纪哲锐 编著

Digitized Classical Mechanics

数字化经典力学

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

Digitized Classical Mechanics

数字化经典力学

纪哲锐　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书的目的是使传统的“理论力学”课程全盘电脑化。

本书大部分篇幅是 MathCAD 应用程序。如果把说明文字视为程序的注释，也可以说全书就是 MathCAD 应用程序。其中的数学公式分两种情况 (1) 可运行的 MathCAD 应用程序；(2) 关闭了运算功能的 MathCAD 数学符号。读者可以根据上下文来区别这两种情况。本书要求读者具备 MathCAD 7 0 的入门知识。

本书是为大学理工科“理论力学”课程的学生和教师编写的参考书。有两大特点。

第一，全盘电脑化。全部例题是 MathCAD 应用程序。理论推导当然免不了用文字表述的论证，但其中也大量运用 MathCAD 的符号运算功能。MathCAD 的目前版本并没有变分定义和变分法计算功能，也没有对于矢量函数直接求微商和积分的功能。我们发展了新的方法，使得原来不能做的事情现在可以做了。

第二，关注素质教育。传统的教科书力图把理论讲得完美无缺。但理论的本来面目并非完美无缺，否则，就没有后来的变革。传统的教科书并不适合于培养具有创造性的人才，而仅仅适合于培养普通的人才。本书是试图改变这种状况的一个探索。

本书的配套光盘提供书中全部源程序，附送《MathCAD 电子教程》，《经典力学动画集》。

本书可以作为大学理工科“理论力学”课程的教材或参考书，也可作为其他相关课程的参考书。

书　名：数字化经典力学
作　者：纪哲锐　编著
出版者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：清华大学印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：19.25　字数：439 千字
版　次：2001 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-900635-94 7
印　数：0001～3000
定　价：38.00 元

序　　言

数字化潮流席卷全球。无纸化办公、无纸化贸易阔步猛进。学生网上交作业也不是新闻了。可是在教学的许多领域，传统的“纸＋笔”模式仍然占据统治地位。

经典力学有极其广阔的应用领域。现代计算机已经成功地应用于力学应用的方方面面。教学中的计算机应用滞后是很明显的。本书的目的是使传统的“理论力学”课程全盘电脑化。

MathCAD 可以让一篇科技论文看起来与通常的科技论文一样，但其中的数学公式本身也是计算机指令，你一边读，它一边在快速计算，甚至不懂 MathCAD 而懂得相关科技的人员，也能看懂八九成。当然，要完全看懂，就要懂得 MathCAD。

本书的大部分篇幅是 MathCAD 应用程序。当然，如果把说明文字视为程序的注解，也可以说全书就是 MathCAD 应用程序。其中的数学公式分两种情况：(1) 可运行的 MathCAD 应用程序；(2) 关闭了运算功能的 MathCAD 数学符号。读者可以根据上下文来区别这两种情况。本书要求读者具备 MathCAD 7.0 的入门知识。建议参考作者的另一本书。[①]

本书是为大学理工科“理论力学”课程的学生和教师写的参考书。有两大特点。

第一，全盘电脑化。全部例题是 MathCAD 应用程序。理论推导当然免不了用文字表述的论证，但其中也大量运用 MathCAD 的符号运算功能。MathCAD 的目前版本并没有变分定义和变分法计算功能，也没有对于矢量函数直接求微商和积分的功能。我们克服了这些困难，发展了新的方法，使得原来不能做的事情现在可以做了。我们倡导学生通过网络向老师交作业，所以顺便介绍排版的方法。目前版本的 MathCAD 有几十个常用中国字不能输入。所以，如果要用中文写注释，最好的办法是：(1) 把已经满意的 MathCAD 应用程序以 RTF 格式存盘；(2) 用 Word 2000 调入这个 RTF 格式文件，再次编辑并加入注释，处理插图也很方便。本书的排版就是用这个办法做的。电算不是为了代替学生的思维，而是为了节省一部分烦琐、重复频繁的思维，腾出时间来从事创造性的思维。学生必须注意培养自己的笔算能力，才能够更好地进行电算。没有笔算能力的学生很难做电算。这就是笔算与电算之间的关系。电算还可以大大降低出错率。

