公式和数表

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

公 式 和 数 表

北京市《初等数学》编写组编

人民教育出版社

1975·北京

公式和数表

北京市《初等数学》编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

1975年6月修订第1版 1978年4月第6次印刷

书号 13012·05 定价 0.24元

内容提要

这套《初等数学》共分五册，即《初等代数》、《初等几何》、《三角函数》、《解析几何》及《公式和数表》，是一般科学技术读物。

各册内容努力选取三大革命运动中普遍需要的数学知识，并且注意突出基本规律及其辩证发展的线索。为了便于自学，叙述力求详细，同时各章一般有小结，每册有总结，还配置了一定数量的练习题。

《公式和数表》这一册汇集了初等数学的公式和常用的数表。

这套《初等数学》可供广大工农兵、知识青年、中小学教师阅读参考。

目　录

I 公　式

Ⅱ 数 表

拉丁字母和希腊字母

拉 丁 字 母

A a	*H h*	*O o*	*V v*
B b	*I i*	*P p*	*W w*
C c	*J j*	*Q q*	*X x*
D d	*K k*	*R r*	*Y y*
E e	*L l*	*S s*	*Z z*
F f	*M m*	*T t*	
G g	*N n*	*U u*	

希 腊 字 母

A α（阿尔法）	I ι（约塔）	P ρ（若）
B β（贝塔）	K k（κ）（卡帕）	Σ σ（s）（西格马）
Γ γ（伽马）	Λ λ（兰布达）	T τ（套）
Δ δ（德耳塔）	M μ（米尤）	Φ φ（斐）
E ε（艾普西龙）	N ν（纽）	X χ（喜）
Z ζ（截塔）	Ξ ξ（克西）	Υ υ（宇普西龙）
H η（艾塔）	O o（奥密克戎）	Ψ ψ（普西）
Θ ϑ（θ）（西塔）	Π π（派）	Ω ω（欧米伽）

数学符号

$\neq$	不等于	
$\equiv$	恒等于	
$\approx$	约等于	有时用$\doteq$
$\backsim$	相似	
$\cong$	全等	
$n!$	n阶乘	前n个自然数的连乘积 如$5!=1\times2\times3\times4\times5=120$
$\sum$	总和	如$\sum\limits_{i=1}^{5}a_i=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ $\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n$
i	虚数单位	$i^2=-1$，电工中常用j
$\lg x$	常用对数	即$\log_{10}x$
$\ln x$	自然对数	即$\log_e x(e=2.71828\cdots)$
$f(x)$	函数	如$y=f(x)$表示y是x的函数
∞	无穷大	如$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$
$\bar{Z}$	Z的共轭复数	如$Z=2+3i,\bar{Z}=2-3i$

Ⅰ 公　　式

初 等 代 数

一、乘法和因式分解

1. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
7. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
8. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
9. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
10. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
11. n是偶数时，

    $a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$
12. n是奇数时，

    $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$

二、比　　例

1. 设$a:b=c:d$，即$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$($a, b, c, d$全不为零)，则

   (1) $ad=bc$　　　　(内项积等于外项积)

   (2) $b:a=d:c$

(3) $a:c=b:d$

(4) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (合比)

(5) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (分比)

(6) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (合分比)

2. 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, 则

$\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$ (等比)

3. 如果 y 和 x 成正比(可以写成 $y\propto x$), 那么

$\frac{y}{x}=k$ 或 $y=kx$ (k 是比例常数)

4. 如果 y 和 x 成反比 (可以写成 $y\propto\frac{1}{x}$), 那么

$y:\frac{1}{x}=k$ 或 $xy=k$ (k 是比例常数)

三、一元二次方程

1. 一般形式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$

2. 根的公式

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

3. 根和系数的关系

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

4. 判别式 $b^2-4ac>0$ 二实根不等

$b^2-4ac=0$ 二实根相等

$b^2-4ac<0$ 二虚根共轭

四、不　等　式

1. 基本性质

(1) 如果 $a>b$, 那么 $a\pm c>b\pm c$.

(2) 如果 $a>b$、$c>0$, 那么 $ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

(3) 如果 $a>b$、$c<0$, 那么 $ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

(4) 如果 $a>b>0$, n 是正整数, 那么 $a^n>b^n$, $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

2. 绝对值

(1) $|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

(2) $|ab|=|a|\cdot|b|$, $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

3. 绝对值不等式

(1) $|A+B|\leqslant|A|+|B|$

(2) $|A-B|\leqslant|A|+|B|$

(3) $|A-B|\geqslant|A|-|B|$

(4) $-|A|\leqslant A\leqslant|A|$

4. 如果 a, b 都大于零, 那么$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

即, 两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数, 等式当 $a=b$ 时成立.

五、指　　数

1. 定义

$a^n=a\cdot a\cdots a$(n 个 a)　　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a>0)$

$a^0=1\ (a\neq 0)$　　$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a>0)$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$　　其中 m, n 是正整数.

