

学习高等数学指导 备考硕士研究生指南

高等数学

解题方法技巧归纳

(上册)

毛纲源

华中科技大学出版社

学习高等数学指导 备考硕士研究生指南

高等数学解题方法技巧归纳

(上册)

毛纲源

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法技巧归纳(上册)/毛纲源
武汉:华中科技大学出版社, 2001年8月
ISBN 7-5609-2501-4

I. 高…

II. 毛…

III. 高等数学-解题方法-教辅教材

IV. O13

高等数学解题方法技巧归纳(上册)

毛纲源

责任编辑:李立鹏

封面设计:刘 丹

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司

印 刷:湖北省安陆市印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:16.25

字数:390 000

版次:2001年8月第1版 印次:2002年1月第2次印刷

印数:5 001—10 000

ISBN 7-5609-2501-4/O · 232

定价:18.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前 言

《线性代数解题方法技巧归纳》(第二版)与《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》出版后,深受读者欢迎,多次印刷,畅销全国.应广大读者要求,现分上、下两册出版《高等数学解题方法技巧归纳》.

高等数学(即微积分)是高校理工科最主要的基础课之一.学生对它掌握得如何,不仅直接关系到后继课程的学习,而且对今后的提高与发展,以及工作中的贡献,都有着深远的影响.为帮助广大学生和自学者学好高等数学,为给他们备攻研究生提供一份复习资料,编写了这套《高等数学解题方法技巧归纳》上、下两册.

同前两本书一样,本书将高等数学的主要内容按问题分类,通过引例归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧.它不同于一般的教科书和习题解答,自具特色.

本书注意一题多解,注意分析各种解题方法的特点与联系,分析题中条件与所得结果之间的联系,灵活地将解题方法技巧与所学基本理论联系起来.这样不仅可以培养读者的灵活思维能力,达到举一反三、触类旁通的学习效果,而且在学会解题的同时,也必将提高分析问题和解决问题的能力.

本书还注意各种重要题型的解法技巧的总结归纳.试题是无限的,而题型是有限的,只有掌握好各类题型的解法技巧,才能以不变应万变,找到解题的切入点和突破口.

此外,还在不少例后加写“注意”部分,内容涉及基本概念和基本理论的深入理解;解题方法小结及常见错误的剖析;某些例中结论的推广等.

本书实例较多,且类型广、梯度大.例题和习题中一部分取材

于面向 21 世纪课程新教材《微积分》(上册)(同济大学应用数学系编,高等教育出版社,2000 年 1 月出版)中的典型习题;另一部分取材于直至 2001 年的历届全国攻读硕士研究生入学考试数学试卷一、二的考题.

需查找同济大学编《微积分》中习题解答的读者,可参看书末附录.

考研试题既反映了“数学考试大纲”对考生的要求,又蕴涵着在大纲指导下的命题思想.通过考研题的研讨,使有志攻读硕士学位的学生“平战结合”,了解考研试题的特点及其逐年发展趋势,从知识上、题型上、方法和技巧上作好应试准备.若把这些考研试题全部理解消化,将为考研成功打下坚实的基础.

考研试题并非都是难题,其突出特点是全面、准确地体现数学教学大纲和考研大纲的要求.多做考题并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧,无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力以及加深对高等数学基础知识的理解是大有好处的.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习高等数学(微积分)时阅读和参改;对于自学者和有志攻读硕士学位的青年,本书更是良师益友;对于从事高等数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值.

编写本书时,参阅了有关书籍,引用了一些例子,恕不一一指明出处.在此一并向有关作者致谢.

尽管作者有过多年从事高等数学和考研数学辅导班的教学实践,但由于水平有限,加之时间仓促,书中难免有不足和错误之处,恳请读者不吝指正.

