 .....	(175)
§ 13 伽马( $\Gamma$ )函数、高斯(Gauss)函数和贝塔( $\beta$ )函数 .....	(179)
§ 14 立体 .....	(182)
一、直立方体 .....	(182)
二、柱体 .....	(182)
三、锥体 .....	(183)
四、锥台 .....	(183)
五、球 .....	(184)
六、圆环 .....	(185)
七、正多面体 .....	(185)
§ 15 空间图形 .....	(188)
一、距离和方向 .....	(188)
二、平面 .....	(189)
三、曲面 .....	(191)
四、直线 .....	(194)
五、直线与平面间的相互关系 .....	(195)
六、空间曲线 .....	(196)
七、旋转面 .....	(197)
八、曲面的体积和面积 .....	(198)
九、曲面坐标 .....	(199)
§ 16 向量分析 .....	(203)
一、一般公式 .....	(203)
二、曲面坐标中的一般公式 .....	(207)
三、圆柱面坐标 .....	(208)
四、球面坐标 .....	(208)
五、长椭球坐标 .....	(209)

六、扁椭球坐标 .....	(210)
七、椭球面坐标 .....	(211)
§ 17 微分方程式 .....	(212)
§ 18 勒让德(Legendre)函数 .....	(219)
一、第一类及第二类勒让德(Legendre)函数 .....	(219)
二、虚数的勒让德(Legendre)函数 .....	(224)
三、伴随函数 .....	(226)
四、 $x = \cos\theta$ 的情形 .....	(229)
§ 19 贝塞尔(Bessel)函数 .....	(231)
一、第一类及第二类贝塞尔(Bessel)函数 .....	(231)
二、第一类及第二类贝塞尔(Bessel)函数的渐近级数 .....	(234)
三、第一类及第二类贝塞尔(Bessel)函数的递推公式 .....	(236)
四、关于第一类及第二类贝塞尔(Bessel)函数的其它公式 .....	(238)
五、变型贝塞尔(Bessel)函数 .....	(238)
六、变型贝塞尔(Bessel)函数的渐近级数 .....	(241)
七、变型贝塞尔(Bessel)函数的递推公式 .....	(242)
八、汉克尔(Hankel)函数 .....	(244)
九、半虚微角的贝塞尔(Bessel)函数(第一类开尔文[Kelvin] 函数] .....	(247)
十、第一类开尔文(Kelvin)函数的递推公式 .....	(251)
十一、第二类开尔文(Kelvin)函数 .....	(252)
十二、第二类开尔文(Kelvin)函数的递推公式 .....	(257)
十三、贝塞尔(Bessel)方程式的其它形式 .....	(257)
十四、虚微角和半虚微角的汉克尔(Hankel)函数 .....	(258)
§ 20 拉普拉斯(Laplace)方程式的解 .....	(258)
一、直坐标 .....	(258)
二、圆柱面坐标 .....	(259)
三、球面坐标 .....	(261)
四、长椭球坐标 .....	(262)
五、扁椭球坐标 .....	(263)

六、椭球面坐标 .....	(263)
§ 21 简单差分方程式 .....	(265)
一、差分学的算子 .....	(265)
二、差分算子和微分算子的关系 .....	(266)
三、常数线性差分方程式 ( $h=1$ ) .....	(267)

