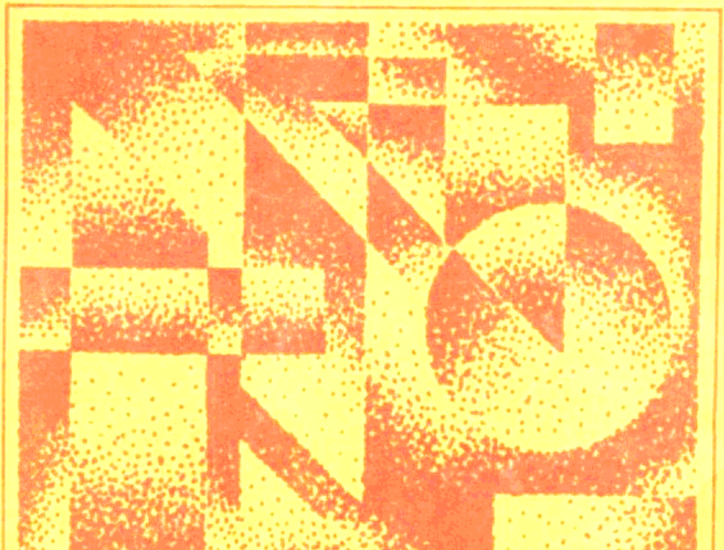
建设工程造价管理丛书

工程经济数学方法

吴育华 张玉平 刘慧勇 编



天 津 大 学 出 版 社

序　言

建设工程造价管理是工程建设科学管理的重要组成部分。它贯穿于项目决策到设计、施工、竣工验收的全过程，涉及到投资主管部门、建设、设计、施工等单位以及建设银行、审计等有关部门。其根本目的是要通过对工程建设全过程造价的控制和管理，使技术经济紧密结合，最合理地使用人力、物力和建设资金，使其不突破合理确定的工程造价限额，以取得最大的投资效益。

要切实做好工程造价管理工作，干部是一个关键。从事工程造价管理的干部，必须具备有关工程造价管理控制的基础理论和专业知识（包括建筑技术、经济、法律等方面的知识）。现有干部队伍与此要求很不适应。为了大量培养专业人才，提高在职干部的素质，中国工程建设概算预算定额委员会在国家计委有关领导支持下，组织专家学者，编纂了建国以来第一套《建设工程造价管理丛书》。这套丛书包括：

1.《社会主义投资管理学》。该书以我国宏观、中观、微观和涉外投资为研究对象，探讨在投资渠道多源化、投资主体多元化新形势下，如何保持合理投资规模和结构，提高投资经济效果。

2.《建筑经济学概论》。该书以建筑业为研究对象，在分析建筑经济原理上，探讨如何把建筑业管理职能、内容和方针有机地结合起来，以取得较好的建筑经济效益。

3.《建筑工程造价管理》。该书详细阐述分析了我国现行工程造价构成，探讨如何在投资决策阶段、设计阶段、招标投标阶段、施工阶段、结算阶段等建设全过程对工程造价进行有效地控制。

4.《工程建设定额》。该书在分析、研究施工定额、预算定额、概算定额、投资估算指标、工期定额原理和相互有机联系的基础上，探讨如何建立适应有计划的社会主义商品经济需要，具有中国特色的工程建设定额体系。

5.《工造程价管理信息系统》。该书全面介绍了电子计算机在工程造价管理中的运用，对工程造价管理信息系统的多层次的分析和设计进行了深入的探讨。

6.《工程项目经济评价》。该书以实现工程项目投资决策科学化为目的，系统介绍了工程项目的财务评价、国民经济评价和不确定分析的基本理论和实用方法及案例。

7.《建设工程合同管理》。该书介绍了国际通用和国内有代表性的各类工程建设合同标准格式，详细阐述了有关合同的订立、履行、变更、中止或解除、纠纷处理的程序和方法。

8.《工程经济数学方法》。该书对工程造价管理、工程项目经济评价常用的数量方法，特别对数理统计、线性规划、网络技术、预测和决策方法进行了系统的、深入浅出的阐述和介绍。