毛纲源

2001 年 2 月于武汉理工大学西院

目 录

第一章 一元函数	(1)
§ 1.1 函数定义域的求法	(1)
§ 1.2 几类函数表示式的求法	(7)
§ 1.3 两类反函数的求法	(14)
§ 1.4 函数奇偶性及非奇非偶性的证法	(21)
第二章 极限与连续	(29)
§ 2.1 极限定义的几点应用	(29)
§ 2.2 子数列极限在讨论极限时的应用	(36)
§ 2.3 可用夹逼准则求极限的几类函数	(44)
§ 2.4 通项由递推关系给出的数列极限的求法	(51)
§ 2.5 无限项之和与之积的极限求法	(60)
§ 2.6 求极限时必须考察左、右极限的几种函数	(68)
§ 2.7 如何利用等价无穷小计算极限	(74)
§ 2.8 幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ ($f(x) \neq 1$) 的极限的求法	(82)
§ 2.9 无穷小的阶的比较方法及其求法	(88)
§ 2.10 已知极限值, 极限中待求常数的求法	(97)
§ 2.11 如何讨论函数的连续性	(105)
§ 2.12 函数间断点及其所属类型的判别方法	(113)
§ 2.13 闭区间上连续函数性质的应用	(120)
第三章 导数与微分	(130)
§ 3.1 导数定义的几点应用	(130)
§ 3.2 分段函数与含绝对值函数可导性的判别及其导数的求法	(137)
§ 3.3 对数求导法及其应用	(147)
§ 3.4 高阶导数的求法	(151)
§ 3.5 隐函数的导数的求法	(160)

§ 3.6 参数式函数的导数的求法	(165)
§ 3.7 导数的几何意义和物理意义的应用	(172)
§ 3.8 微分的求法	(183)
第四章 中值定理及导数的应用	(189)
§ 4.1 中值等式命题的证法	(189)
§ 4.2 中值不等式命题的证法	(199)
§ 4.3 区间上成立的函数不等式的证法	(205)
§ 4.4 数值不等式的证法	(219)
§ 4.5 利用洛必达法则求极限的若干方法与技巧 ...	(225)
§ 4.6 函数单调性的证法	(234)
§ 4.7 函数极值和最值的求法	(240)
§ 4.8 解最值应用题应注意的几个问题	(249)
§ 4.9 拐点的判别与求法	(258)
§ 4.10 渐近线的求法	(268)
§ 4.11 利用函数的性态讨论方程根的个数	(275)
第五章 不定积分	(283)
§ 5.1 与原函数有关的几个问题的解法	(283)
§ 5.2 用凑微分法求不定积分的常见类型	(292)
§ 5.3 用分部积分法求分式函数不定积分的技巧 ...	(301)
§ 5.4 有理函数积分的算法	(308)
§ 5.5 三角函数有理式积分的求法	(314)
§ 5.6 简单无理函数的不定积分的求法	(324)
第六章 定积分	(334)
§ 6.1 利用定积分定义求极限	(334)
§ 6.2 简化定积分计算的若干方法和技巧	(339)
§ 6.3 分段函数(含绝对值函数)的定积分的算法 ...	(346)
§ 6.4 变限积分的导数及其定积分的算法	(354)
§ 6.5 含有变限积分或定积分的极限的求(证)法 ...	(361)
§ 6.6 变限积分性质的讨论与证明	(370)

§ 6.7 与定积分或变限积分有关的方程,其根存在性的证法	(377)
§ 6.8 几个常用定积分公式的证法及其在简化计算中的应用	(387)
§ 6.9 定积分不等式的证法	(397)
§ 6.10 几类反常积分敛散性的判别	(412)
第七章 定积分的应用	(426)
§ 7.1 用定积分计算平面图形面积的方法	(426)
§ 7.2 与计算平面图形面积有关的几类综合题的解法	(432)
§ 7.3 利用定积分计算体积的方法	(444)
§ 7.4 与计算平面曲线弧长有关的几类题型的解法	(461)
§ 7.5 定积分的物理应用举例	(469)
习题答案或提示	(480)
附录(同济大学编《微积分》部分习题解答查找表)	(508)

第一章 一元函数

§ 1.1 函数定义域的求法

若函数单用数学式子表示,又不考虑其实际意义,这时约定其定义域就是使该数学式子有意义的一切实数组成的集合,且称为该函数的自然定义域,以下简称定义域.下面介绍函数定义域的求法.

一 排除法

常用“排除法”求解,即去掉使数学式子没有意义的自变量的取值部分,就得到该函数的定义域.常用以下几条法则去掉之.

