学习高等数学指导　备考硕士研究生指南

高等数学
解题方法技巧归纳
（上册）

毛纲源

华中科技大学出版社

学习高等数学指导　备考硕士研究生指南

高等数学解题方法技巧归纳

（上册）

毛纲源

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法技巧归纳(上册)/毛纲源
武汉:华中科技大学出版社, 2001年8月
ISBN 7-5609-2501-4

Ⅰ.高…
Ⅱ.毛…
Ⅲ.高等数学-解题方法-教辅教材
Ⅳ.O13

高等数学解题方法技巧归纳(上册) 毛纲源

责任编辑:李立鹏
封面设计:刘 卉
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

录 排:武汉皇荣文化发展有限责任公司
印 刷:湖北省安陆市印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:16.25 字数:390 000
版次:2001年8月第1版 印次:2002年1月第2次印刷 印数:5 001—10 000
ISBN 7-5609-2501-4/O·232 定价:18.80元

前　言

《线性代数解题方法技巧归纳》(第二版)与《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》出版后,深受读者欢迎,多次印刷,畅销全国. 应广大读者要求,现分上、下两册出版《高等数学解题方法技巧归纳》.

高等数学(即微积分)是高校理工科最主要的基础课之一. 学生对它掌握得如何,不仅直接关系到后继课程的学习,而且对今后的提高与发展,以及工作中的贡献,都有着深远的影响. 为帮助广大学生和自学者学好高等数学,为给他们备攻研究生提供一份复习资料,编写了这套《高等数学解题方法技巧归纳》上、下两册.

同前两本书一样,本书将高等数学的主要内容按问题分类,通过引例归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧. 它不同于一般的教科书和习题解答,自具特色.

本书注意一题多解,注意分析各种解题方法的特点与联系,分析题中条件与所得结果之间的联系,灵活地将解题方法技巧与所学基本理论联系起来. 这样不仅可以培养读者的灵活思维能力,达到举一反三、触类旁通的学习效果,而且在学会解题的同时,也必将会提高分析问题和解决问题的能力.

本书还注意各种重要题型的解法技巧的总结归纳. 试题是无限的,而题型是有限的,只有掌握好各类题型的解法技巧,才能以不变应万变,找到解题的切入点和突破口.

此外,还在不少例后加写“注意”部分,内容涉及基本概念和基本理论的深入理解;解题方法小结及常见错误的剖析;某些例中结论的推广等.

本书实例较多,且类型广、梯度大. 例题和习题中一部分取材

于面向21世纪课程新教材《微积分》(上册)(同济大学应用数学系编，高等教育出版社，2000年1月出版)中的典型习题；另一部分取材于直至2001年的历届全国攻读硕士研究生入学考试数学试卷一、二的考题.

需查找同济大学编《微积分》中习题解答的读者，可参看书末附录.

考研试题既反映了"数学考试大纲"对考生的要求，又蕴涵着在大纲指导下的命题思想.通过考研题的研讨，使有志攻读硕士学位的学生"平战结合"，了解考研试题的特点及其逐年发展趋势，从知识上、题型上、方法和技巧上作好应试准备.若把这些考研试题全部理解消化，将为考研成功打下坚实的基础.

考研试题并非都是难题，其突出特点是全面、准确地体现数学教学大纲和考研大纲的要求.多做考题并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧，无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力以及加深对高等数学基础知识的理解是大有好处的.

本书可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习高等数学(微积分)时阅读和参改；对于自学者和有志攻读硕士学位的青年，本书更是良师益友；对于从事高等数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值.

编写本书时，参阅了有关书籍，引用了一些例子，恕不一一指明出处.在此一并向有关作者致谢.

尽管作者有过多年从事高等数学和考研数学辅导班的教学实践，但由于水平有限，加之时间仓促，书中难免有不足和错误之处，恳请读者不吝指正.

毛纲源

2001年2月于武汉理工大学西院

目　录

第一章　一元函数

§1.1　函数定义域的求法

若函数单用数学式子表示，又不考虑其实际意义，这时约定其定义域就是使该数学式子有意义的一切实数组成的集合，且称为该函数的自然定义域，以下简称定义域. 下面介绍函数定义域的求法.