此外，还准备陆续出版包括突出马克思主义固定资产再生产理论的《政治经济学》以及近年来国外优秀的工程造价管理译著，如《工料测量概论》、《工程建设成本控制》等。

鉴于有关建筑技术知识已出版的著作较多，本丛书暂不列入这方面书籍。

本丛书可作为投资主管部门、建设单位、设计施工单位、建设银行、工程建设定额站以及在计划审计、政工等部门工作的广大工程经济人员自学和岗位培训教材，也可做为大专院

校《技术经济》、《基本建设管理工程》、《建筑管理工程》、《投资经济》、《基本建设财务与信用》等专业的教科书或教学参考书、并可为基建战线广大技术人员、管理干部学习工程经济有关知识参考。

中国工程建设概算预算定额委员会 主任委员 管麦初

作　者　序

经济管理过程中充满了数量关系，工程经济的管理过程也不例外。要全面提高建设工程经济管理水平，除了必须具备坚实的专业知识、丰富的实际经验和不懈的进取精神以外，还应当学习数学。

对经济工作者来说，学习数学至少有三点好处：其一，可使你在日常的经济管理工作中精于计算；其二，可使你具有定量地分析经济问题并做出理论概括的能力；其三，有助于提高智力，培养思考复杂问题的兴趣。此外，数学还是深人学习一切学科的必不可少的工具。掌握数学工具，就能扫清专业课程中的“路障”，使专业学习变得轻松自如。

经济管理工作所需要的数学，涉及面广，但并不很深。根据这个特点，本书从初等数学在经济工作中的应用讲起，包括微积分、高等代数、概率论与数理统计以及线性规划、动态规划、网络技术、库存论、决策分析、预测方法等运筹学的主要分支。其中每个部分都侧重于应用，尽可能讲清楚定理的含义、适用条件和用法，而把定理本身的繁难推演证明过程略去。这样就把四、五部数学教材压缩为一本。希望它能够成为经济工作者喜欢的简明数学读本。

这是一种偿试。由于我们经验不足，难免疏漏，恳请读者提出宝贵意见。

本书第一章由刘慧勇编写，第二、三、四章由张玉平编写，第五至第九章由吴育华编写，第十章由于九如编写。刘慧勇对全书、特别是前四章做了润色。在本书编写出版过程中王永祥、戴良萌同志做了大量的具体工作，鲁德宽、郭玉华、孙永红、刘济梅、郭金江同志参加了校对工作，谨此致谢。

