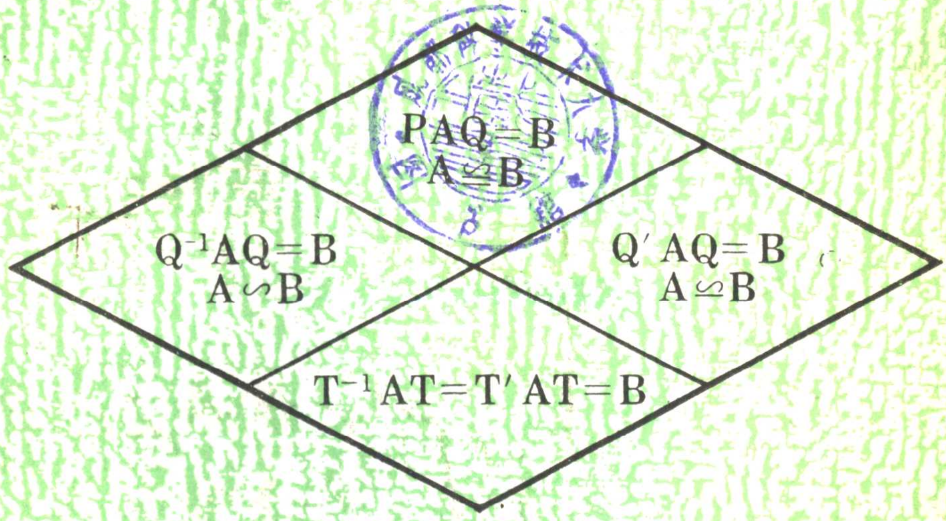
高等学校速成教材及参考书　　　　线代之友

线性代数的内容、方法与小结

陈典铠　编著



航空工业出版社

线性代数的内容、方法与小结

陈典铠　编著

航空工业出版社
1993

(京)新登字 161 号

内 容 简 介

本书共分二部分，第一部分是线性代数的内容，共七章：行列式，矩阵，线性方程组、方阵的相似标准形，二次型，线性空间，线性变换。有思考题 133 道，例题 185 道，典型习题 540 道（概念题有 150 道）。第二部分是各章的小结和全部习题按难易给出答案、提示或解答。小结中将全章例题和习题的解题方法和证明方法归纳分类，将全章主要概念、结论和方法归纳总结、或列成表格，或作出图形，共有小结表格 9 张，小结图形 13 个，小结约 5 万字。基本上解决了初学者书难看懂，习题难作，内容难掌握的问题。

读者对象：教师、研究生、本科生及大专、夜大、电大、函授大学、职工大学学生的参考书或教材（35—60 学时）。

线性代数的内容、方法与小结
陈典铠 编著

航空工业出版社出版发行
（北京市安外小关东里 14 号）
—邮政编码：100029—
北京航空航天大学印刷厂排版
北京通县向阳印刷厂印刷

1993 年 7 月第 1 版　　1993 年 7 月第 1 次印刷
开本：787×1092 毫米 1/16　　印张：18
印数：0—5000 册　　字数：458 千字

ISBN 7-80046-539-X/O・012
定价：9.50 元

前　言

17、18世纪，随着生产的发展，出现用文字代替数字，最早碰到的问题，多数是解方程，最简单的是一元一次方程. 经过一百多年沿着二个方向发展：一是未知元的个数不变，方程次数增高，由一次，二次……，增加到 n 次，形成后来的高次方程(或多项式理论)；二是方程的次数不变，未知元的个数增加，由一元一次，二元一次联立方程组……，增加到 m 个方程，n 个未知量的线性方程组. 从高次方程到一次的线性方程组，中间有二次齐次多项式——叫二次型，比较有用. 随同线性方程组的研究，引出了行列式、矩阵、向量三个重要工具. 进一步抽象，推广得到线性空间，线性变换及内积空间. 从而形成了高等代数的整个体系，撇开其中的高次方程，剩下就是线性代数的全部内容.

近30年来科学技术迅速发展，计算机被广泛使用，经济管理越来越引起人们的注意，从而使线性代数这门基础课，越来越被重视. 现在线性代数成了高等院校理工科及部分文科的必修课，学时和内容都增加了不少，数学家L. 戈丁谈到线性代数的重要性时曾说："如果不熟悉线性代数的概念，象线性性质、线性空间、矩阵等，要去学习自然科学，现在看起来就和文盲差不多，甚至可能学习社会科学也是如此."

