《高等数学》同步练习册（下册）

《高等数学》同步练习册编写组

高等教育出版社

170

《高等数学》同步练习册

（下册）

《高等数学》同步练习册编写组

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学》同步练习册.下册/谢惠扬等编著.
北京:高等教育出版社,2002.7
ISBN 7-04-010816-X

Ⅰ.高… Ⅱ.谢… Ⅲ.高等数学-高等学校-习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第028740号

《高等数学》同步练习册(下册)
《高等数学》同步练习册 编写组

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2002年7月第1版
印　　张	6.75	**印　　次**	2002年7月第1次印刷
字　　数	160 000	**定　　价**	9.50元

前　言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步练习册,分为上下册。内容包括:一元函数微分学、一元函数积分学以及空间解析几何与向量代数;多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数和微分方程。

本书特点:

1. 本书以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序,针对书上每一个知识点,我们在每一节中配备了一定量的基本练习题和提高题,每一章最后配备一套测验题。在上、下册的最后还各配备了两套模拟期终考试题。旨在帮助同学们迅速而全面地掌握《高等数学》的内容。

2. 本书的形式为学生的作业本,一方面由于比较规范,便于任课教师批改;另一方面,减轻了学生抄作业题的负担,同时也便于作业本的保留。

3. 本书不配备相应的答案或解答。旨在培养学生的独立思考能力和解决问题的能力。

本书是长期从事工科高等数学教师们对教学的一个重要环节——批改作业——的一个改革尝试,希望本书的出版,能对工科高等院校的学生和数学教师们具有切实的帮助。

本书适用于工科高等院校的本科生。

本套练习册第一章由北京林业大学谢惠扬编写,第二章由石油大学(北京)柴志明编写,第三章由北京林业大学徐凤琴编写,第四章由北京林业大学王小春编写,第五章由北京林业大学郎霞编写,第六章由石油大学(北京)谭立云编写,第七章由石油大学(北京)武清编写,第八章由华北电力大学何凤霞编写,第九章由华北电力大学吕蓬编写,第十章由华北电力大学邱启荣编写,第十一章由华北电力大学徐英凯编写,第十二章由华北电力大学彭武安编写。上册模拟考试题由北京林业大学李霞编写,下册模拟考试题由华北电力大学邱启荣编写,全书由谢惠扬统稿。

由于编者水平所限,错误在所难免,恳请同仁不吝指出,编者不胜感谢。

《高等数学》同步练习册编写组

2002 年 6 月

目　　录

第八章　多元函数微分法及其应用

重点：多元函数概念、多元函数极限、偏导数、全微分、极值.

难点：多元复合函数求导、隐函数求导、方向导数与梯度.

第一节　多元函数的基本概念

1. 求定义域.

(1) $u = \arcsin\ln(xy)$ ______________.

(2) $u = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$ ______________.

(3) $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$ ______________.

2. 求极限.

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x + y)\sin\dfrac{1}{x}\sin y$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{xy}}$.

(4) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin(xy)\cos(xy)}{y}$.

3. 判断下列极限是否存在,若存在,求出极限值.

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x - y^2}{x}$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$.

4. 下列函数在(0,0)是否连续?

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy = 0, \\ 0, & xy \neq 0. \end{cases}$

第二节　偏导数

1. 求下列函数的偏导数.

(1) $z = (1 + xy)^y$.

(2) $u = \sin(xyz) + x^2y + 3z^2 + 1$.

(3) $u = \arctan(x - y)^z$.

2. 求 $\begin{cases} z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \\ x = 1 \end{cases}$ 在 $(1,1,\sqrt{3})$ 的切线与 y 轴正向之间夹角.

3. $z = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$，　求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求 $f_x(x,1)$.

5. 下列函数在(0,0)是否连续?是否可导(偏导)?说明理由.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

第三节　全微分

1. 求下列函数的全微分.

(1) $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$.　　　　(2) $u = x^{yz}$.

2. 已知边长为 $x = 6\text{m}$ 与 $y = 8\text{m}$ 的矩形,如果 x 边增加 5cm,而 y 边减少 10cm,问这个矩形的对角线变化怎样?(用微分近似计算).

3. 讨论 $f(x,y)$ 在(0,0) 的连续、可导(偏导) 及可微性.

(1) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0. \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$

第四节　多元复合函数的求导法则

1. 求函数的导数$\frac{dz}{dx}$.

(1) $z = u^2 v^3 w, u = 2x + 1, v = x^2, w = 3x - 1$.

(2) $z = \arcsin \frac{x}{y}, y = \sqrt{x^2 + 1}$.

(3) $z = u^v, u = f(x), v = g(x)$,($g(x)$. $f(x)$ 可导.)

2. 求函数对自变量的偏导数.

(1) $z = \frac{u}{v}, u = x\cos y, v = y\cos x$.

(2) $z = e^{xy}, x = \ln\sqrt{u^2 + v^2}, y = \arctan\frac{u}{v}$.

(3) $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$.

(4) $u = f(x + xy + xyz)$.

3. $z = f(x + at, y + bt)$，证明：$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. $z=f(x^2+y^2)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.（$f$ 有二阶导数.）

5. $z=f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$，（$f$ 有二阶连续编导数）.

6. 设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导函数连续，而 $x=\frac{s-\sqrt{3}t}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}s+t}{2}$，证明：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{及} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

第五节　隐函数的求导公式

1. $z=z(x,y)$ 由 $x+y+z=\sin(xyz)$ 所确定,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. $z=z(x,y)$ 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 所确定,求$(0,0,1)$点的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

3. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续编导数,证明:由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

4. 若 $F(x,y,z)=0$,证明:$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1$.

5. 已知 $y=\varphi(x+ut)+\psi(x-ut)$,证明:$\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=u^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

6. 求由下列方程组所确定函数的导函数.

(1) $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

(2) 设 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-50=0 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

(3) $\begin{cases} u=f(ux,v+y) \\ v=g(u-x,v^2y) \end{cases}$,其中 f,g 具有一阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

(4) 设$\begin{cases} u^3 + xv = y \\ v^3 + yu = x \end{cases}$, 求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

7. 设 $y = f(x,t)$,而 t 是由方程$F(x,y,t) = 0$所确定的 x,y 的函数,其中,f,F 都具有一阶连续偏导数,试证明:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f_xF_t - f_tF_x}{f_tF_y + F_t}.$$

第六节 微分法在几何上的应用

1. 求螺旋线:$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ 在任意点处的切线及法平面方程,并证明曲线上任一点的切线与 Oz 轴交成定角.

2. 求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$ 在(x_0,y_0,z_0)处的切线及法平面方程.

3. 求球面:$x^2+y^2+z^2=4a^2$ 及柱面:$x^2+y^2=2ay$ 的交线在点 $M_0(a,a,\sqrt{2}a)$ 处的切线及法平面方程.

4. 求曲面 $z=y+\ln\frac{x}{y}$ 在(1,1,1)处的切平面及法线方程.

5. 证明:曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}(a>0)$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距之和为 a.

6. 证明:曲面 $F\left(\frac{y-b}{x-a},\frac{z-c}{x-a}\right)=0$ 上任一点的切平面通过某定点.