作　者

1989年8月

目　录

第一章　初等数学……（1）

§1.1　从经济变量与经济比率说起……（1）

§1.2　函数及其图形……（5）

§1.3　数字模拟……（17）

§1.4　统计图表……（23）

第二章　微积分……（41）

§2.1　极限与连续……（41）

§2.2　导数与微分……（56）

§2.3　中值定理及导数的应用……（72）

§2.4　不定积分与定积分……（84）

§2.5　多元函数微分法……（105）

§2.6　微分方程简介……（115）

第三章　高等代数……（132）

§3.1　多项式与高次方程……（132）

§3.2　行列式与矩阵……（145）

§3.3　线性方程组与投入产出模型……（165）

第四章　概率论与数理统计……（182）

§4.1　随机事件与概率……（182）

§4.2　随机变量及其概率分布……（192）

§4.3　随机变量的数字特征与极限定理……（208）

§4.4　样本及其分布……（224）

§4.5　参数估计与假设检验……（236）

§4.6　方差分析与回归分析……（257）

第五章　线性规划……（274）

§5.1　线性规划的一般模型……（274）

§5.2　线性规划的图解法……（279）

§5.3　单纯形法……（281）

§5.4　线性规划的对偶问题……（303）

§5.5　灵敏度分析……（308）

§5.6　运输问题与表上作业法……（312）

§5.7　整数规划……（324）

第六章　动态规划……（337）

§6.1　多阶段决策问题……（337）

§6.2　动态规划的基本概念……（338）

§6.3　最优性原理与递推方程……（340）

§6.4　动态规划应用例解……（344）
第七章　网络技术……（362）
§7.1　什么是网络技术……（362）
§7.2　最短路经问题……（365）
§7.3　最大流问题……（369）
§7.4　网络计划图的绘制……（377）
§7.5　时间参数计算与关键线路确定……（384）
§7.6　网络图的调整及优化……（389）
第八章　库存论……（406）
§8.1　什么是库存论……（406）
§8.2　确定型存储模型……（407）
§8.3　随机型存储模型……（413）
第九章　决策分析……（429）
§9.1　概论……（429）
§9.2　风险型决策……（434）
§9.3　完全不确定情况下的决策……（455）
§9.4　多目标决策……（459）
第十章　預测技术……（480）
§10.1　概论……（480）
§10.2　特尔菲预测法……（481）
§10.3　回归预测法……（483）
§10.4　平滑法预测技术……（491）
附录……（500）
附表1　正态分布曲线下的面积函数……（500）
附表2　泊松分布表……（501）
附表3　泊松分布表……（503）
附表4　t 分布表……（504）
附表5　x^2分布表……（505）
附表6　F检验的临界值（F_α）表……（506）
附表7　正态分布的双侧分位数（ta）表……（507）
附表8　相关系数显著性检验表……（507）
附表9　随机数字表……（512）
习题解答……（513）

第一章　初等数学

§1.1　从经济变量与经济比率说起

从事经济管理和经济理论研究，整天要和数字、指标打交道。其实，追根溯源，数学产生于经济活动的需要。现在，数学已获得了极大的发展，可以更好地为经济工作服务。

经济工作中的各种数字、指标都是经济量。随着社会经济的发展和生产经营情况的变化，各种经济量也都在变。用数学语言说，经济领域中充满了变量，即使说经济领域是个变量的王国，也并不夸张。

在充满变量的领域内从事工作，不可不熟悉数学，这就好象在现代城市生活中离不开车辆一样。如果没有各种机动车和自行车，城市居民的生活将是多么困难。同样地，如果没有必要的数学知识，经济工作必然低效率，其结果是经济活动低效益。

研究一种经济量的变化规律，往往需要涉及到另外的经济量，需要通过与其他经济量的对比进行动态分析。把一种经济量与另一种经济量进行对比的比值，就是经济比率。由于经济变量是多种多样的，组合出的经济比率也是多种多样的。

研究经济变量与经济比率的变化规律，高等数学无疑是重要的工具，但初等数学也大有用武之地。考虑到初等数学是普及教育的内容，因而本书没有全面系统地介绍初等数学知识。本章只是有选择地介绍经济工作中最常用的若干初等数学方法，主要目的是帮助读者把数学与经济更紧密地联系起来，起一个沟通两岸的桥梁作用。这一节首先从对经济比率的剖析，看看初等数学中分式变型与分式化简知识对于经济研究工作的重要性。

一、经济比率的类型

每一个经济量，从动态的发展观点看，都有本期数额与上期数额或本期净增加数额与上期数额的对比问题，即增长指数或增长率问题。增长指数和增长率都是特殊的经济比率。一个经济量往往可以和同期的其他几个相关的经济量分别进行对比，因此，可以说，经济比率比以绝对数额形式表示的经济量多得多。

特别值得注意的是，很多经济比率都是极为重要的经济概念。譬如，剩余价值率 $m'=m/V$，利润率 $p'=\dfrac{m}{c+v}$，资本有机构成 c/v，资本积累率 $K'=m_2/m$，净积累率（国民收入积累率）$a=A/G=\dfrac{m_2+v_2}{v+m}$ 建设周期 $T=K/F$（在建总规模／年建设规模）等等。没有这类经济比率概念，要建立完整的政治经济学或部门经济学体系，简直是不可设想的。

经济比率的重要性，从根本上说，是因为社会化大生产客观上要求国民经济按比例发展，以及在社会经济不断发展的过程中，以相对数形式表示的经济量往往比以绝对数表示的经济量更便于进行对比等。

经济比率既重要又广泛，而且随着经济过程本身的发展，还将不断地出现新的重要的经

济比例关系，需要经济理论工作者和实际工作者去发现它、研究它。现有的经济比率都是在经济科学发展的历史上逐步提出来的。然而，它们并未穷尽全部经济比率。从经济实践中抽象、概括出新的经济比率，并揭示某决定因素和变化规律，是丰富和发展经济科学的一个重要方面，也是经济理论工作者的职责。