2. 规则

$a^{\alpha}\cdot a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$　　$\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$　　$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$　　$(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$

其中 a, b 是正实数，α, β 是任意实数。

六、对　数

1. 定义　如果 $a^{x}=N(a>0, a\neq1)$，那么 x 叫做 N（真数）的以 a 为底的对数，记作 $x=\log_a N$。

2. 恒等式 $a^{\log_a N}=N$

3. 性质

(1) $\log_a 1=0$　　(2) $\log_a a=1$

4. 公式

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(3) $\log_a M^n=n\log_a M$

(4) $\log_a \sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$

5. 换底公式　　$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

(1) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

(2) $\lg M=\dfrac{\ln M}{\ln 10}\approx 0.4343\ln M$

(3) $\ln M=\dfrac{\lg M}{\lg e}\approx 2.3026\lg M$

七、复　　数

1. 虚数单位的乘方

$i=\sqrt{-1}$,　　$i^2=-1$,　　$i^3=-i$,　　$i^4=1$

$i^{4n+1}=i$,　　$i^{4n+2}=-1$,　　$i^{4n+3}=-i$,　　$i^{4n}=1$

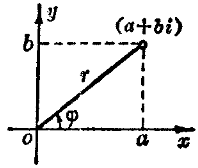
2. 复数的三种表示式及其相互关系

代数式　$Z=a+bi$

三角式　$Z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

指数式　$Z=re^{i\varphi}$

$\begin{cases}a=r\cos\varphi\\ b=r\sin\varphi\end{cases}$　　$\begin{cases}r=\sqrt{a^2+b^2}\\ \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}\end{cases}$



3. 复数的运算

(1) 代数式

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

$$(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(2) 三角式和指数式

设　$Z_1=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)=Re^{i\alpha}$

　　$Z_2=r(\cos\beta+i\sin\beta)=re^{i\beta}$

则　$Z_1\cdot Z_2=Rr[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]=Rre^{i(\alpha+\beta)}$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{R}{r}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]=\frac{R}{r}e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$Z_1^n=R^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=R^ne^{in\alpha}$$

$$Z_1^{\frac{1}{n}}=R^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right]$$

$$=R^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha+2k\pi}{n}}$$

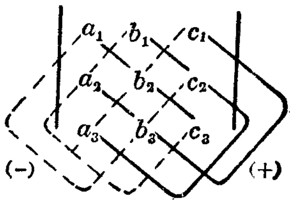
$k=0, 1, 2, \cdots n-1.$

八、行 列 式

1. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

2. 三阶行列式

(1) 对角线展开 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$



(2) 降阶展开(适用于高阶行列式)

如按第一列展开:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3. 行列式的性质

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{k} \begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

(3) $\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2+a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3+a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

行列式的这些性质，适用于任意阶行列式。

九、线性方程组的解

1. 二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}\quad x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D}\quad (D\neq 0)$$

其中 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

2. 三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}\quad x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D}, z=\frac{D_z}{D}\quad (D\neq 0)$$

其中 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

多元线性方程组解的公式和二元、三元的类似。

十、数　　列*

1. 等差数列　设首项为 a_1，公差为 d，则有

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\cdots\cdots a_1+(n-1)d,\cdots\cdots$$

（1）通项公式　$a_n=a_1+(n-1)d$

（2）前 n 项的和　$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

2. 等比数列　设首项为 a_1，公比为 r，则有

$$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\cdots\cdots a_1r^{n-1},\cdots\cdots$$

（1）通项公式　$a_n=a_1r^{n-1}$

（2）前 n 项的和　$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

$$S_n=\frac{a_1-a_nr}{1-r}\qquad(r\neq1)$$

3. 其他数列前 n 项的和

（1）$\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

（2）$\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

（3）$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

---

*　数列的和式叫级数，如

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots$$

就是一个级数。

(4) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$

(5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

十一、排列组合和二项式定理

1. 选排列　m个元素中取n个的排列种数

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots[m-(n-1)] = \frac{m!}{(m-n)!}$$

2. 全排列　m个元素的排列种数

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$
$$= 1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(m-2)(m-1)m = m!$$

3. 组合　m个元素中取n个的组合种数

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots n}$$
$$= \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

4. 组合的性质　$C_m^n = C_m^{m-n}$，$C_{m+1}^n = C_m^{n-1} + C_m^n$

5. 二项式定理

(1) $(x+a)^n = x^n + C_n^1 ax^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \cdots\cdots + C_n^k a^k x^{n-k}$

$$+\cdots\cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n$$
$$= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 x^{n-2} + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!} a^k x^{n-k}$$
$$+\cdots\cdots + na^{n-1} x + a^n$$

通项公式　**第 $k+1$ 项**　$T_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k}$