

《高等数学》

同步练习册 (下册)

《高等数学》同步练习册编写组

013-44
24



高等教育出版社

《高等数学》同步练习册

(下册)

《高等数学》同步练习册编写组



高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

《高等数学》同步练习册.下册/谢惠扬等编著.

北京:高等教育出版社,2002.7

ISBN 7-04-010816-X

I. 高… II. 谢… III. 高等数学-高等学校-习题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 028740 号

《高等数学》同步练习册(下册)

《高等数学》同步练习册 编写组

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588

免费咨询 800-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 北京民族印刷厂

开 本 787×1092 1/16

印 张 6.75

字 数 160 000

版 次 2002 年 7 月第 1 版

印 次 2002 年 7 月第 1 次印刷

定 价 9.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

前 言

本书是与同济大学《高等数学》第五版相配套的同步练习册,分为上下册。内容包括:一元函数微分学、一元函数积分学以及空间解析几何与向量代数;多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数和微分方程。

本书特点:

1. 本书以同济大学《高等数学》第五版的章节为顺序,针对书上每一个知识点,我们在每一节中配备了一定量的基本练习题和提高题,每一章最后配备一套测验题。在上、下册的最后还各配备了两套模拟期终考试题。旨在帮助同学们迅速而全面地掌握《高等数学》的内容。

2. 本书的形式为学生的作业本,一方面由于比较规范,便于任课教师批改;另一方面,减轻了学生抄作业题的负担,同时也便于作业本的保留。

3. 本书不配备相应的答案或解答。旨在培养学生的独立思考能力和解决问题的能力。

本书是长期从事工科高等数学教师们对教学的一个重要环节——批改作业——的一个改革尝试,希望本书的出版,能对工科高等院校的学生和数学教师们具有切实的帮助。

本书适用于工科高等院校的本科生。

本套练习册第一章由北京林业大学谢惠扬编写,第二章由石油大学(北京)柴志明编写,第三章由北京林业大学徐凤琴编写,第四章由北京林业大学王小春编写,第五章由北京林业大学郎霞编写,第六章由石油大学(北京)谭立云编写,第七章由石油大学(北京)武清编写,第八章由华北电力大学何凤霞编写,第九章由华北电力大学吕蓬编写,第十章由华北电力大学邱启荣编写,第十一章由华北电力大学徐英凯编写,第十二章由华北电力大学彭武安编写。上册模拟考试题由北京林业大学李霞编写,下册模拟考试题由华北电力大学邱启荣编写,全书由谢惠扬统稿。

由于编者水平所限,错误在所难免,恳请同仁不吝指出,编者不胜感谢。

《高等数学》同步练习册编写组

2002年6月

目 录

第八章 多元函数微分法及其应用	(1)	第十章 测验题	(53)
第一节 多元函数的基本概念	(1)	第十一章 无穷级数	(57)
第二节 偏导数	(3)	第一节 常数项级数的概念和性质	(57)
第三节 全微分	(5)	第二节 常数项级数的审敛法	(59)
第四节 多元复合函数的求导法则	(6)	第三节 幂级数	(63)
第五节 隐函数的求导公式	(9)	第四节 函数展开成幂级数	(65)
第六节 微分法在几何上的应用	(11)	第五节 函数的幂级数展开式的应用	(66)
第七节 方向导数与梯度	(13)	第六节 傅立叶级数	(67)
第八节 多元函数的极值及其求法	(15)	第七节 正弦级数和余弦级数	(68)
第八章 测验题	(17)	第八节 周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数	(70)
第九章 重积分	(21)	第十一章 测验题	(71)
第一节 二重积分的概念与性质	(21)	第十二章 微分方程	(75)
第二节 二重积分的计算	(24)	第一节 微分方程的基本概念	(75)
第三节 二重积分的应用	(29)	第二节 可分离变量的微分方程	(76)
第四节 三重积分的概念及其计算方法	(31)	第三节 齐次方程	(77)
第五节 利用球坐标和柱坐标计算三重积分	(33)	第四节 一阶线性微分方程	(79)
第九章 测验题	(37)	第五节 全微分方程	(82)
第十章 曲线积分与曲面积分	(41)	第六节 可降阶的高阶微分方程	(83)
第一节 对弧长的曲线积分	(41)	第七节 高阶线性微分方程	(84)
第二节 对坐标的曲线积分	(43)	第八节 二阶常系数齐次线性微分方程	(85)
第三节 格林公式及其应用	(45)	第九节 二阶常系数非齐次线性微分方程	(86)
第四节 对面积的曲面积分	(47)	第十二章 测验题	(89)
第五节 对坐标的曲面积分	(48)	《高等数学》(下) 模拟考试题(一)	(93)
第六节 高斯公式 通量与散度	(49)	《高等数学》(下) 模拟考试题(二)	(97)
第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度	(51)		

第八章 多元函数微分法及其应用

重点：多元函数概念、多元函数极限、偏导数、全微分、极值.