第二，关注素质教育。传统的教科书力图把理论讲得完美无缺。但理论的本来面目并非完美无缺，否则，就没有后来的变革。在大学物理系学物理是一个不断上当受骗的过程。学经典力学觉得她十分完美。学了狭义相对论就觉得从前老师骗了我。学了量子力学再次觉得从前学的基本概念被推翻了。传统的教科书不适合于培养具有创造性的人才，而仅仅适合于培养普通的人才。我们同意：教科书不适宜过多地谈论科学史和哲学。但“过多”的界限在哪里？本书用一定的篇幅引用名家的论述，也无可避免地带有作者的

---

① MathCAD Plus 6 0 快速入门及应用 清华大学出版社，1998 年 3 月

偏爱。偏爱可以解释为“有个性”，这是一个褒义词。而创造性往往是“有个性”的一种飞扬。新的、革命性的理论是从旧理论的薄弱环节找到突破口的，而传统的教科书则尽力去掩盖乃至美化这些薄弱环节。正如爱因斯坦所说：“牛顿自己比他以后许多博学的科学家都更明白他的思想结构中固有的弱点。这一事实时常引起我对他的深挚的敬佩。”[①]

本书的配套光盘提供书中全部源程序，附送《MathCAD 电子教程》，《经典力学动画集》。作者和出版社同志们的共同努力是本书质量优良的保证。在此，对清华大学出版社同志们一丝不苟的工作表示衷心的感谢。

本出版物得到“国家自然科学人才培养基金(中山大学物理系)”资助。

作者

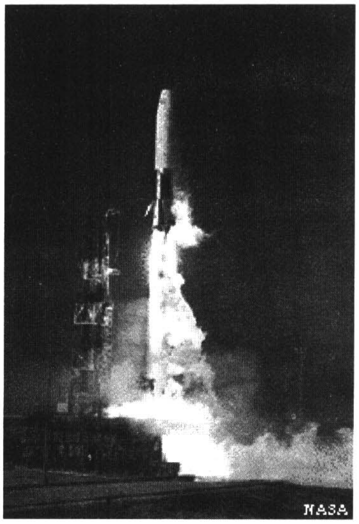
E Mail：stsjzr@zsu. edu. cn

① 牛顿力学 见 爱因斯坦文集，第一卷，226 页

目　　录

第 1 篇

矢 量 力 学



原书空白页

第 1 章　力学基本原理与计算机方法

牛顿的《自然哲学的数学原理》是力学发展的光辉里程碑。由拉格朗日和哈密顿等人所发展的分析力学，虽然只是方法上的进步，也可称得力学发展的第二块里程碑。因为它揭示了力学理论的普遍数学形式也适用于整个物理学。有趣的是，拉格朗日以"全书没有一张图"来象征他的分析力学著作把分析方法推到了顶峰。在世纪之交的时候，我们迎来了经典力学发展的新时代：数字化经典力学时代。也许我们不必以"全书每页都有图"来与拉格朗日的著作形成强烈对照，但是，我们有力学实验的计算机模拟、力学动画集、力学程序包和多媒体光盘。拉格朗日"没有一张图"，我们则"不用一支笔"。我们彻底换了笔，只需要一部多媒体电脑加一部打印机。

实际上，在力学应用的先进领域如高层建筑、道路交通与桥梁、航天等部门，早已把大量工作电脑化。现在力学教学中大量引入计算机方法的时机已经成熟。与通常的电脑化教学的含义不同，我们所说的不仅仅是力学教学方法的电脑化，而是力学学习内容本身的电脑化。

可以把经典力学划分为矢量力学、分析力学、相对论力学三个阶段。"矢量力学"这一名称是相对于分析力学而言的。分析力学以前的力学以矢量代数和矢量分析为数学工具，所以称为"矢量力学"，分析力学则以广义坐标和变分法为数学工具。因此，把前者称为"矢量力学"，以示区别。经典力学是相对于量子力学而言的，《数字化经典力学》试图把现代计算机方法应用到上述的三个阶段，不过，对于相对论力学只作比较简单的介绍。前面已经指出，力学教学已经滞后于力学应用，本书的目的是迎接数字化经典力学的新时代。