(1)函数式中如果有分式,分式中分母不能为零;

(2)函数式中如果有偶次根式,根号下的被开方数非负,即应大于或等于零;

(3)函数式中如有对数符号,对数式的真数不能为负和零,即应大于零;

(4)函数式中如有反正弦或反余弦函数,则在反正弦或反余弦下的函数式,其绝对值不能大于1;

(5)函数式中如有正切或余切函数,则在正切或余切符号下的函数式的值分别不能等于 $k\pi + \pi/2, k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

例 1 [预 5(4)]* 求函数 $y = \frac{1}{[x+1]}$ 的自然定义域.

• [预 5(4)]表示该例(或该习题)是《微积分》预备知识这部分的习题第 5 题的第 4 小题.下同.

解 因当 $-1 \leq x < 0$ 时, 根据整函数的定义有 $[x+1]=0$, 由排除法知函数 $y = \frac{1}{[x+1]}$ 的自然定义域为去掉 $-1 \leq x < 0$ 的任意实数的集合, 即为 $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$.

例 2 求下列函数的定义域:

(1) $y = 1/(\sin x - \cos x)$; (2) $y = \lg(\cos \lg x)$;

(3) $y = \arcsin[\lg(x/10)]$.

解 (1) 因 $x = \pi/4 + n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时 $\sin x - \cos x = 0$, 故 y 的定义域为 $x \neq \pi/4 + n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的一切实数.

(2) y 的定义域必使 $\cos(\lg x) > 0$, 因而必有

$$(2k-1/2)\pi < \lg x < (2k+1/2)\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

由此解得 x 必须满足

$$10^{(2k-1/2)\pi} < x < 10^{(2k+1/2)\pi} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

此为 y 的定义域.

(3) 当 $-1 \leq \lg(x/10) \leq 1$ 时, y 有意义, 解之得到

$$-1 \leq \lg x - \lg 10 = \lg x - 1 \leq 1, 0 \leq \lg x \leq 2, 1 \leq x \leq 10^2,$$

故 $1 \leq x \leq 10^2$ 为 y 的定义域.

例 3 求函数 $y = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x-3}}$ 的定义域.

解 由 $\frac{x^2-3x+2}{x-3} \geq 0, x-3 \neq 0$ 可推出所求定义域为

$$D(y) = \{x | (x-1)(x-2)(x-3) \geq 0, x \neq 3\}.$$

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
$x-1$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	+
因子乘积	-	+	-	+

乘积为 + 的区间为 $(1, 2)$ 与 $(3, +\infty)$, 所求定义域为 $[1, 2] \cup (3, +\infty)$.

二 交集法

用交集法求定义域的函数,常见的有下述两种类型.

(1) 经四则运算组成的函数

若函数的表示式由几个函数经四则运算所组成,则其定义域是各函数定义域的交集(公共部分).为求出此交集,应根据各个函数的限制条件列出不等式组,其公共解就是所求的定义域.

正确求出这类函数的定义域的关键在于以下几点:

- (1) 搞清五类基本初等函数的定义域;
- (2) 记住分式函数的分母不能等于零;
- (3) 熟练掌握解不等式(组)的方法.

例4 [预5(3)]求函数 $y=1/(1-x^2)+\sqrt{x+1}$ 的定义域.

解 要使 y 有意义,必有 $1-x^2 \neq 0$, 且 $x+1 \geq 0$. 其交集 $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0; \\ x+1 \geq 0, \end{cases}$ 即为所求的定义域,解之得到 $\begin{cases} x \neq \pm 1; \\ x \geq -1, \end{cases}$ 即所求的定义域为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

例5 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x}/\sin \pi x$; (2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

解 (1) 所求的定义域为 $x > 0$, 且 $x \neq n (n=1, 2, \dots)$, 即 $x \in (n-1, n) (n=1, 2, 3, \dots)$.

(2) 所求的定义域为 $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 且 $-4 \leq x \leq 4$. 即为 $x \in [-4, -\pi) \cup (0, \pi]$.

(II) 复合函数

一般, 设 $f(x)$ 的定义域为 D_f , $g(x)$ 的定义域是 D_g , 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域是 $D=D_g \cap \{x|g(x) \in D_f\}$.

例6 求函数 $f(x)=\arccos \sqrt{x/(2x-1)}$ 的定义域.

解 设 $g(x)=\sqrt{x/(2x-1)}$, 则 $f=\arccos g(x)$ 为复合函数.

