高等数学导读

主编　左宗明

编写　左宗明　蒋　声　沈宗华

江苏科学技术出版社

高等数学导读

主编 左宗明
编写 左宗明 蒋 声 沈宗华

江苏科学技术出版社

（苏）新登字第002号

高等数学导读
左 宗 明 主编

出版发行：江苏科学技术出版社
经 销：江苏省新华书店
印 刷：常熟市印刷二厂

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 32.5 字数 806,000
1992 年 3 月第 1 版 1992 年 3 月第 1 次印刷
印数 1—2,000 册

ISBN 7—5345—1333—2

O·89 定价：14.50元

责任编辑 沈绍绪

致 读 者

社会主义的根本任务是发展生产力，而社会生产力的发展必须依靠科学技术。当今世界已进入新科技革命的时代，科学技术的进步，不仅是世界经济发展、社会进步和国家富强的决定因素，也是实现我国社会主义现代化的关键。

科技出版工作肩负着促进科技进步，推动科学技术转化为生产力的历史使命。为了更好地贯彻党中央提出的“把经济建设转到依靠科技进步和提高劳动者素质的轨道上来”的战略决策，进一步落实中共江苏省委、江苏省人民政府作出的“科技兴省”的决定，江苏科学技术出版社于1988年倡议筹建江苏省科技著作出版基金。在江苏省人民政府、省委宣传部、省科委、省新闻出版局负责同志和有关单位的大力支持下，经省政府批准，由江苏省科学技术委员会、省出版总社和江苏科学技术出版社共同筹集，于1990年正式建立了“江苏省金陵科技著作出版基金”，用作支持自然科学范围内的符合条件的优秀科技著作的出版补助。

我们希望江苏省金陵科技著作出版基金的建立，能为优秀科技著作在江苏及时出版创造条件，以通过出版工作这一“中介”，充分发挥科学技术作为第一生产力的作用，更好地为我国社会主义现代化建设和“科技兴省”服务，并能带动提高我省科技图书质量，促进科技出版事业的发展和繁荣。

建立出版基金是社会主义出版工作在改革中出现的新生事物，期待得到多方面给予热情扶持，在实践中不断总结经验，使它逐步壮大和完善。更希望通过多种途径扩大这一基金，以支持更多的优秀科技著作的出版。

这次首批获得江苏省金陵科技著作出版基金补助出版的科技著作的顺利问世，还得到中国核工业华兴建设公司的赞助和参加评审工作的教授、专家的大力支持，特此表示衷心感谢！

江苏省金陵科技著作出版基金管理委员会

1990年10月

前　言

高等数学是工科大学的一门重要基础课，世界各国都很重视这门课程的教学和改革。编写《高等数学导读》有双重目的：一是帮助普通高校、电视大学、职业大学、夜大学等工科类大学生以及函授学员、自学青年掌握高等数学的基本内容、思想和方法，切实打好基础；二是反映80年代以后中外高等数学教学的新水平，适当介绍高等数学中的一些新观点、新方法和新成果，注入时代气息，弥补传统教材的不足。

为了体现本书的编写目的，我们在编写过程中特别致力于以下几点：

第一，学习指导，名副其实。为了使本书成为名副其实的学习指导书，取材时充分注意由浅入深、由易到难、循序渐进的原则；并且对教材的重点、难点，特别是理解上容易混淆的内容、论证中容易失误的环节、计算时容易出错的问题，力求叙述细致，分析透彻；同时注意对概念上、逻辑上和计算上常见的错误，进行剖析，以期为读者真正释疑解惑，达到化难为易、加深理解的目的。

第二，居高临下，深入浅出。为了使本书既具有较高的学术水平和理论深度，又要使读者易学、易懂，本书一方面注意基本知识在内容上的拓广和深化，对理论证明阐述严谨，推导周密；另一方面注意抽象理论在讲解时的通俗化和具体化，对基本概念叙述清晰，解释准确；同时，既注意介绍传统内容的发展和变化，又适当引进一些新知识、新成果，力求使本书有多种层次，兼顾普及与提高，以适应不同要求的读者的需要。