难点：多元复合函数求导、隐函数求导、方向导数与梯度.

第一节 多元函数的基本概念

1. 求定义域.

$$(1) u = \arcsin \ln(xy) \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) u = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)} \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) u = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}} \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 求极限.

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin y.$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)e^{xy}}.$$

$$(4) \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy) \cos(xy)}{y}.$$

3. 判断下列极限是否存在,若存在,求出极限值.

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y^2}{x}.$$

$$(3) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x + y}{x^2 + y^2}.$$

4. 下列函数在 $(0,0)$ 是否连续?

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy = 0, \\ 0, & xy \neq 0. \end{cases}$$

第二节 偏导数

2. 求 $\begin{cases} z = \sqrt{1+x^2+y^2} \\ x = 1 \end{cases}$ 在 $(1, 1, \sqrt{3})$ 的切线与 y 轴正向之间夹角.

1. 求下列函数的偏导数.

(1) $z = (1 + xy)^y$.

(2) $u = \sin(xyz) + x^2y + 3z^2 + 1$.

3. $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

(3) $u = \arctan(x - y)^z$.

4. 设 $f(x, y) = x + (y - 1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$, 求 $f_x(x, 1)$.

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

5. 下列函数在 $(0, 0)$ 是否连续? 是否可导(偏导)? 说明理由.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0. \end{cases}$$

第三节 全微分

1. 求下列函数的全微分.

$$(1) z = \arcsin \frac{x}{y}.$$

$$(2) u = x^y.$$

2. 已知边长为 $x = 6\text{m}$ 与 $y = 8\text{m}$ 的矩形, 如果 x 边增加 5cm , 而 y 边减少 10cm , 问这个矩形的对角线变化怎样?(用微分近似计算).

3. 讨论 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的连续、可导(偏导)及可微性.

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0. \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

(3) $z = u^v, u = f(x), v = g(x), (g(x) \cdot f(x) \text{ 可导.})$

第四节 多元复合函数的求导法则

1. 求函数的导数 $\frac{dz}{dx}$.

(1) $z = u^2 v^3 w, u = 2x + 1, v = x^2, w = 3x - 1.$

(2) $z = \arcsin \frac{x}{y}, y = \sqrt{x^2 + 1}.$

2. 求函数对自变量的偏导数.

(1) $z = \frac{u}{v}, u = x \cos y, v = y \cos x.$

$$(2) \quad z = e^{xy}, x = \ln \sqrt{u^2 + v^2}, y = \arctan \frac{u}{v}.$$

$$(4) \quad u = f(x + xy + xyz).$$

$$(3) \quad z = f(x^2 - y^2, e^{xy}).$$

$$3. \quad z = f(x + at, y + bt), \text{证明: } \frac{\partial z}{\partial t} = a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y}.$$

4. $z = f(x^2 + y^2)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. (f 有二阶导数.)

6. 设 $u = f(x, y)$ 的所有二阶偏导函数连续, 而 $x = \frac{s - \sqrt{3}t}{2}$,

$y = \frac{\sqrt{3}s + t}{2}$, 证明:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

5. $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, (f 有二阶连续偏导数).

第五节 隐函数的求导公式

3. 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明: 由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

1. $z = z(x, y)$ 由 $x + y + z = \sin(xyz)$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. $z = z(x, y)$ 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所确定, 求 $(0, 0, 1)$ 点的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

4. 若 $F(x, y, z) = 0$, 证明: $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$.

5. 已知 $y = \varphi(x + ut) + \psi(x - ut)$, 证明: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

(2) 设 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 50 = 0 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

6. 求由下列方程组所确定函数的导函数.

(1) $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$, 求 $\frac{dx}{dy}, \frac{dz}{dy}$.

(3) $\begin{cases} u = f(ux, v + y) \\ v = g(u - x, v^2 y) \end{cases}$, 其中 f, g 具有一阶连续偏导数,
求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

(4) 设 $\begin{cases} u^3 + xv = y \\ v^3 + yu = x \end{cases}$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

第六节 微分法在几何上的应用

1. 求螺旋线: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 在任意点处的切线及法平面方程, 并证明曲线上任一点的切线与 Oz 轴交成定角.

7. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中, f, F 都具有一阶连续偏导数, 试证明:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{f_t F_y + F_t}.$$

2. 求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$ 在 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程.

3. 求球面: $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ 及柱面: $x^2 + y^2 = 2ay$ 的交线在点 $M_0(a, a, \sqrt{2}a)$ 处的切线及法平面方程.
5. 证明: 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} (a > 0)$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距之和为 a .

4. 求曲面 $z = y + \ln \frac{x}{y}$ 在 $(1, 1, 1)$ 处的切平面及法线方程.

6. 证明: 曲面 $F\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right) = 0$ 上任一点的切平面通过某定点.