1.1　矢量代数和矢量分析

"数学是这样一门科学，它只研究按一定规则建立起来的给定对象之间的逻辑关系。"①

"数学既然是一种同经验无关的人类思维的产物，它怎么能够这样美妙地适合实在的客体呢？那末，是不是不要经验而只要思维，人类的理性就能够推测到实在事物的性质呢？""照我的见解，这个问题的答案扼要说来是：只要数学的命题是涉及实在的，它们就不是可靠的；只要它们是可靠的，它们就不涉及实在。我觉得，只有通过那个在数学中叫做公理学(axiomatics)的趋向，这种情况的明晰性才成为人所共知。"②

我们假定读者已经学过矢量代数和矢量分析。本节既是这些知识的一个小结，又是

① 非欧几里得几何和物理学 见 爱因斯坦文集，第一卷，204 页。

② 几何学和经验 见 爱因斯坦文集，第一卷，136 页。

从键盘输入公式的一个示范。本书所用的开发工具是 MathCAD Professional 7.0，因此要求读者学会在该环境中输入本节的数学公式。

矢量代数运算符合如下规则：(在下面，大写字母表示矢量，小写字母表示标量。今后，在每一行的后部若出现※号，则表示对左边内容的注释)

ORIGIN=1 ※矢量下标从1开始。而默认设置是从0开始。 **formula.mcd**

- 加法交换律：$A+B=B+A$
- 加法结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$
- 乘法结合律：$p\cdot(q\cdot A)=(p\cdot q)\cdot A, (p\cdot q)\cdot A=q\cdot(p\cdot A)$
- 加法对于乘法的分配律：$(p+q)\cdot A=p\cdot A+q\cdot A$
- 乘法对于加法的分配律：$p\cdot(A+B)=p\cdot A+p\cdot B$

MathCAD 系统已经设计成自动满足这些规则。

标量也就是数量。在一般教科书上说："矢量是有大小和方向的量，而标量则只有大小，但谈不上方向。"更深刻、更定量的说法是：看一个物理量在坐标变换下的变换性质(变或者不变、若变又如何如何变)，可以把所有物理量加以分类。最典型的坐标变换是坐标系转动。"坐标系转动"是指在坐标系转动之前、坐标系转动之后的两个不同坐标上，来描述同一个物理量，是否相同或不同。具体地说，矢量与标量的区别在于，例如：当坐标系 Oxyz 绕 Oz 轴转过一个角度 α 时，矢量的分量(矢量对于坐标轴的投影)将按一定规律改变(我们将在1.3节专门讨论这个问题)，而标量则保持不变。这里的坐标系转动常简称"坐标转动"，没有时间概念，仅仅是指转动前后在不同坐标系上的观察比较。MathCAD 在处理矢量和标量时有许多区别，要特别留意。我们将在适当的场合强调这些区别。

矢量以分量来表示：

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

其中的粗等号用 Ctrl+"="来输入，矩阵用 Ctrl+"m"来输入，而矢量下标用 A[n 来输入。粗等号也称为逻辑等号，它与赋值号不同，系统并不把它"记住"，但是，可以对于逻辑等式施加符号运算。

有时为了节省篇幅，我们借助矢量的倒置 A^T 来表示矢量 A，即 $A^T=[A_1\ A_2\ A_3]$

矢量的模：$|A|=\sqrt{(A_1)^2+(A_2)^2+(A_3)^2}$，单位矢量：$a=\dfrac{A}{|A|}$

矢量的标积定义为 $A\cdot B=\sum_{i=1}^{3}A_i\cdot B_i$ 或者 $A\cdot B=|A|\cdot|B|\cdot\cos(\theta)$，其中 θ 是矢量 A 与矢量 B 的夹角，满足如下运算规则：

- 标乘的交换律：$A\cdot B=B\cdot A$
- 标乘对加法的结合律：$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
- 乘法对标乘的结合律：$p\cdot(A\cdot B)=(p\cdot A)\cdot B\quad=A\cdot(p\cdot B)\quad=(A\cdot B)\cdot p$