一　排除法

常用“排除法”求解，即去掉使数学式子没有意义的自变量的取值部分，就得到该函数的定义域. 常用以下几条法则去掉之.

(1)函数式中如果有分式，分式中分母不能为零；

(2)函数式中如果有偶次根式，根号下的被开方数非负，即应大于或等于零；

(3)函数式中如有对数符号，对数式的真数不能为负和零，即应大于零；

(4)函数式中如有反正弦或反余弦函数，则在反正弦或反余弦下的函数式，其绝对值不能大于 1；

(5)函数式中如有正切或余切函数，则在正切或余切符号下的函数式的值分别不能等于 $k\pi+\pi/2$、$k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

例 1　[预 5(4)]* 求函数 $y=\dfrac{1}{[x+1]}$ 的自然定义域.

---

* [预 5(4)]表示该例(或该习题)是《微积分》预备知识这部分的习题第 5 题的第 4 小题. 下同.

解 因当$-1\leqslant x<0$时，根据整函数的定义有$[x+1]=0$，由排除法知函数$y=\dfrac{1}{[x+1]}$的自然定义域为去掉$-1\leqslant x<0$的任意实数的集合，即为$(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

例 2 求下列函数的定义域：

(1)$y=1/(\sin x-\cos x)$；(2)$y=\lg(\cos\lg x)$；

(3)$y=\arcsin[\lg(x/10)]$.

解 (1)因$x=\pi/4+n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时$\sin x-\cos x=0$，故$y$的定义域为$x\neq\pi/4+n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数.

(2)y的定义域必使$\cos(\lg x)>0$，因而必有

$$(2k-1/2)\pi<\lg x<(2k+1/2)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

由此解得x必须满足

$$10^{(2k-1/2)\pi}<x<10^{(2k+1/2)\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

此为y的定义域.

(3)当$-1\leqslant\lg(x/10)\leqslant1$时，$y$有意义，解之得到

$$-1\leqslant\lg x-\lg10=\lg x-1\leqslant1,0\leqslant\lg x\leqslant2,1\leqslant x\leqslant10^2,$$

故$1\leqslant x\leqslant10^2$为$y$的定义域.

例 3 求函数$y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}}$的定义域.

解 由$\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\geqslant0,x-3\neq0$可推出所求定义域为

$$D(y)=\{x\mid(x-1)(x-2)(x-3)\geqslant0,x\neq3\}.$$

x	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
因子乘积	$-$	$+$	$-$	$+$

乘积为$+$的区间为$(1,2)$与$(3,+\infty)$，所求定义域为$[1,2]\cup(3,+\infty)$.

二　交集法

用交集法求定义域的函数，常见的有下述两种类型.

(Ⅰ)经四则运算组成的函数

若函数的表示式由几个函数经四则运算所组成，则其定义域是各函数定义域的交集(公共部分). 为求出此交集，应根据各个函数的限制条件列出不等式组，其公共解就是所求的定义域.

正确求出这类函数的定义域的关键在于以下几点：

(1)搞清五类基本初等函数的定义域；

(2)记住分式函数的分母不能等于零；

(3)熟练掌握解不等式(组)的方法.

例 4　[预 5(3)]求函数 $y=1/(1-x^2)+\sqrt{x+1}$ 的定义域.

解　要使 y 有意义，必有 $1-x^2\neq 0$，且 $x+1\geqslant 0$. 其交集 $\begin{cases}1-x^2\neq 0;\\ x+1\geqslant 0,\end{cases}$ 即为所求的定义域，解之得到 $\begin{cases}x\neq\pm 1;\\ x\geqslant -1,\end{cases}$ 即所求的定义域为 $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 5　求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x}/\sin\pi x$；　(2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

解　(1)所求的定义域为 $x>0$，且 $x\neq n(n=1,2,\cdots)$，即 $x\in(n-1,n)(n=1,2,3,\cdots)$.

(2)所求的定义域为 $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，且 $-4\leqslant x\leqslant 4$. 即为 $x\in[-4,-\pi)\cup(0,\pi]$.

(Ⅱ)复合函数

一般，设 $f(x)$ 的定义域为 D_f，$g(x)$ 的定义域是 D_g，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域是 $D=D_g\cap\{x|g(x)\in D_f\}$.