第三，内容丰富，观点新颖。为了反映80年代以后高等数学

教学的新水平，本书广泛参考中外文有关论著，结合作者从教多年的丰富经验和体会，荟萃了高等数学教学中提出的许多新问题和新观点，其中包括与传统观点针锋相对的、作者自己的许多新见解；在处理手法上也不蹈常规。本书共分三篇计十三章，每章分若干节，各节按基本内容、疑难解析、例题选解、小结与自我检查题编写；基本内容简明扼要，提纲挈领，疑难解析设疑答问，切中要害，例题选解启迪思维，开阔思路，小结承上启下，条理分明，自我检查题题型多变，题目典型；全书力图为读者提供丰富的知识和信息。

第四，提高能力，注重实效。为了帮助读者提高分析问题、解决问题的能力，全书选编了大量的例题和自我检查题，其中相当数量的题目都给出了多种解法，对于大部分例题的解答过程，都特别注重思路的剖析，方法的探索和技巧的训练，并且以“注”的形式整理解题经验，归纳解题规律，介绍解题技巧，希望在启迪思维、开阔思路方面对读者有所帮助，使读者的解题能力有实际的提高。

本书由左宗明主编，由左宗明、蒋声、沈宗华编写，具体分工如下：

第一篇	一元函数微积分	左宗明
第二篇	无穷级数	蒋　声
第三篇	多元函数微积分	沈宗华

本书首批获得金陵科技著作出版基金资助出版，我们感到非常荣幸！对金陵科技著作出版基金管理委员会以及参加评审工作的教授、专家支持本书的出版，我们表示衷心的感谢！我们还要对一直关心、支持本书出版并为本书的编辑加工付出辛勤劳动的江苏科技出版社理科室副主任沈绍绪同志，表示衷心的感谢！

由于编者的水平与经验所限，书中的缺点或错误在所难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

1991年10月

目　　录

第一篇　一元函数微积分

第二篇　无穷级数

第三篇　多元函数微积分

第一篇　一元函数微积分

第 1 章

变量与函数

§1 函数概念

一、基本内容

1. 集合

通常用大写字母 A、B、C 等表示集合，而用小写字母 a、b、c 等表示集合中的元素.

$a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素，而 $a \overline{\in} A$ 表示 a 不是 A 的元素.

习惯上用 N、Z、Q 与 R 分别表示自然数集、整数集、有理数集与实数集.

若集合 A 由具有某种性质 p 的元素 x 所组成，则将集合 A 写为 $A=\{x \mid x$ 具有性质 $p\}$. 例如，$A=\{x \mid x^2-1=0\}$ 表示 A 由 $x^2-1=0$ 的根 1、-1 所组成，即 $A=\{1,-1\}$.

若 $x \in A \Longrightarrow x \in B$[1]，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subseteq B$；若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A=B$；若 $A \subseteq B$ 但 A 与 B 不相等(记为 $A \neq B$)，则称 A 为 B 的真子集.

---

1) 记号"$A \Longrightarrow B$"表示"A 推出 B"；"$A \Longleftrightarrow B$"表示"A 推出 B 且 B 推出 A".

不含任何元素的集合称为空集，记为ϕ，如集合$\{x|x\in R, x^2+1=0\}$就是空集．空集是任何集合的子集．

集合$\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$称为集合A与B的并集，记为$A\cup B$；集合$\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$称为集合A与B的交集，记为$A\cap B$；集合$\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in}B\}$称为集合A与B的差集，记为$A\setminus B$．