定义下标变量：$i:=1..3\quad j:=1..3$ ※在 MathCAD 中称为 range variable，即域变量。

单位矩阵　$\delta_{i,j} := if(i = j, 1, 0)$　具体来说：$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

※请注意输入方法：“:=”的含义是定义一个变量或函数。“=”是显示内存中已有的值，如没有值则出错。“..”表示变化范围。这些符号分别用冒号“:”，等号“=”，分号“;”来输入。

直角坐标系的基矢量应满足关系：$e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}$，满足此关系的基矢量称为正交归一化基(矢量)。

矢量的矢量积(也叫矢积)定义如下：$A \times B = \left| \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \right|$

※粗等号右边应理解为矩阵的行列式。可以用系统的功能把行列式展开：

$$\left| \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \right| \to e_1 \cdot A_2 \cdot B_3 - e_1 \cdot A_3 \cdot B_2 - A_1 \cdot e_2 \cdot B_3$$

$$+ A_1 \cdot e_3 \cdot B_2 + B_1 \cdot e_2 \cdot A_3 - B_1 \cdot e_3 \cdot A_2$$

收集同类项得到：

$$(A_2 \cdot B_3 - A_3 \cdot B_2) \cdot e_1 + (B_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot B_3) \cdot e_2 + (A_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot A_2) \cdot e_3$$

其中的矢积符号用 Ctrl+“*”输入；符号“→”用 Ctrl+“.”输入。矢积仅对于 3 维矢量有定义，而且满足下列关系：

- 矢积反对易：$A \times B = -B \times A$
- 矢积对加法的分配律：$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- 矢积对标乘的结合律：$p \cdot (A \times B) = (p \cdot A) \times B$ 等于 $A \times (p \cdot B)$ 等于 $(A \times B) \cdot p$
- 标积与矢积的混合运算应定义为：

$$A \cdot (B \times C) = \left| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \right|$$　※粗等号右边应理解为矩阵的行列式。

可以用系统的功能把行列式展开：

$$\left| \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \right| \to A_1 \cdot B_2 \cdot C_3 - A_1 \cdot B_3 \cdot C_2 - B_1 \cdot A_2 \cdot C_3 + B_1 \cdot A_3 \cdot C_2$$

$$+ C_1 \cdot A_2 \cdot B_3 - C_1 \cdot A_3 \cdot B_2$$

收集同类项得到：

$$(B_2 \cdot C_3 - B_3 \cdot C_2) \cdot A_1 + (C_1 \cdot B_3 - B_1 \cdot C_3) \cdot A_2 + (B_1 \cdot C_2 - C_1 \cdot B_2) \cdot A_3$$

- 标积与矢积的混合运算：$A \times (B \times C) = B \cdot (A \cdot C) - C \cdot (A \cdot B)$
- 符合轮换规则：$B \times (C \times A) = C \cdot (B \cdot A) - A \cdot (B \cdot C)$

矢量的微商定义为：

$$\frac{d}{du}A = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{A(u+\Delta u) - A(u)}{\Delta u}$$

或者等效地 $\frac{d}{du}A = \begin{bmatrix} \frac{d}{du}A_1 \\ \frac{d}{du}A_2 \\ \frac{d}{du}A_3 \end{bmatrix}$ 也可写成 $\left(\frac{d}{du}A\right)^T = \left[\frac{d}{du}A_1 \quad \frac{d}{du}A_2 \quad \frac{d}{du}A_3\right]$

矢量的 n 阶微商定义为：$\left(\frac{d^n}{du^n}A\right)^T = \left[\frac{d^n}{du^n}A_1 \quad \frac{d^n}{du^n}A_2 \quad \frac{d^n}{du^n}A_3\right]$

通常把矢量函数的微商与积分运算方法称为矢量分析。矢量函数的微商满足以下法则：

$\frac{d}{du}(p \cdot A) = p \cdot \left(\frac{d}{du}A\right) + \left(\frac{d}{du}p\right) \cdot A$　　简记为：$(p \cdot A)' = p \cdot A' + p' \cdot A$

$\frac{d}{du}(A \cdot B) = A \cdot \frac{d}{du}B + \left(\frac{d}{du}A\right) \cdot B$　　简记为：$(A \cdot B)' = A \cdot B' + A' \cdot B$