随着教学要求的提高和内容的增多，线性代数的难度也随着增加，普遍反映线性代数难学，主要原因如下：

1. 高度抽象，由于线性代数应用的广泛性，其内容具有高度的抽象性. 如 n 阶行列式、n 阶矩阵、n 维向量、n 维线性空间、线性相关、线性无关……，都是抽象的概念，不好理解. 为此本书采取以下措施：一、尽量从个别到一般，由浅入深，深入浅出，并增加了一些几何图形. 二、由大家熟悉的解线性方程组引出线性表出、线性相关、线性无关、矩阵的秩和矩阵的初等变换，使这些抽象的概念容易接受，同时加强了线性方程组. 三、为帮助理解概念，掌握方法，从深广两方面开拓思路，布置了相当数量的思考题. 四、在练习或习题中安排了较多的是非题，问答题或填空题. 五、先讲矩阵，后讲方程组，保持了矩阵体系的完整，使矩阵得到更多的应用，既加强了矩阵，又使难点分散和后移.

2. 概念多，结论密集. 线性代数各章既有联系，又自成系统，结论多，重复少，印象不深，讲到后面，忘了前面. 为此采取以下措施：一、分清主次，将最主要的结论写成定理，次要的作为命题，由它们推出的结论写成推论. 对一些理论上不重要，便于证题或解题的结论，安排在例题或习题中. 二、利用黑体字突出重点，关键的字，重要的词，常用的式子……都用醒目的黑体字. 三、为了对比和便于掌握，有时将正反结论或等价的结论合写成一个，如第三章定理1. 四、提高重复率，适当布置一些用到前面结论的综合性例题或习题；证(或解)题及提示用到前面什么结论都指明，引导读者复习. 五、讲完重要结论后，说明结论的用途及注意事项. 六、为帮助读者理解和掌握每章的主要概念，结论和方法，对各章都作了比较详细的小结，将一章主要结论间的内在联系用图表示，既清楚了各结论之间的关系，又明白了各个结论的地位及作用.

3. 解题方法多，证题方法活. 线性代数比较难，证明题是难中之难，证明题难的原因是：(1) 比较灵活，没有固定规律和步骤. (2) 线性代数证题方法多；归纳法、反证法、穷举法、构造

法……，碰到证明题，不知道用什么方法.（3）线性代数证题方式与普通数学区别较大，普通数学证题一般都是等式的推导，比较容易接受.线性代数证题相当一部分是叙述推理，不好掌握，常常词不达意，本末倒置，为此，采取以下措施：一、典型例题比较多，例题或习题中尽可能包含各种类型的题.二、有些例题或习题采用一题（例）多解（证），并指出每种解法的前提条件和适用范围.三、对一些能代表一类题的例题或习题，简单归纳、推广，力求举一反三.四、对某些较难的题在证（解）之前先分析：探讨从未知到所求（证）的各种途径及方法，提高分析问题和解决问题的能力.五、在小结中，将每章所用到的每一种解题和证题的方法，进行分类，归纳和小结，指出解题的已知条件，理论根据和主要步骤；证明的前提条件，推导依据，提高解（证）题能力，减少盲目性.

线性代数教学中的另一个矛盾是内容多，学时少，对一些冗长难懂的证明或复杂的计算，本书尽可能改用简单易懂的方法，绝大多数的结论都用比较简单的方法证明.计算题为了突出概念和方法，计算力求简单，因此本书需要讲授的基本内容非常精练，增加的篇幅是留给学生自学的例题，思考题和小结.讲授本书需要 40 学时左右，1、6、7 三章的内容有较大的伸缩性，根据需要，可多讲，也可少讲.本书的例题和习题，一部分选自历届全国硕士研究生（工科）入学试题；一部分选自一些大学本科生（工科）考题；一部分是作者自己编写的题.

我国代数学的权威，中国科学院学部委员**万哲先**先生为该书写的《评语》中**预言**：本书将**“对我国大学线性代数的教学，特别是工科线性代数的数学有极大俾益的，对于有志于自学线性代数的读者也是很有帮助的.”**

本书遵照工科数学课程教学指导委员会 1986 年制定的教学基本要求编著而成，内容的深度与广度适合于工科院校本科教学大纲及研究生考试要求，超出研究生考试范围的内容前面打 *，可以不看.

本书共分二部分，第一部分是线性代数的内容，包括例题、思考题和习题.第二部分是每章的小结及习题的答案、提示或解答.作题时不要轻易看提示或解答，力求独立完成.