## 第二部分 导数和积分公式

§ 1 导数和积分的一般公式 .....	(269)
一、函数的导数 .....	(269)
二、积分式的导数 .....	(270)
三、函数之函数的导数 .....	(270)
四、多变量函数的偏导数 .....	(271)
五、积分的一般公式 .....	(273)
§ 2 代数函数的导数和积分 .....	(274)
<b>导数</b> .....	(274)
<b>积分</b> .....	(274)
一、 $x^n$ 的积分 .....	(274)
二、含有 $X = a + bx$ 的函数 .....	(275)
三、含有线性因式 .....	(279)
四、含有 $Y = a^2 + b^2x^2$ 的函数 .....	(281)
五、含有 $Z = a^2 - b^2x^2$ 的函数 .....	(285)
六、含有 $U = ax^2 + bx + c$ 的函数 .....	(290)
七、含有 $S = a^3 + b^3x^3$ 的函数 ( $b$ 值可正可负) .....	(294)
八、含有 $a^4 \pm x^4$ 的函数 .....	(296)
九、含有 $x^{1/2}$ 的函数 .....	(296)
十、含有 $u = (a + bx)^{1/2}$ 的函数 .....	(299)
十一、含有 $x^{1/2} = (a + bx)^{1/2}$ 和 $U^{1/2} = (f + gx)^{1/2}$ 的函数 .....	(303)
十二、含有 $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ 的函数 .....	(305)
十三、含有 $s = \sqrt{x^2 - a^2}$ 的函数 .....	(314)
十四、含有 $t = \sqrt{a^2 - x^2}$ 的函数 .....	(323)

十五、含有 $w = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 的函数 .....	(333)
十六、含有 $w = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 和 $v = f + gx$ 的函数 .....	(337)
十七、其它代数函数 .....	(341)
十八、定积分 .....	(343)
十九、椭圆积分 .....	(345)
§ 3 椭圆函数的导数和积分 .....	(350)
<b>导数</b> .....	(350)
<b>积分</b> .....	(351)
§ 4 三角函数的导数和积分 .....	(354)
<b>导数</b> .....	(354)
<b>积分</b> .....	(355)
一、含有 $\sin x$ 的函数 .....	(355)
二、含有 $\cos x$ 的函数 .....	(364)
三、含有 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的函数 .....	(374)
四、含有 $\tan x$ 的函数 .....	(385)
五、含有 $\cot x$ 的函数 .....	(386)
六、三角函数积分的一般公式 .....	(388)
七、定积分 .....	(389)
§ 5 反三角函数的导数和积分 .....	(393)
<b>导数</b> .....	(393)
<b>积分</b> .....	(394)
§ 6 双曲线函数的导数与积分 .....	(403)
<b>导数</b> .....	(403)
<b>积分</b> .....	(404)
一、含 $\operatorname{sh} x$ 的函数 .....	(404)
二、含 $\operatorname{ch} x$ 的函数 .....	(407)
三、含 $\operatorname{sh} x$ 及 $\operatorname{ch} x$ 的函数 .....	(412)
四、含 $\operatorname{th} x$ 及 $\operatorname{cth} x$ 的函数 .....	(415)
五、含有双曲线函数及三角函数 .....	(416)
六、定积分 .....	(416)

§ 7 反双曲线函数的导数和积分 .....	(417)
<b>导数</b> .....	(417)
<b>积分</b> .....	(417)
§ 8 指数函数的导数和积分 .....	(425)
<b>导数</b> .....	(425)
<b>积分</b> .....	(425)
一、含有指数函数和代数函数 .....	(425)
二、含有指数函数和三角函数 .....	(428)
三、定积分 .....	(432)
§ 9 对数函数的导数和积分 .....	(435)
<b>导数</b> .....	(435)
<b>积分</b> .....	(435)
一、有理代数函数的对数 .....	(435)
二、其它函数和对数的积分 .....	(441)
三、定积分 .....	(442)
§ 10 贝塞尔(Bessel)函数的积分公式 .....	(445)
一、一般积分 .....	(445)
二、定积分 .....	(446)
附录一 各种常数 .....	(447)
附录二 素数表 .....	(449)
附录三 科学数据 .....	(450)
(一) 国际单位制的 7 个基本单位 .....	(450)
(二) 物理常数 .....	(450)
(三) 天文数据 .....	(451)
(四) 太阳数据 .....	(452)
(五) 月球数据 .....	(452)
(六) 地球数据 .....	(452)
(七) 长度关系 .....	(453)
附录四 特殊函数表 .....	(454)