概括新的经济比率，还要熟悉经济比率的基本类型.按照经济量对比的结构特点来划分，经济比率主要有以下四种基本类型：

（一）增长率型

增长率型经济比率是指经济量与其在一定时期里的增量的比值。例如国民收入年增长率 $g=\Delta G/G=\frac{G_1-G_0}{G_0}$，就是本年国民收入增长额 ΔG 与上年国民收入 G_0 的比值。各种经济增长率及利息率等，都可以归入这一类。

这一类型的经济比率比较容易提出。只要概括出新的经济量及其增量或产出量，就可以同时提出该种经济量的增长率型经济比率。

增长率型经济比率大多需要注意所用价格。

（二）比重型

比重型经济比率，是指某一经济总量之中各个经济分量所占的份额。某特点是各经济分量与总量的比例（比重）之和等于1。例如，国民收入积累率 $a=A/C$，即国民收入积累额 A（净积累额）与同期国民收入使用额G的比值。它与消费率之和为1。在社会总产品价值 $W=C+V+m$ 中，反映物质消耗水平的生产资料转移价值比重(C/W)、反映百元产值工资含量的必要劳动补偿价值比重（V／W）、反映百元产值盈利率的剩余产品价值比重(m/W)三者之和也为1。

这一类型的经济比率也比较容易提出，其关键在于对经济总量作出正确的有客观依据的分解。对同一经济总量的分解方法不一定是唯一的。为了从多方面考察问题，有时可以对某一经济总量进行两种甚至两种以上的分解。

（三）倍比型

倍比型经济比率，是指两个相关经济量之间的倍数关系，其数值可能大于、等于或小于1。例如，建设周期 $T=K/F$，就是在建总规模 K 对年度建设规模 F的倍数。资本有机构成 C/V，表示不变资本 C 与可变资本V的倍比关系。在有机构成高的部门，这一比例大于1，在有机构成低、劳动密集型企业，这一比例可能小于1。

概括倍比型经济比率，关键是要解决好经济量之间的可比性问题。

（四）复合型

复合型经济比率，是指参加对比的两个经济量中有一个或者两个都是复合经济量，可以化成一个或数个简单比例的组合的一类经济比率。复合型经济比率还可以进一步细分为分子复合型、分母复合型、完全复合型（分子、分母都是复合经济量）三种。

掌握经济比率的主要类型及其特点，对于概括新的经济比率、揭示其本质和规律是有帮助的。

二、研究经济比率的重要方法——建立分式

在研究某些变化规律较为复杂的经济比率时，往往需要建立经济分式，通过分式的变型和化简，揭示经济比率的数量变化规律。在这种情况下，如何建立经济分式，是首先碰到的问题。

建立经济分式的基本步骤如下：

第一，根据经济比率的定义，选用两个字母分别代表经济比率的分子和分母，建立起代表经济比率的最简单分式。

第二，根据经济比率分子和分母的性质，充分考虑研究问题时的前提条件，以分子表示出分母，或者以分母表示出分子，或者以另一个可约去的经济量分别表示出分子和分母。

第三，把第二步骤中建立起来的分子和分母的表达式，代入第一步骤建立起来的简单分式中，并进行约分处理。

在建立经济分式的三步骤中，第二个步骤是最关键的，也是全过程的最难点。其困难主要来自两个方面：其一是寻找分子与分母之间可约分数量关系，需要透彻了解有关经济量之间的内在经济联系，在这里任何经济概念的偏差，都可能导致根本错误；其二是在有些经济比率中，用分子分母之间可约分的经济量及其它已知其数值或其规律性的经济量，表示出分子分母，并不是很简单的事，需要耐心进行代数推导。

三、怎样整理经济分式

经济分式建立起来之后，如果较为复杂，还需要进行整理，以使把经济比率的决定因素和数量规律表现得更明显。

为了揭示经济比率数量变化规律，整理经济分式可以区分为两种方式。一种是化简，一种是基础比例拆离。

（一）化简

化简就是把经济分式向着最简单的数学形式方向变型，直到不能再简单为止。

分式化简是初中数学课程的内容。化简分式的基本功是因式分解，即把分子和分母分别分解成若干个因式的乘积，约去分子和分母中相同的因式。与数学上分式化简相比，在分析经济比率的数量规律时化简分式有特殊要求，即应当设法使经济变量出现的次数尽可能少，而不必严守分式的标准形式。