如果分别用圆表示集合A与B，则下面的图 1-1至图 1-3 中的阴影部分就分别表示集合A与B的并集、交集和差集．

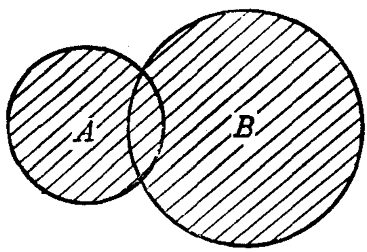

图 1-1

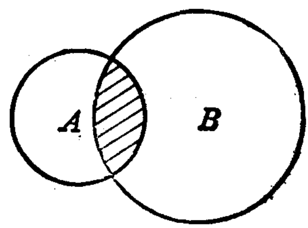

图 1-2

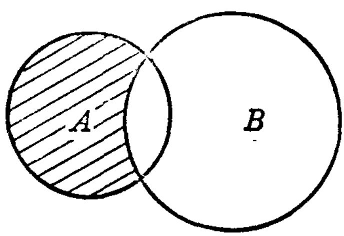

图 1-3

2．绝对值

a的绝对值记为$|a|$，定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & 若\ a\geqslant 0 \\ -a, & 若\ a<0 \end{cases}$$

即a的绝对值，当$a\geqslant 0$时等于a本身，当$a<0$时等于a的相反数．

由绝对值的定义可得以下基本性质：

(1) $|a|\geqslant 0$，且$|a|=0\Longleftrightarrow a=0$；

(2) 若$h>0$，则

$|a|\leqslant h(|a|<h)\Longleftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h(-h<a<h)$，

$|a|\geqslant h(|a|>h)\Longleftrightarrow a\leqslant -h, a\geqslant h(a<-h, a>h)$；

(3) $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，

$$|a \pm b \pm \cdots \pm l| \leqslant |a| + |b| + \cdots + |l|;$$

(4) $$|a \cdot b \cdot \cdots \cdot l| = |a| \cdot |b| \cdot \cdots \cdot |l|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. 区间与邻域

设 a、$b \in R$，且 $a<b$，则集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a, b)；而集合 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$. 从数轴上看，(a,b) 就是以 a、b 为端点的线段内部所有点的集合（图1-4），而 $[a,b]$ 则是集合 (a,b) 加上两个端点（图 1-5）.

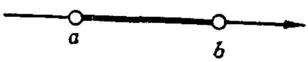

图 1-4

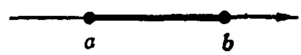

图 1-5

类似地可定义半开半闭区间：

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\} \text{ 或 } (a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

及无穷区间：

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}; \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\};$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in R\}.$$

以点 a 为中心而长度为 $2\delta(\delta>0)$ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a;\delta)$ 或简记为 $U(a)$；而半开半闭区间 $(a-\delta, a]$ 与 $[a, a+\delta)$ 分别称为点 a 的左邻域与右邻域，记为 $U_-(a;\delta)$ 与 $U_+(a;\delta)$ 或 $U_-(a)$ 与 $U_+(a)$. $U(a)$、$U_-(a)$ 与 $U_+(a)$ 的几何表示如图 1-6 所示：

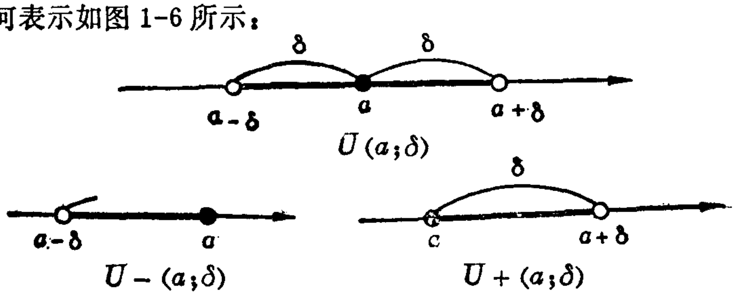

图 1-6

集合 $U(a)\setminus\{a\}$（即 $U(a)$ 中除去点 a）记为 $U(\bar{a})$，称为点 a 的空心邻域；$U_-(\bar{a})$、$U_+(\bar{a})$ 的意义可同样理解.