本书是作者在北京航空航天大学讲授线性代数讲稿的基础上，1988 年修改补充写成教材，本单位王日爽教授和成如翼副教授仔细地审阅了教材全部内容，颜庆津教授和贺霞麟副教授审阅了部分章节，他们都提出了许多宝贵的意见和建议，谨此对他们表示衷心感谢.

教材经高等学校工科数学指导委员会第十四次会议评为第一名.根据评委们提出的宝贵意见及四年来的教学实践作了修改，如果说写教材主要在“难”字上下功夫，那么这次修改主要在“精”字上作了一些努力，删去了同构及内积空间（其中的标准正交基安排到线性空间）而形成本书.

航空工业出版社周士林副总编在该书的编审中作了大量工作，邹坤荣同志仔细阅读了全部稿件，提出了许多宝贵的建议，对他们的热忱支持和帮助表示衷心的感谢.

写本书的目的是为读者提供一点方便，限于水平，难免有不妥甚至错误之处，恳请批评指正.

编著者

1993 年 2 月于北京

符 号 说 明

$A_{m\times n}$或$[a_{ij}]_{m\times n}$——$m\times n$ 矩阵

A_n 或$[a_{ij}]_n$——n 阶方阵

$|A|$或$|a_{ij}|$——方阵的行列式

E——单位阵

I——矩阵 A 的等价标准形,或复对称阵 A 的合同标准形

F——矩阵 A 的行梯形

T——矩阵 A 的行标准形

N——对角阵

J——方阵 A 的约当标准形

Λ——实对称阵的合同标准形

A'——矩阵 A 的转置矩阵

A^*——方阵 A 的伴随矩阵

$R(A)$——矩阵 A 的秩

Ⅰ :$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$——表示Ⅰ是由向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 组成的向量组

R(Ⅰ)——向量组Ⅰ的秩

$A_{行}$——矩阵 A 的行向量组

$A_{列}$——矩阵 A 的列向量组

θ——零矩阵、或零向量、或零元素、或零变换

(Ⅰ)——$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,\ i=1,\cdots,m$

(Ⅰ$_1$)——$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,\ i=1,\cdots,n$

(Ⅱ)——$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\cdots,m$

(Ⅱ$_1$)——$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\cdots,n$

K——数域

R——实数域

C——复数域

Q——有理数域

R^n——全体 n 维向量构成的 n 维向量空间

P^n——所有次数低于 n 的实系数多项式组成的 n 维线性空间

$M^{m\times n}$——所有 $m\times n$ 矩阵构成的 $m\times n$ 维线性空间

V^n——n 维线性空间

$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$——由向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 生成的子空间

$\Leftrightarrow$——左右可以互推,即"充要条件",或"当且仅当"

$\forall$——任意

$\exists$ —— 存在

$\in$ —— 属于

$\overline{\in}$ —— 不属于

$\geqslant$ —— 大于或等于

$\leqslant$ —— 小于或等于

为节省篇幅本书常用：

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表示 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$i=1,\cdots,n$ 表示 $i=1,2,\cdots,n$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{表示} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \text{表示} \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{或} \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{表示} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{vmatrix} \text{表示} \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \text{表示} \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

目　录

第一部分　线性代数

第二部分　小结、答案、提示、解答

第一部分 线性代数

第一章 行列式

行列式是研究线性代数的重要工具之一，它是从解线性方程组引进的，它在数学和其他学科上都有广泛应用. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质、计算及应用. 在初等代数中，为解二元及三元线性方程组，引进了二阶及三阶行列式.

设二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad X_2 = \frac{D_2}{D}$$

其中 D_1、D_2 分别为将 D 的第 1 列、第 2 列换为常数项列得到的行列式.

推广到 n 个未知量，n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

当系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 分别为将 D 中第 1 列，第 2 列，……，第 n 列换为常数项列所得到的行列式. 这就是 §3 要讲的克莱姆法则，为此先引进 n 阶行列式的定义与计算.

§1 n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式，先讲排列的逆序数.

1.1　排列的逆序数

一、排列　把 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$，按任意顺序排成一个有序数组，称为一个 n 级(全)排列，简称**排列**，记作 $j_1j_2\cdots j_n$.