例 6　求函数 $f(x)=\arccos\sqrt{x/(2x-1)}$ 的定义域.

解　设 $g(x)=\sqrt{x/(2x-1)}$，则 $f=\arccos g(x)$ 为复合函数. 由 $\begin{cases}x/(2x-1)\geqslant 0;\\ x\neq 1/2,\end{cases}$ 得到 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x\leqslant 0$，故

$$D_g=(-\infty,0]\cup(1/2,+\infty).$$

而 $\{x|g(x)=\sqrt{x/(2x-1)}\in D_f\}$

$$=\{x|\{-1\leqslant\sqrt{x/(2x-1)}\leqslant1\}$$

$$=\{x|0\leqslant\sqrt{x/(2x-1)}\leqslant1\}.$$

不等式 $0\leqslant\sqrt{x/(2x-1)}\leqslant1$ 的解集易求得为 $(-\infty,0]$ 或 $[1,+\infty)$，故

$$\{x|g(x)\in D_f\}=(-\infty,0]\cup[1,+\infty).$$

因 $D_g\cap\{x|g(x)\in D_f\}=\{(-\infty,0)\cup(1/2,+\infty)\}$

$$\cap\{(-\infty,0]\cup[1,+\infty)\}=(-\infty,0]\cup[1,+\infty).$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $x\geqslant1$ 或 $x\leqslant0$.

例 7 设 $f(x)=(x-1)(7-x)$，$0\leqslant x\leqslant8$. 求 $f[f(x)]$ 的定义域.

解 为方便计，设内层的 $f(x)=g(x)$，则 $D_g=D_f=[0,8]$.

又 $\{x|g(x)\in D_f\}=\{x|0\leqslant g(x)\leqslant8\}=\{x|0\leqslant f(x)\leqslant8\}$.

而当 $f(x)\geqslant0$，即 $(x-1)(7-x)\geqslant0$ 时，有 $1\leqslant x\leqslant7$；

当 $f(x)\leqslant8$，即 $(x-1)(7-x)\leqslant8$ 时，有 $x\leqslant3$ 或 $x\geqslant5$，因而

$$\{x|g(x)\in D_f\}=\{(-\infty,3]\cup[5,8]\}\cap[1,7]=[1,3]\cup[5,7],$$

$$D_g\cap\{x|g(x)\in D_f\}=[0,8]\cap\{[1,3]\cup[5,7]\}=[1,3]\cup[5,7],$$

即 $f[f(x)]$ 的定义域为 $D=[1,3]\cup[5,7]$.

三 代入法

已知 $f(x)$ 的定义域，用代入法可求出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例如，设 $f(x)$ 的定义域为 $a<x<b$，将 $\varphi(x)$ 替换不等式中的 x，得到 $a<\varphi(x)<b$，由此解出 x，即得 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例 8 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,3]$，求 $g(x)=f[\tan^2x]$ 的定义域.

解 将 $\tan^2x$ 代入 $0\leqslant x\leqslant3$ 中的 x 得到 $0\leqslant\tan^2x\leqslant3$.

由 $\tan^2x\leqslant3$，得到 $-\sqrt{3}\leqslant\tan x\leqslant\sqrt{3}$，因而

$$\tan(-\pi/3)\leqslant\tan x\leqslant\tan(\pi/3).$$

由 $\tan x$ 的周期性，得到 $g(x)$ 的定义域为

$$2k\pi-\pi/3\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi/3.$$

又因 $\tan(\pi+\pi/3)=\sqrt{3}$，$\tan(\pi-\pi/3)=-\sqrt{3}$，故

$$\tan(\pi-\pi/3)\leqslant\tan x\leqslant\tan(\pi+\pi/3).$$

由 $\tan x$ 的周期性，得到 $g(x)$ 的定义域或为

$$2k\pi+\pi-\pi/3\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi+\pi/3,$$

即
$$(2k+1)\pi-\pi/3\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi+\pi/3.$$

因而所求的定义域为

$$k\pi-\pi/3\leqslant x\leqslant k\pi+\pi/3\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

例 9 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，函数 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试求 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$ 的定义域.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $0<x<1$，而 $\varphi(x)=\dfrac{[x]}{x}$，故 $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)=f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $0<\varphi(x)=\dfrac{[x]}{x}<1$. 为使 $\dfrac{[x]}{x}<1$，必有 $x>0$，且 $x\neq1,2,3,\cdots$；又因 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$[x]=0$，为使 $\dfrac{[x]}{x}>0$，必有 $(-\infty<x<0)\cup[1,+\infty)$. 其交为所求的定义域，即为 $x>1$，且 $x\neq2,3,\cdots$.