4. 有界集合与无界集合

设 $A\subseteq R$，若存在实数 M（或 m），使得

$$A\subseteq(-\infty,M]\text{（或 }A\subseteq[m,+\infty)\text{）}$$

则称 M（或 m）为集合 A 的上（或下）界，且称集合 A 有上（或下）界；若集合 A 既有上界 M 又有下界 $m(m<M)$，则称 A 为有界集合，这时

$$A\subseteq(-\infty,M]\cap[m,+\infty)=[m,M]$$

特别地，若对集合 A，存在 $M>0$，使对一切 $x\in A$，有 $|x|\leqslant M$，则 A 是有界集合.

非有界集合称为无界集合.

5. 函数概念

例 1 假定物体在离地面高 h 厘米处由静止状态自由下落，经过 T 秒落到地面. 在物体下落过程中，如果从开始下落处计算下落的距离 s，则 s 与下落经历的时间 t 有下述关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad ①$$

式中 g 为重力加速度，它在下落过程中保持一定的数值（称为常量），而 t 和 s 在下落过程中可取不同的数值（称为变量），t 的取值范围是 $[0,T]$，对每个 $t_0\in[0,T]$，按照①式有一个确定的 s 值 $s_0=\frac{1}{2}gt_0^2$ 与之对应，而 s 的取值范围为 $[0,h]$.

例 2 按邮章规定，国内平信根据信件重量（不得超过 2000 克），按照下表标准收取邮资：

信件重量 w（单位：克）	$0<w\leqslant20$	$20<w\leqslant40$	……	$1980<w\leqslant2000$
邮资 m（单位：元）	0.20	0.40	……	20.00

这里，信件的重量 w 与邮资 m 都是变量，w 的取值范围是 $(0, 2000]$，对每个 $w\in(0,2000]$，按照邮资标准表有一个确定的 m 值与之对应，而 m 的取值范围是集合 $\{0.20, 0.40, \cdots, 20.00\}$.

例 3 我国目前生产的气温计，可度量 -35℃ 至 50℃ 之间的气温．一天之中任何一个时刻的气温可从温度计上直接读出．气象站里用一种电子装置可将一天之中各个时刻的气温自动地描绘成一条气温曲线(图 1-7)，图中横轴表示时间 t，纵轴表示气温 T，这里时间 t 与气温 T 都是变量，t 的取值范围为 $[0,24]$ (单位：小时)，而对每一 $t_0\in[0, 24]$，曲线上都有以 t_0 为横坐标的一点 P，其纵坐标 T_0 就是对应于时刻 t_0 的气温值，T 一般在区间 $[-35,50]$ 内取值.

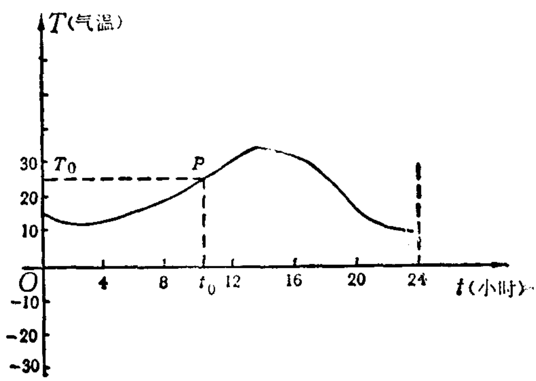

图 1-7

上述诸例中变量之间的依赖关系有一个共同的特点，即其中一变量可在某一数集内取值，并且对它取得的每一个值，另一个变量按照某种对应法则(在例 1 中指式①，在例 2 中指的是邮资标准表，在例 3 中指图 1-7)相应地取一个确定的值．变量之间这种依赖关系的数学抽象就是函数概念.

函数概念　给定二实数集 D 与 M．若有某种对应法则 f，使每个变量 $x\in D$，有唯一确定的变量 $y\in M$ 与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$；其中 D 称为函数的定义域，D 中任一数 x_0 根据对应法则 f 所对应的变量 y 的值记为 $f(x_0)$，称为函数在 x_0 的函数值；全体函数值的集合 $\{y\mid y=f(x),$