（二）基础比例拆离

为了更清楚地揭示经济比率的数量变化规律，有时不能仅仅考虑经济分式在形式上尽量简单的问题，必要时需要在一定程度上牺牲经济分式的简单形式，换来数量关系的清晰。

基础比例拆离，是研究经济比率短期变化规律时的常用处理方法。所谓基础比率拆离，就是把可以作为标准的经济比例从经济分式中拆离出来，使之成为单独的一项，而将其它经济量组成的分式作为另一项。

基础比例拆离方法主要有以下几个步骤：

根据经济比率的具体特点，确定基础比例。

第二步，运用分式变型技巧，把基础比例从整个分式中拆离出来。

从分式中拆离基础比例，可对处于分子中的基础比例的系数进行配项，使其系数的一部分恰好等于分母，把这一部分系数连同基础比例作为一项，分子的其余部分作另一项，再用分母去除，就可把基础比例拆离出来。

第三步，对拆离基础比例后的分式部分进行再整理，视情况选择参照经济量，并构成参照经济量波动幅度因子和波动幅度系数。

第四步，分析波动幅度系数中的参数并进行匡算，进一步化简经济比率的计算公式。

在以上四个步骤中，关键是第一步和第三步，在这两个步骤中要同时进行数学分析和经济分析。

四、如何揭示经济比率的本质与规律

提出新的经济比率是在经济概念方面前进了一步。对于经济研究工作来说，不能仅仅满足于提出经济比率，还应当进一步深刻揭示经济比率的实质、变化规律以及理论和实践意义。

（一）如何揭示经济比率的本质

前面说过，复合型经济比率可以分解为简单经济比率的关系式。这种分解有助于加深对经济比率实质的认识。分解复合型经济比率，可以采取如下具体方法：

(1)把分子复合型经济比率拆离成简单经济比率之和。

(2)对分母复合型经济比率进行约分处理，将其化成一个或数个简单经济比率的关系式。

由于研究问题的侧重点不同，对同一分母复合型经济比率可以进行多种方式的约分处理。

究竟以何种约分方式处理分母复合型经济比率，这要取决于研究问题时的侧重点。

对完全复合型经济比率则可首先进行拆离处理，之后再视情况进行约分处理。

（二）如何揭示经济比率的变化规律

任何经济比率的变化规律，都可以通过两个侧面表述：一是它在一定经济阶段上的长期发展趋势（是上升、下降，还是持平发展）；二是它在年度之间以何种具体的运动方式实现其长期发展趋势（是稳定发展，还是波动，波动的幅度较大还是较小）。把这两个方面结合起来，经济比率的变化规律就表达得比较完整了。

1.经济比率的长期趋势分析

分析经济比例的长期变动趋势，关键是比较经济比率的分子和分母在长时期里的相对增长速度快慢。分子增长速度较快，则经济比率上升；分母增长速度较快，则经济比率下降。

无论对简单经济比率还是对复合型经济比率，除了进行分子和分母增长速度的直接对比以外，往往都还需要通过分解，化成另一些简单经济比率的某种关系式后再进一步分析。

对简单经济比率也需要进行这样或那样的分解，目的是把不容易直接看出变化趋势的经济比率用其它形式表示出来，从而由此及彼，根据已知认识未知。

在分解经济比率时，分解的原则是把待研究的经济比率表示成由若干已知其规律的经济

比率所组成的关系式。这样做的关键是要尽量多地了解哪些经济比率的变化规律是已知的。这一分解原则无论对简单经济比率还是复合型经济比率都是适用的。

对经济比率的长期变动趋势，究竟是采取分解分析方法，还是采取直接分析方法，不仅要看经济比率本身的性质，还需根据对有关经济比率和参加对比的经济量的增长率变动趋势的已知情况决定。知道对比经济量的增长速度相对快慢，则采取直接对比法；否则，就要进行分解，寻找其它"立足点"——已知变动趋势的相关经济比率.