(一) 第 1 类不完全椭圆积分表 .....	(454)
(二) 第 2 类不完全椭圆积分表 .....	(460)
(三) 完全椭圆积分表 .....	(464)
(四) 勒让德 (Legendre) 函数 $P_n(x)$ .....	(469)
(五) 勒让德 (Legendre) 函数 $P_n(\theta)$ .....	(471)
(六) 贝塞尔 (Bessel) 函数 .....	(473)
(七) 变型贝塞尔 (Bessel) 函数 .....	(487)
(八) 第 1 类开尔文 (Kelvin) 函数 .....	(497)
(九) 第 2 类开尔文 (Kelvin) 函数 .....	(507)
(十) 伽马 ( $\Gamma$ ) 函数 $\Gamma(x)$ .....	(517)
(十一) 古德曼 (Gudermann) 函数 .....	(520)
(十二) 反古德曼 (Gudermann) 函数 .....	(522)

# 第一部分 数学公式

## §1 代数函数

### 一、二项式定理

1. 设  $n =$  正整数,

$$(x \pm y)^n = x^n \pm nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 \\ \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \dots + (\pm 1)^ny^n.$$

2. 1 式中  $x^{n-r}y^r$  的系数是 (不包括前面的正负号)

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-1+r)}{r!}.$$

3.  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$

4.  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$

5.  $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$

6. 一些二项式系数  $C_n^r$  的值列表于下。左纵列代表  $n$ , 上横行代表  $r$ . 表中同一横行内, 任意相邻两数之和等于右边一数紧下边的数值。(见二项式系数表)

## 二项式系数表

n \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

7.  $(a \pm x)^n = a^n \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^n$ ,  $n =$  任意数,  $x^2 \leq a^2$ .

8.  $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$ ,

$n =$  任意实数.

若  $n =$  正整数, 等号右边共  $n + 1$  项; 若  $n \neq$  正整数, 右边是一无穷级数, 当  $x^2 < 1$  时是收敛级数.

9.  $(1 \pm x)^{1/4} = 1 \pm \frac{x}{4} - \frac{1 \cdot 3x^2}{4 \cdot 8} \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 7x^3}{4 \cdot 8 \cdot 12} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11x^4}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} \pm \dots$ .

10.  $(1 \pm x)^{1/3} = 1 \pm \frac{x}{3} - \frac{1 \cdot 2x^2}{3 \cdot 6} \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5x^3}{3 \cdot 6 \cdot 9} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8x^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} \pm \dots$ .

11.  $(1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{1 \cdot 1x^2}{2 \cdot 4} \pm \frac{1 \cdot 1 \cdot 3x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \pm \dots$ .



$$12. (1 \pm x)^{3/2} = 1 \pm \frac{3x}{2} + \frac{3 \cdot 1x^2}{2 \cdot 4} \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \\ \mp \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \dots$$

$$13. (1 \pm x)^{5/2} = 1 \pm \frac{5x}{2} + \frac{5 \cdot 3x^2}{2 \cdot 4} \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \\ \pm \frac{5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \dots$$

以上 9 至 13 式中,  $x^2 \leq 1$ .

$$14. (1 \pm x)^{-n} = 1 \mp nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} \\ + \dots + (\mp 1)^r \frac{(n+r-1)!x^r}{(n-1)!r!} + \dots, x^2 < 1.$$

$$15. (a \pm x)^{-n} = a^{-n} \left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^{-n}, x^2 < a^2.$$

$$16. (1 \pm x)^{-1/4} = 1 \mp \frac{x}{4} + \frac{1 \cdot 5x^2}{4 \cdot 8} \mp \frac{1 \cdot 5 \cdot 9x^3}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13x^4}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} \\ \mp \dots$$

$$17. (1 \pm x)^{-1/3} = 1 \mp \frac{x}{3} + \frac{1 \cdot 4x^2}{3 \cdot 6} \mp \frac{1 \cdot 4 \cdot 7x^3}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10x^4}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} \\ \mp \dots$$

$$18. (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3x^2}{2 \cdot 4} \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \mp \dots$$

$$19. (1 \pm x)^{-3/2} = 1 \mp \frac{3x}{2} + \frac{3 \cdot 5x^2}{2 \cdot 4} \mp \frac{3 \cdot 5 \cdot 7x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9x^4}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \mp \dots$$