由 $\begin{cases} x/(2x-1) \geq 0; \\ x \neq 1/2, \end{cases}$ 得到 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x \leq 0$, 故

$$D_g = (-\infty, 0] \cup (1/2, +\infty).$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \{x | g(x) = \sqrt{x/(2x-1)} \in D_f\} \\ &= \{x | \{-1 \leq \sqrt{x/(2x-1)} \leq 1\} \\ &= \{x | 0 \leq \sqrt{x/(2x-1)} \leq 1\}.\end{aligned}$$

不等式 $0 \leq \sqrt{x/(2x-1)} \leq 1$ 的解集易求得为 $(-\infty, 0]$ 或 $[1, +\infty)$, 故

$$\{x | g(x) \in D_f\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).$$

$$\begin{aligned}\text{因 } D_g \cap \{x | g(x) \in D_f\} &= \{(-\infty, 0] \cup (1/2, +\infty)\} \\ &\cap \{(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\} = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty).\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $x \geq 1$ 或 $x \leq 0$.

例 7 设 $f(x) = (x-1)(7-x)$, $0 \leq x \leq 8$. 求 $f[f(x)]$ 的定义域.

解 为方便计, 设内层的 $f(x) = g(x)$, 则 $D_g = D_f = [0, 8]$.

$$\text{又 } \{x | g(x) \in D_f\} = \{x | 0 \leq g(x) \leq 8\} = \{x | 0 \leq f(x) \leq 8\}.$$

而当 $f(x) \geq 0$, 即 $(x-1)(7-x) \geq 0$ 时, 有 $1 \leq x \leq 7$;

当 $f(x) \leq 8$, 即 $(x-1)(7-x) \leq 8$ 时, 有 $x \leq 3$ 或 $x \geq 5$, 因而

$$\{x | g(x) \in D_f\} = \{(-\infty, 3] \cup [5, 8]\} \cap [1, 7] = [1, 3] \cup [5, 7],$$

$$D_g \cap \{x | g(x) \in D_f\} = [0, 8] \cap \{[1, 3] \cup [5, 7]\} = [1, 3] \cup [5, 7],$$

即 $f[f(x)]$ 的定义域为 $D = [1, 3] \cup [5, 7]$.

三 代入法

已知 $f(x)$ 的定义域, 用代入法可求出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例如, 设 $f(x)$ 的定义域为 $a < x < b$, 将 $\varphi(x)$ 替换不等式中的 x , 得到 $a < \varphi(x) < b$, 由此解出 x , 即得 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例 8 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 3]$, 求 $g(x) = f[\tan^2 x]$ 的定义域.

解 将 $\tan^2 x$ 代入 $0 \leq x \leq 3$ 中的 x 得到 $0 \leq \tan^2 x \leq 3$.
由 $\tan^2 x \leq 3$, 得到 $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq \sqrt{3}$, 因而

$$\tan(-\pi/3) \leq \tan x \leq \tan(\pi/3).$$

由 $\tan x$ 的周期性, 得到 $g(x)$ 的定义域为

$$2k\pi - \pi/3 \leq x \leq 2k\pi + \pi/3.$$

又因 $\tan(\pi + \pi/3) = \sqrt{3}$, $\tan(\pi - \pi/3) = -\sqrt{3}$, 故

$$\tan(\pi - \pi/3) \leq \tan x \leq \tan(\pi + \pi/3).$$

由 $\tan x$ 的周期性, 得到 $g(x)$ 的定义域或为

$$2k\pi + \pi - \pi/3 \leq x \leq 2k\pi + \pi + \pi/3,$$

即 $(2k+1)\pi - \pi/3 \leq x \leq (2k+1)\pi + \pi/3.$

因而所求的定义域为

$$k\pi - \pi/3 \leq x \leq k\pi + \pi/3 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

例 9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 试求 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $0 < x < 1$, 而 $\varphi(x) = \frac{[x]}{x}$, 故 $f\left(\frac{[x]}{x}\right) = f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $0 < \varphi(x) = \frac{[x]}{x} < 1$. 为使 $\frac{[x]}{x} < 1$, 必有 $x > 0$, 且 $x \neq 1, 2, 3, \dots$; 又因 $0 \leq x \leq 1$ 时, $[x] = 0$, 为使 $\frac{[x]}{x} > 0$, 必有 $(-\infty < x < 0) \cup [1, +\infty)$. 其交为所求的定义域, 即为 $x > 1$, 且 $x \neq 2, 3, \dots$.