2.经济比率的具体运动形式分析

分析经济比率的具体运动形式，关键是判明经济比率的分子和分母增长率在年度间或者月份、季度间变化的快慢、升降幅度的相对大小. 如果由于年度经济形势影响经济比率的分子和分母的增长率以基本相同的幅度升降，那么，该经济比率就将在年度之间保持稳定. 如果受年度经济形势影响，经济比率的分子的增长率升降幅度大于分母增长率的变化幅度，或者反过来，分母增长率的升降幅度大于分子增长率的变化幅度，那么，该经济比率在年度之间就将产生波动. 在年度经济形势的影响下，经济比率的分子和分母增长率的升降幅度差距愈大，则经济比率的波动性愈强.

判断经济比率的分子和分母增长率在年度间变化的快慢及升降幅度的相对大小，最根本的是分析作为分子的经济量和作为分母的经济量分别受具体年度经济形势影响的特点. 这种分析有时也要通过一定方式的分解进行，也就是说，揭示经济比率在年度间的具体运动形式，也有直接分析与分解分析两种方法.

通过分析，揭示出经济比率的长期发展趋势与年度间具体运动形式之后，将二者合起来，就是对经济比率变化规律较为完整的描述.

§1.2 函数及其图形

在客观事物发展过程中，包括社会经济发展过程中，往往有多个相关量同时变化. 这些量不是各自孤立的，而是互相联系、互相制约、遵循一定规律的.

函数概念就是对这样一种客观过程中的数量联系的反映。所谓函数，就是当一个或一些变量在数轴的某一部分上取一数值时，另一个变量总是依照一定的法则取得一个或多个确定的数值与之对应. 其中"一定的法则"就是函数关系；那个或那些"变化到一定数值"的变量，被称为自变量；而另一个由此"取得一个或多个确定的数值"的变量，则被称为因变量，或叫函数. 表达函数关系的数学形式，叫函数式.

按照自变量的个数，函数可以划分为一元函数（只与一个自变量）、二元函数（有两个自变量）等等. 一元函数的一般表达形式是$f(x)$、$g(x)$等；二元函数的一般形式则可写为$f(x,y)$、$g(x,y)$等. 在经济工作中，一元函数和多元函数（二元及二元以上的函数）都是很常用的.

根据变量之间的数量依存关系，常见的有：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数等基本初等函数以及他们的组合及简单的复合.

一、几个基本概念

（一） 区间

研究函数与变量之间的数量依存关系往往是在一定的范围内进行的。换言之，变量和函数的取值范围不一定总是整个数轴，很可能是介于某两个实数之间的那些实数。为了能够既明确又简便地表达这个范围，在数学上提出了“区间”这个概念。

区间 区间是指介于某两个实数之间的全体实数。那两个实数称做区间的端点。

按照包含、不包含还是半包含两个端点来进一步细分，区间可以分为以下三类：

开区间 不包含两个端点的区间称为开区间．设a与b为两个给定的实数，且$a<b$，满足不等式

$$a<x<b$$

的实数x的全体即为开区间，用记号(a,b)表示。

闭区间 包含两个端点的区间称为闭区间。满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的实数x的全体即为闭区间，用记号$[a,b]$表示。

半开区间 只包含一个端点的区间称为半开区间。满足不等式

$$a<x\leqslant b \text{或} a\leqslant x<b$$

的实数x的全体叫做半开区间，用记号$(a,b]$或者$[a,b)$表示。

以上是有限区间。此外还有无限区间。各类无限区间的意义及表示方法如下：

$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数；

$(a, +\infty)$ 表示大于a的全体实数；

$(-\infty, a)$ 表示小于a的全体实数；

$(-\infty, a]$ 表示小于等于a的全体实数；

$[a,+\infty)$ 表示大于等于a的全体实数．

（二）邻域

一个以某点为中心的开区间称为该点的邻域。

设a与δ是两个实数，且$\delta>0$，满足绝对值不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数x的全体称为点a的δ邻域．其中，点a称为这个邻域的中心，δ称为这个邻域的半径．该不等式等价于