思考　112，214，321，哪个是上述定义的排列？几级？

三级(全)排列 $j_1j_2j_3$ 共有多少个？j_1 取 1，j_2 取 2，j_3 取 3 得到一个三级排列 123，同样可得，132；213；231；312；321 还有没有？总共应该有多少个？第一个数 j_1 有 3 种取法，可取 1，可取 2，也可取 3，当 j_1 取定之后，j_2 只有二种取法，最后 j_3 只有一种取法，所以三级排列共有

$$A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 3!$$

种排法，三级排列总共就是上面列出的 6 个.

n 级(全)排列总数为

$$A_n^n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

二、自然排列　n 级排列共有 $n!$ 种，其中 $1\ 2\ 3\cdots n$ 由小到大按自然顺序的排列叫 **n 级自然排列**. 如 $n=3$，123 为三级自然排列.

三、逆序数　除自然排列外，其他排列都有大数字排在小数字的前面，形成逆序.

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 为一个 n 级排列.

1) 数字 j_i 的逆序数：j_i 的前面比 j_i 大的数字的个数叫**数字 j_i 的逆序数**，记作 $\tau(j_i)$.

例如 5 级排列 3 2 5 1 4，$\tau(2)=1$，$\tau(3)=0$，$\tau(1)=3$.

2) 如排列的逆序数：排列中所有数字的逆序数之和，称为**该排列的逆序数**，记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 即

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n) = \tau(j_1) + \tau(j_2) + \cdots + \tau(j_n)$$

例如 $\tau(3\ 2\ 5\ 1\ 4)=\tau(3)+\tau(2)+\tau(5)+\tau(1)+\tau(4)=0+1+0+3+1=5$

四、奇偶排列　排列的逆序数是零或正整数，按奇偶性可分为奇数和偶数，逆序数是奇数的排列叫**奇排列**，如上面的 3 2 5 1 4 是奇排列. 逆序数为偶数的排列叫**偶排列**，如 $\tau(3\ 1\ 5\ 2\ 4)=4$，3 1 5 2 4 为偶排列.

五、对换　将排列中某两个数字交换位置，其余数字的位置不变，得到一个新的排列，这种变换叫**对换**. 相邻两数字交换位置的变换叫**相邻对换**，如 3 2 5 1 4 交换 2 与 5 得到 3 5 2 1 4. 不相邻两数字交换位置的变换，叫**一般对换**. 如 3 2 5 1 4 交换 2 与 1 得到 3 1 5 2 4.

将排列作一次对换得到一个新排列，新旧排列的奇偶性有没有变化？如 $\tau(3\ 2\ 5\ 1\ 4)=5$，相邻对换后，$\tau(3\ 5\ 2\ 1\ 4)=6$；3 2 5 1 4 一般对换得 3 1 5 2 4，$\tau(3\ 1\ 5\ 2\ 4)=4$. 可见，不论是相邻对换还是一般对换都改变排列的奇偶性. 从而有

命题　对换改变排列的奇偶性.

证　对换有相邻对换和一般对换两种，只要证明对每种结论成立，即证明了该命题，这种证明方法线性代数中经常使用，叫**穷举法**.

1° 首先证明相邻对换结论成立

设某排列

$$\cdots\cdots j\ k \cdots\cdots \tag{1}$$

对换相邻两数字 j，k 得到新排列

$$\cdots\cdots k\ j\cdots\cdots \tag{2}$$

由于(1)与(2)两个排列只交换 j 与 k 两个数字的位置，其他数字位置不变，各数字的逆序数也只 $\tau(k)$ 和 $\tau(j)$ 可能有变化，其他数字的逆序数不变.

1) 若 $j>k$ 则 $\tau(j)$ 不变，(2)中 $\tau(k)$ 比(1)中 $\tau(k)$ 减少 1.

2) 如若 $j<k$ 则相邻对换后，(2)中 $\tau(j)$ 增加 1，$\tau(k)$ 不变.

综合 1)与 2)，无论 $j>k$，或 $j<k$，相邻对换改变了排列的奇偶性.

2° 再证一般对换结论成立

设某个排列

$$\cdots\cdots j\ i_1\cdots\cdots i_s\ k\cdots\cdots \tag{3}$$

对换 j 与 k 得到

$$\cdots\cdots k\ i_1\cdots\cdots i_s\ j\cdots\cdots \tag{4}$$

将(3) 中 k 经过 $s+1$ 次相邻对换得到排列

$$\cdots\cdots kj\ i_1\cdots\cdots i_s\cdots\cdots \tag{5}$$

(5)中 j 经过 s 次相邻对换变成(4)，从而排列(3)共经过 $2s+1$ 次相邻对换变成排列(4)，奇偶性改变了 $2s+1$ 次，从而证明了一般对换也改变排列的奇偶性，因此无论相邻对换或一般对换都改变排列的奇偶性.