例 10 设 $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$, 求 $f(x) + f\left(\frac{2}{x}\right)$ 的定义域.

解 易求得函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_1 = D_f = \{x \mid |x| < 2\}$. 由 $|2/x| < 2$ 易解得 $|x| > 1$, 即 $D_2 = \{x \mid |x| > 1\}$. 故所求定义域为 $D = D_1 \cap D_2 = \{x \mid 1 < |x| < 2\}$ 或 $D = (-2, -1) \cup (1, 2)$.

例 11 设 $f(x)$ 的定义域为 $(a, b]$, $g(x) = f(x-c) + f(x+c)$ ($c > 0$). 求函数 $g(x)$ 的定义域.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $(a, b]$, 故 $f(x-c)$, $f(x+c)$ 的定义域分别为 $a < x-c \leq b$; $a < x+c \leq b$, 即为 $a+c < x \leq b+c$; $a-c < x \leq b-c$. 求其交得 $D = (a+c, b+c] \cap (a-c, b-c] = (a+c, b-c]$

(因 $c > 0$). 这里 $b - c \geq a + c$, 即 $0 < c \leq (b - c)/2$ 时, D 为 $g(x) = f(x - c) + f(x + c)$ 的定义域; 如果 $b - c < a + c$, 即 $c > (b - a)/2$, 则定义域不存在, $g(x)$ 无意义.

四 实际问题中函数定义域的确定方法

实际问题中的函数定义域须由实际条件许可的范围来确定, 而不只是根据它的分析表示式确定.

例 12 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 1.1.1), 留下的中心角为 φ . 试将漏斗容积表成中心角 φ 的函数, 并求其定义域.

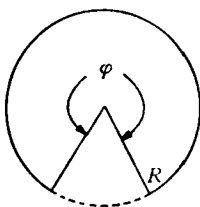


图 1.1.1

解 设做成的漏斗高为 h , 底半径为 r , 则此漏斗的体积为

$$V = \pi r^2 h / 3.$$

这里有两个变量 r 与 h , 但它们不是独立的, 由圆铁片的半径 R 联系着: $R^2 = h^2 + r^2$, 即 $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. 因而 V 可表成 r 的函数. 为将 V 表成 φ 的函数只需求出 r 与 φ 的关系. 事实上, 由

$$2\pi r = R\varphi \text{ 得到 } r = R\varphi / (2\pi).$$

因而
$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2} / (2\pi),$$

故
$$V = \pi r^2 h / 3 = R^3 \varphi^2 \sqrt{4\pi^2 - \varphi^2} / (24\pi^2).$$

因容积 $V > 0$, 故 $4\pi^2 - \varphi^2 > 0$, 即 $\varphi^2 < (2\pi)^2$, $|\varphi| < 2\pi$, (1.1.1) 即 $-2\pi < \varphi < 2\pi$. 而 φ 表示留下的中心角, 当然有 $\varphi > 0$, 故所求的定义域为 $0 < \varphi < 2\pi$.

习题 1.1

1. 试求 $f(x) = \arccos \left[\frac{x}{[x]} \right]$ 的定义域, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

2. 求函数 $f(x) = \lg(x^2 - x - 2) + \frac{x}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域.

3. 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(\sin x)$; (2) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$).

4. 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱, 试将圆柱的体积表为高 h 的函数, 并确定此函数的定义域.

§ 1.2 几类函数表示式的求法

求函数表示式关键在于正确理解和灵活运用函数记号的含义.

一 求复合函数的表示式

例 1 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$, 试验证 $f\{f[f(f(x))]\} = x$, 并求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$ ($x \neq 0, x \neq 1$).

证 设 $f_1(x) = f(x) = \frac{x}{x-1}$, $f_2(x) = f[f_1(x)]$; $\dots$; $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$. 现只需证 $f_4(x) = x$. 下用递推法证之.