例 10 设 $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$，求 $f(x)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域.

解 易求得函数 $f(x)$ 的定义域为 $D_1=D_f=\{x\mid |x|<2\}$. 由 $|2/x|<2$ 易解得 $|x|>1$，即 $D_2=\{x\mid |x|>1\}$. 故所求定义域为

$$D=D_1\cap D_2=\{x\mid 1<|x|<2\}\text{或 } D=(-2,-1)\cup(1,2).$$

例 11 设 $f(x)$ 的定义域为 $(a,b]$，$g(x)=f(x-c)+f(x+c)$ $(c>0)$. 求函数 $g(x)$ 的定义域.

解 因 $f(x)$ 的定义域为 $(a,b]$，故 $f(x-c)$，$f(x+c)$ 的定义域分别为 $a<x-c\leqslant b$；$a<x+c\leqslant b$，即为 $a+c<x\leqslant b+c$；$a-c<x\leqslant b-c$. 求其交得 $D=(a+c,b+c]\cap(a-c,b-c]=(a+c,b-c]$

(因 $c>0$). 这里 $b-c\geqslant a+c$，即 $0<c\leqslant(b-c)/2$ 时，D 为$g(x)=f(x-c)+f(x+c)$的定义域；如果 $b-c<a+c$，即 $c>(b-a)/2$，则定义域不存在，$g(x)$无意义.

四 实际问题中函数定义域的确定方法

实际问题中的函数定义域须由实际条件许可的范围来确定，而不只是根据它的分析表示式确定.

例 12 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗(图 1.1.1)，留下的中心角为 φ. 试将漏斗容积表成中心角 φ 的函数，并求其定义域.

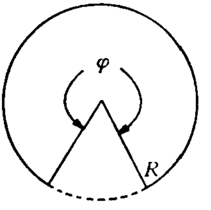

图 1.1.1

解 设做成的漏斗高为 h，底半径为 r，则此漏斗的体积为

$$V=\pi r^2h/3.$$

这里有两个变量 r 与 h，但它们不是独立的，由圆铁片的半径 R 联系着：$R^2=h^2+r^2$，即 $h=\sqrt{R^2-r^2}$. 因而 V 可表成 r 的函数. 为将 V 表成 φ 的函数只需求出 r 与 φ 的关系. 事实上，由

$$2\pi r=R\varphi \text{ 得到 } r=R\varphi/(2\pi).$$

因而 $$h=\sqrt{R^2-r^2}=R\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(2\pi),$$

故 $$V=\pi r^2h/3=R^3\varphi^2\sqrt{4\pi^2-\varphi^2}/(24\pi^2).$$

因容积 $V>0$，故 $4\pi^2-\varphi^2>0$，即 $\varphi^2<(2\pi)^2$，$|\varphi|<2\pi$，(1.1.1)即 $-2\pi<\varphi<2\pi$. 而 φ 表示留下的中心角，当然有 $\varphi>0$，故所求的定义域为$0<\varphi<2\pi$.

习题 1.1

1. 试求 $f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$的定义域，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

2. 求函数 $f(x)=\lg(x^2-x-2)+\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$的定义域.

3. 设 $y=f(x)$的定义域为$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1)$f(\sin x)$;　　　　(2)$f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

4. 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱,试将圆柱的体积表为高 h 的函数,并确定此函数的定义域.

§1.2 几类函数表示式的求法

求函数表示式关键在于正确理解和灵活运用函数记号的含义.

一　求复合函数的表示式

例1　设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,试验证 $f\{f(f[f(x)])\}=x$,并求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)(x\neq0,x\neq1)$.

证　设 $f_1(x)=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$,$f_2(x)=f[f_1(x)]$;…;$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$. 现只需证 $f_4(x)=x$. 下用递推法证之.