$$-\delta<x-a<\delta \text{或} a-\delta<x<a+\delta$$

因此，该邻域实质上就是开区间$(a-\delta, a+\delta)$，端点分别是$a-\delta$与$a+\delta$，长度为2δ，中心是点a。

讨论函数在某点附近的性质，往往需要用到邻域这个概念。

（三）定义域与值域

数轴上使函数有定义的一切点的全体，叫做函数的**定义域**。

那么，什么叫“使函数有定义”呢？当自变量取某一已知数值时，函数在该点处具有确

定的值，则函数在该点处有定义。

函数在某定义域上的取值范围，称为函数的**值域**。

在实际问题中，函数的定义域要根据所研究的问题本身的具体情况确定。譬如，研究水泥的最佳运输方案，各水泥生产点向各水泥需求点的运量不可能是负值，而且不可能超过每个水泥生产点的生产量。这客观上就对水泥运量限定了定义域。

在一般讨论中，如果没有明确限定函数的定义域，就认为该函数的定义域是能够使该函数表达式有意义的自变量的一切值。例如，如果不加限定，函数$1/x$的定义域就是除了$x=0$之外的一切实数，即（$-\infty$，0）与（0，$+\infty$）。

（四）单值性与多值性

单值性　当自变量在函数定义域内每取得一个确定数值时，函数总是只有一个确定的数值与之对应，则此函数具有单值性。具有单值性的函数，叫做**单值函数**。

多值性　当自变量在函数的定义域内每取得一个确定的数值时，函数并不总是仅有唯一的确定数值与之对应，而是在整个定义域或某些点上有二个以上的数值与之对应，则此函数具有多值性。具有多值性的函数称为**多值函数**。

在没有特殊说明时，一般函数都是单值函数。

（五）奇偶性

当自变量符号改变时，如果函数值也改变符号，而绝对值不变，即恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称此函数为**奇函数**。

当自变量符号改变时，如果函数值不变，即恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称此函数为**偶函数**。

从函数在直角坐标中的曲线图形看，偶函数的图形对称于y轴，奇函数的图形对称于原点。

并不是所有的函数都具有奇偶性，事实上，很多函数既不是奇函数，也不是偶函数。例如，$y=x^2$是偶函数，$y=x^3$是奇函数，$y=x^2+x^3$则没有奇偶性。

（六）单调增减性

如果函数在区间（a,b）内随着自变量增加而增加，则称此函数在区间（a,b）内为**单调增加**。

如果函数在区间（a,b）内随着自变量增加而减少，则称此函数在区间（a,b）内为**单调减少**。

函数在无限区间上的单调增减性也可以类似以上定义。

在整个定义域上为单调增加或单调减少的函数，称为**单调函数**。

（七）有界性

在函数$y=f(x)$有定义的某区间（a,b）内，如果存在一个正数M，使自变量x无论在该区间取何值均有不等式

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，那么，就说函数$f(x)$在区间(a,b)**内有界**。否则，就说函数$f(x)$在(a,b)内**无界**。