1.2 n 阶行列式的定义

现在我们用逆序数来定义 n 阶行列式. 二、三阶行列式可用**对角线法**展开

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

“—” “+”

图 1-1

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=?$$

由 n^2 个元素排成 n 行 n 列的 D_n，横的称**行**，竖的称**列**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表示元素所在的行，称 $\boldsymbol{i}$ 为**行标**；第二个下标 j 表示元素所在的列，称 $\boldsymbol{j}$ 为**列标**. $D_n=?$ 能用“对角线法”吗？不能！“对角线法”只适用于二、三阶行列式，四阶以上的行列式不能用“对角线法”，要计算四阶以上的行列式必须另找规律重新定义.

分析二、三阶行列式的展开式的共同**特点**，它们的展开式都是行列式中一些元素乘积的代数和，有下列规律：

① **每项的乘积** 二阶行列式的每一项都是 D_2 中既**不同行**又**不同列**的二个元素的乘积，即乘积中的元素必须是**每行和每列，必须取一个，而且只能取一个元素**. 行列式共有二行二列，这样的乘积必须有二个，也只有二个，因此 D_2 的展开式有二项：$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，每一项二个元素的行标和列标均为一个二级排列. 同样，三阶行列式的项是取自 D_3 中不同行、不同列的三个元素的乘积，D_3 的每一项三个元素的行标和列标均为一个三级排列. 交换每项中乘积元素的顺序，使行标按自然顺序排列 1 2 3，则该项元素列标必然为某个三级排列 $j_1j_2j_3$，于是三阶行列式 D_3 的每一项可统一表示为

$$\pm a_{1j_1} \quad a_{2j_2} \quad a_{3j_3}$$

推广到 n 阶行列式，D_n 展开式中的每一项都是取自**不同行**、**不同列**的 n 个元素的乘积，D_n 的展开式中每一项可统一表示为

$$\pm a_{1j_1} \quad a_{2j_2} \quad \cdots \quad a_{nj_n}$$

思考 根据 D_n 的通项的组成 $a_{1j_1} \quad a_{2j_2} \quad \cdots \quad a_{nj_n}$ 如何理解："每行和每列必须取一个，且只能取一个？"

② **每项的符号** 现在确定通项前面的正负号. 如上面所说，交换乘积中元素的顺序，使行标按自然排列，则当列标排列为偶排列时该项取正；当列标排列为奇排列时该项取负，即

D_2 的通项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1} \quad a_{2j_2}$

D_3 的通项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1} \quad a_{2j_2} \quad a_{3j_3}$

D_n 的通项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1} \quad a_{2j_2} \quad \cdots \quad a_{nj_n}$

③ **和** 知道 D_n 展开式的通项，又知道共有 $n!$ 项，如何写出这 $n!$ 项？例如，D_2 的通项是 $(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1} \quad a_{2j_2}$，共有二项，我们写出这二项：取 $j_1=1$，$j_2=2$，得到列标排列 1 2，该项为 $(-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{22}=a_{11}a_{22}$；取 $j_1=2$，$j_2=1$ 得到列标排列 2 1，该项为 $(-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}=-a_{12}a_{21}$，二级排列 j_1j_2 共有二个，1 2 与 2 1，D_2 的展开式就是上面的二项，即

$$D_2=(-1)^{\tau(12)}a_{11}a_{12}+(-1)^{\tau(21)}a_{12}a_{21}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对所有二级排列求和.

同理

$$D_3=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

推广得到 n 阶行列式定义.

定义 1

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示**对所有 n 级排列求和**.

因为 n 级排列的总数为 $n!$，也可以说 **D_n 等于 $n!$ 项不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和**，简记 $D_n=|a_{ij}|_n$.

思考 用 n 阶行列式定义写出 D_3 的展开式.

例 1 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

该行列式的特点是**主对角线**(从左上角到右下角各元素 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$所构成的对角线)以下的元素全为零,即 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$,称为**上三角形行列式**.