因 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-1/x}$;$\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$,故

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=f[f(x)]=\frac{1}{1-1/f(x)}$$

$$=\frac{1}{1-(1-1/x)}=x,$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-1/x},$$

$$f_4(x)=f[f_3(x)]=f[f(x)]=f_2(x)=x.$$

下面再求 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$. 因$\dfrac{1}{f(x)}=1-\dfrac{1}{x}$,故

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-1/x}{1-1/x-1}=1-x(x\neq0,x\neq1).$$

注意　上例前一结论可推广为

$$f_{2n}(x)=x,f_{2n+1}(x)=x/(x-1)(n\geqslant 1)(x\neq 0,x\neq 1).$$

例 2 设 $f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{ 次}}$，若 $f(x)=a+bx$，证明

$$f_n(x)=a\frac{b^n-1}{b-1}+b^n x.$$

证 用归纳法证之. 当 $n=2$ 时，有

$$\begin{aligned}f_2(x)&=f[f(x)]=a+b(a+bx)=a(b+1)+b^2x\\&=a\frac{b^2-1}{b-1}+b^2x.\end{aligned}$$

所证等式成立. 设 $n=k$ 时，所证等式成立，往证 $n=k+1$ 时也成立. 因

$$\begin{aligned}f_{k+1}(x)&=f[f_k(x)]=a+bf_k(x)=a+b\left(a\frac{b^k-1}{b-1}+b^kx\right)\\&=a+a\frac{b^{k+1}-b}{b-1}+b^{k+1}x=a\left(1+\frac{b^{k+1}-b}{b-1}\right)+b^{k+1}x\\&=a\frac{b-1+b^{k+1}-b}{b-1}+b^{k+1}x=a\frac{b^{k+1}-1}{b-1}+b^{k+1}x,\end{aligned}$$

故对一切自然数 n，所证等式成立.

二 求由分段函数复合而成的复合函数的表示式

例如由分段函数 $f(x)$、$g(x)$ 求复合函数 $f[g(x)]$、$g[f(x)]$ 的表示式，可把函数关系式 $f(x)$ 中的 x 都换成 $g(x)$，且把 $f(x)$ 的自变量取值范围（一般用不等式表示）中的 x 也同时换成 $g(x)$，即可求得 $f[g(x)]$ 的表示式. 然后解所得到的 $g(x)$ 的不等式，即可求出 $f[g(x)]$ 的定义域.

同法可求 $g[f(x)]$ 的表示式及其定义域.

例 3 ［预 17］设 $f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|<1;\\ 0, & \text{当 } |x|=1;\\ -1, & \text{当 } |x|>1.\end{cases}$ $g(x)=e^x$. 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

解 (1) 将 $f(x)$ 中的 x 及自变量取值范围中的 x 一律用

$g(x)$代换得

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|<1;\\ 0, & |g(x)|=1;\\ -1, & |g(x)|>1.\end{cases}$$

解 $|g(x)|<1$，即解 $e^x<1$，得到 $x<0$；

解 $|g(x)|=1$，即解 $e^x=1$，得到 $x=0$；

解 $|g(x)|>1$，即解 $e^x>1$，得到 $x>0$.

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

其图形为图 1.2.1 所示.

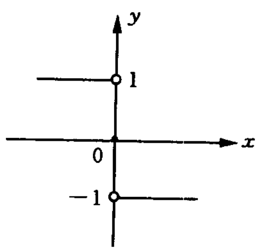

图 1.2.1

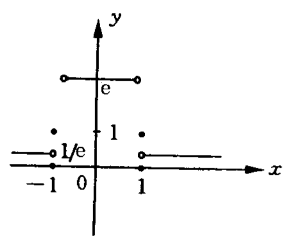

图 1.2.2

(2)下求 $g[f(x)]$.

将 $g(x)$ 中的 x 及自变量的取值范围中的 x 一律用 $f(x)$ 代换，得到

$$g[f(x)]=e^{f(x)}.$$

而
$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1.\end{cases}$$

故
$$g[f(x)]=\begin{cases}e^1, & |x|<1;\\ e^0, & |x|=1;\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}=\begin{cases}e, & |x|<1;\\ 1, & |x|=1;\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$