$\frac{d}{du}(A \times B) = A \times \frac{d}{du}B + \left(\frac{d}{du}A\right) \times B$　　简记为：$(A \times B)' = A \times B' + A' \times B$

习惯上用撇号表示微商，这种写法符合传统的习惯，但这种约定写法并不具有运算功能。请记住：撇号的键位在键盘的左上方，在紧靠 Esc 键的下方。撇号是可用于变量名的特殊字符，特别有用，请不要滥用！

矢量函数的不定积分定义为：

$$\int A(u)du = \begin{bmatrix} \int A(u)_1 du \\ \int A(u)_2 du \\ \int A(u)_3 du \end{bmatrix}$$

矢量函数的积分满足以下法则：

$$\int \left(\frac{d}{du}A(u)\right)du = A(u) + C$$

$$\int_a^b \left(\frac{d}{du}A(u)\right)du = A(b) - A(a)$$

请牢牢记住：在目前版本的 MathCAD 中，可以直接对标量函数求微商和积分，但不可以直接对矢量函数求微商和积分。但是，对于数字化经典力学来说，求矢量函数的微商和积分是绝对必要的。出路何在？目前，我们借助于用户自定义函数来求矢量函数的微商和积分，而展望未来，更高性能的计算机将容许 MathCAD 的设计者把直接对矢量函数求微商和积分的能力变成 MathCAD 的内置功能。我们不愿意因等待而停步不前。我们的选择是进行第二次开发。愿读者和我们一起来享受创造的乐趣。

质点的位置矢量（向径）、速度和加速度的定义：

$r(t)^T=(x(t)\ y(t)\ z(t))\quad r'(t)^T=(x'(t)\ y'(t)\ z'(t))\quad r''(t)^T=(x''(t)\ y''(t)\ z''(t))$

$r(t)^T=(x(t)\ y(t)\ z(t))\quad v(t)^T=(x'(t)\ y'(t)\ z'(t))\quad a(t)^T=(x''(t)\ y''(t)\ z''(t))$

请注意把单撇号视为普通的字符，用来代表微商，容易与习惯的数学符号保持一致。但是单撇号并不能执行实际的微商运算。实际计算微商时必须使用$\frac{d}{dx}$符号。

时间导数的定义：$\frac{d}{dt}r(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}$　等于 $v(t)$

时间导数的定义：$\frac{d}{dt}v(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$　等于 $a(t)$

空间曲线切向的单位矢量：$\vec{T}=\frac{d}{ds}\vec{r}$

空间曲线主法向的单位矢量：$\vec{N}=R\cdot\frac{d}{ds}\vec{T}$　其中 R 是在同一点的曲率半径。

空间曲线次法向的单位矢量：$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$

加速度在本体坐标系上的分解：$\vec{a}=\left(\frac{d}{dt}v\right)\cdot\vec{T}+\frac{v^2}{R}\cdot\vec{N}$

我们用 e_1,e_2,e_3 代表 x,y,z 方向上的单位矢量。矢量算符：

$$\nabla=e_1\cdot\frac{\partial}{\partial x}+e_2\cdot\frac{\partial}{\partial y}+e_3\cdot\frac{\partial}{\partial z}$$

标量函数的梯度：

$$\nabla U(x,y,z)=\left(e_1\cdot\frac{\partial}{\partial x}+e_2\cdot\frac{\partial}{\partial y}+e_3\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)U$$

或者

$$\nabla U(x,y,z)=e_1\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+e_2\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+e_3\cdot\frac{\partial U}{\partial z}$$

矢量函数的散度：

$$\nabla\cdot A(x,y,z)=\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}$$

矢量函数的旋度：

$$\nabla\times A=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2 & A_3\end{bmatrix}$$

或者

$$\nabla\times A=e_1\cdot\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+e_2\cdot\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+e_3\cdot\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

如果用 x_1,x_2,x_3 代替 x,y,z，则更容易看出规律性：

$$\nabla\times A=e_1\cdot\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)+e_2\cdot\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)+e_3\cdot\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)$$

请注意，要使本节中写出的数学公式用于 MathCAD 计算，还必须做适当的改变。后文(1.5 节)将会详细介绍。