因 $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-1/x}$; $\frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}$, 故

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f[f_1(x)] = f\left[\frac{x}{x-1}\right] = \frac{1}{1-1/f(x)} \\ &= \frac{1}{1-(1-1/x)} = x, \end{aligned}$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-1/x},$$

$$f_4(x) = f[f_3(x)] = f\left[\frac{1}{1-1/x}\right] = f_2(x) = x.$$

下面再求 $f\left(\frac{1}{f(x)}\right)$. 因 $\frac{1}{f(x)} = 1 - \frac{1}{x}$, 故

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1-1/x}{1-1/(x-1)} = 1-x \quad (x \neq 0, x \neq 1).$$

注意 上例前一结论可推广为

$$f_{2n}(x)=x, f_{2n+1}(x)=x/(x-1) (n \geq 1) (x \neq 0, x \neq 1).$$

例 2 设 $f_n(x) = \underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = a + bx$, 证明

$$f_n(x) = a \frac{b^n - 1}{b - 1} + b^n x.$$

证 用归纳法证之. 当 $n=2$ 时, 有

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f[f(x)] = a + b(a + bx) = a(b+1) + b^2x \\ &= a \frac{b^2 - 1}{b - 1} + b^2x. \end{aligned}$$

所证等式成立. 设 $n=k$ 时, 所证等式成立, 往证 $n=k+1$ 时也成立. 因

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f[f_k(x)] = a + bf_k(x) = a + b \left(a \frac{b^k - 1}{b - 1} + b^k x \right) \\ &= a + a \frac{b^{k+1} - b}{b - 1} + b^{k+1}x = a \left(1 + \frac{b^{k+1} - b}{b - 1} \right) + b^{k+1}x \\ &= a \frac{b - 1 + b^{k+1} - b}{b - 1} + b^{k+1}x = a \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1} + b^{k+1}x, \end{aligned}$$

故对一切自然数 n , 所证等式成立.

二 求由分段函数复合而成的复合函数的表示式

例如由分段函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 求复合函数 $f[g(x)]$ 、 $g[f(x)]$ 的表示式, 可把函数关系式 $f(x)$ 中的 x 都换成 $g(x)$, 且把 $f(x)$ 的自变量取值范围 (一般用不等式表示) 中的 x 也同时换成 $g(x)$, 即可求得 $f[g(x)]$ 的表示式. 然后解所得到的 $g(x)$ 的不等式, 即可求出 $f[g(x)]$ 的定义域.

同法可求 $g[f(x)]$ 的表示式及其定义域.

例 3 [预 17] 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| < 1; \\ 0, & \text{当 } |x| = 1; \\ -1, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$ $g(x) = e^x$. 求

$f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

解 (1) 将 $f(x)$ 中的 x 及自变量取值范围中的 x 一律用

$g(x)$ 代换得

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & |g(x)| < 1; \\ 0, & |g(x)| = 1; \\ -1, & |g(x)| > 1. \end{cases}$$

解 $|g(x)| < 1$, 即解 $e^x < 1$, 得到 $x < 0$;

解 $|g(x)| = 1$, 即解 $e^x = 1$, 得到 $x = 0$;

解 $|g(x)| > 1$, 即解 $e^x > 1$, 得到 $x > 0$.

故

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

其图形为图 1.2.1 所示.

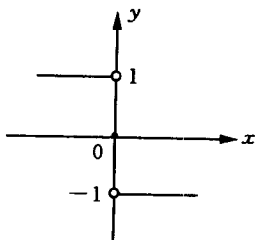


图 1.2.1

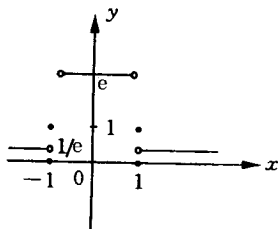


图 1.2.2

(2) 下求 $g[f(x)]$.

将 $g(x)$ 中的 x 及自变量的取值范围中的 x 一律用 $f(x)$ 代换, 得到

$$g[f(x)] = e^{f(x)}.$$

而

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1; \\ 0, & |x| = 1; \\ -1, & |x| > 1. \end{cases}$$

故

$$g[f(x)] = \begin{cases} e^1, & |x| < 1; \\ e^0, & |x| = 1; \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases} = \begin{cases} e, & |x| < 1; \\ 1, & |x| = 1; \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$