解 根据定义,D 的每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,这 n 个元素的乘积中若有一个零元素,则该项为零.该行列式主对角线以下元素全为零,它的展开式中非零项第一列只能取 a_{11},第二列有二个非零元素 a_{12}、a_{22},若取 a_{12},则该项就含第一行的二个元素,不符合定义.所以第二列只能取 a_{22},同理第三列只能取 a_{33},…,第 n 列只能取 a_{nn},因此上三角形行列式非零项只有一项,即

$$D=(-1)^{\tau(1\,2\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

其中 $\prod\limits_{i=1}^{n}$ 表示 n 个因子连乘.

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} & {}^{❶} & & b_1 \\ & & b_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \text{\Large $*$}^{❷} & \\ b_n & & & \end{vmatrix}$$

解 与例 1 一样,非零项第一行只能取 b_1,第二行只能取 b_2,…,第 n 行只能取 b_n,因为

$$\tau(n(n-1)\cdots 2\,1)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}b_1b_2\cdots b_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}b_i$$

例 3 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 四阶行列式的通项为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,共有 4! $=24$ 项,因为它有若干零元素,它的非零项为:

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}acfh+(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4)}adeh+(-1)^{\tau(4\,2\,3\,1)}bcfg+(-1)^{\tau(4\,3\,2\,1)}bdeg \\ &=acfh-adeh-bcfg+bdeg \end{aligned}$$

思考 下列乘积能否组成四阶行列式的项?若能组成四阶行列式的项,确定该项符号,$a_{22}a_{13}a_{34}$; $a_{22}a_{13}a_{34}a_{42}$; $a_{22}a_{13}a_{34}a_{41}$.

在定义 1 中,我们将每项乘积的元素顺序行标按自然排列,将每项乘积写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$.

---

❶ 空白处元素为零,下同.

❷ * 表示没有必要写出的元素,下同.

同样也可以交换乘积中元素的顺序,使列标按自然排列,其行标为某一 n 级排列,每项乘积可写成 $a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$,从而有

定义 1′

$$D_n=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

练 习 1.1

1. 求下列各排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

1) 3 6 5 4 1 2,　2) 8 7 6 5 4 3 2 1,　3) 5 1 8 3 9 4 2 6 7.

2. 求下列排列的逆序数

1) $(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$.　2) $2\ 3\ \cdots(n-1)n\ 1$.

3. 确定 j, i,使

1) $1\ 2\ 4\ 5\ i\ 6\ j\ 9\ 7$ 为奇排列.　2) $1\ i\ 2\ 4\ 5\ j\ 8\ 9\ 7$ 为偶排列.

4. 写出四阶行列式中含因子 $a_{41}a_{32}$的项.

5. 用定义计算下列行列式

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ n & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$,　2) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & 2 & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$,　4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 & g \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \end{vmatrix}$

6. 用定义计算

1) $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^4 和 x^3 的系数,2) 方程 $\begin{vmatrix} 3x & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -x & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}=0$ 的根,

3) $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$ 中 λ^3 与 λ^2 的系数.

§2 n 阶行列式的计算

2.1 n 阶行列式的性质

从行列式的定义知道,n 阶行列式的每一项是 n 个数的乘积,共有 $n!$ 项,总共要做 $n!(n-$

1)次乘法. 例如计算一个 20 阶行列式要做(20!)×19≈44127×10^{15}次乘法,用每秒能作一亿次的高速电子计算机计算至少要一万年,因此有必要进一步研究行列式,找出切实可行的计算方法. 由上节知道,行列式中零元素越多,非零项越少,三角形行列式只有一项,能否将行列式中非零元素化为零,比如化成三角形行列式,为此我们研究行列式的性质,利用性质化简行列式.

一、行列式的性质

先介绍转置行列式:将行列式 D 的行、列互换,得到行列式 D',称 **D' 为 D 的转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D'$$

证 设

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

有 $a_{ij}=b_{ji}$

将 D' 按定义 1′展开,得

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_nn} \\ &= \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=D \end{aligned}$$

性质 1 告诉我们行列式中“行”与“列”的地位相同,凡对行列式的行成立的性质,对行列式的列也一定成立,反之亦然. 下面只讨论行列式有关行的性质.

性质 2 行列式某行的公因子可以提出去,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据定义 1

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=\text{右边} \end{aligned}$$

推论 1 若 D 中有一行为零,则 $D=0$.

性质 3 若 D 中某行各元素分别为两数的和,则 $D=D_1+D_2$,其中 D_1 和 D_2 的这一行各元素分别为第一个数和第二个数,D_1 和 D_2 的其余各行与 D 对应的各行相同,即