在整个定义域上有界的函数，当然在各个有定义的区间上都是有界的。在整个定义域上无界的函数，在某些有定义的区间上，却可能是有界的。

（八）周期性

如果存在不等于零的数l，能够使函数$y=f(x)$对于任意的X均有下式

$$f(x)=f(x+l)$$

成立，那么，就称$f(x)$为**周期函数**，l为函数$f(x)$的**周期**。

由以上定义可知，形如$x+kl$（k为任意整数）的一切数都属于周期函数$f(x)$的定义域，且有

$$f(x+kl)=f(x)$$

因而任意kl都是函数$f(x)$的周期。但通常讲一个函数的周期，是指其周期中的最小正周期。

周期函数在一个周期所在区间上所具有的性质，在其他周期所在的区间上同样具有。

（九）反函数

对已经给定的函数

$$y=f(x)$$

如果把y改作自变数，把x视为函数，那么，由上述关系式所确定的函数

$$x=\varphi(y)$$

就称为函数$f(x)$的**反函数**，相应地，把$f(x)$叫做**原函数**。

有时考虑到习惯上是用字母x表示自变量，用y表示函数，往往将反函数中的自变量y改写为x，函数x改为y。这样，$y=f(x)$的反函数又记为

$$y=\varphi(x)$$

由于标示函数关系的字母“φ”未变，尽管表示自变量与函数的字母变了，实际的函数关系并未改变。

（十）复合函数与中间变量

设y是z的函数，即

$$y=f(z)$$

而z又是x的函数，即

$$z=\varphi(x)$$

用X表示$\varphi(x)$的定义域或其中一部份。如果对于x在X上取值时所对应的z值，函数$y=f(z)$是有定义的，则y成为x的函数，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数$y=f(z)$与$z=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**。其中z叫做**中间变量**，X为复合函数的定义域。

复合函数不仅可以由两个函数构成，也可以由多个函数构成。譬如，函数$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$是由$y=\lg u$、$u=1+v$、$v=\sqrt{z}$、$z=1+x^2$四个函数复合而成。它的定义域与$z=1+x^2$

的定义域（$-\infty$，$+\infty$）相同，因为对于此定义域上的任何z、v均有定义，u亦有定义且恒大于1，进而y总有定义。

但需注意，并非任意两个函数都可复合成一个复合函数。例如，在实数域内，$y=\sqrt{z}$与$z=-x^2-1$就不能复合成复合函数，因为对于$z=-x^2-1$的定义域（$-\infty$，$+\infty$）中任何x值所对应的z值恒为负实数，函数$y=\sqrt{z}$没有定义。但在复数域内二者则可复合成复合函数。

（十一）基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**。基本初等函数在函数研究中起着基础作用。

初等函数是指由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算（加、减、乘、除）以及有限次的函数复合所形成的一类数学分析式子。由于可把常数与函数之间的四则运算看作函数复合的一种方式，因此可以说初等函数就是基本初等函数的有限次复合函数。

例如，$y=ax^n+bx^m+c$，$y=\frac{2+\sqrt[3]{x}}{2-\sqrt{x}}$，$y=\sin^2x$，$y=\sqrt{1-x^2}$，

$y=\mathrm{arc\ tg}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$，$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$，$y=\frac{1-(1+g)^{-x}}{gx}$等等，都是初等函数。

二、基本初等函数的图形与性质

（一）幂函数

1.幂函数的形式

$$y=x^{\mu}$$

其中，μ为已知的实数。

2.幂函数的几何图形

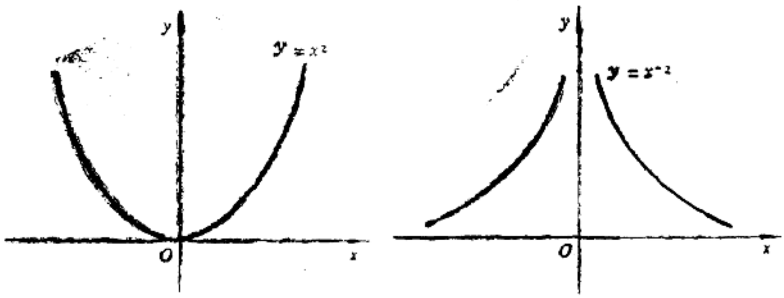


图1—1

3.幂函数的基本性质（仅讨论$x>0$的情况）

①当$\mu>0$时，随着自变量x的增加函数y也增大。如果μ是大于0而小于1的数，函数y没有变量x增长快；如果μ恰好等于1，函数y就与自变量x等速增长；如果μ大于1，则函数y比x增长得更快。

②当$\mu=0$时，无论自变量x取何值，函数y均等于1。

③当$\mu<0$时，随着自变量x的增长，函数y反而减少。

在观察经济量的变化趋势时，经常用到幂函数的上述性质。

（二）指数函数

1.指数函数的形式

$$y=a^x \qquad (a>0，a\neq 1)$$

2.指数函数的几何图形见图1-2

3.指数函数的基本性质

①无论自变量x为何值，函数y均为正数，

②当$a>1$时，函数y随着自变量x增加而上升，而且a愈大，函数y比自变量x上升愈快。

③当$a<1$时，函数y随着自变量x增加而减小，而且a愈小，函数y比自变量x减小愈快。

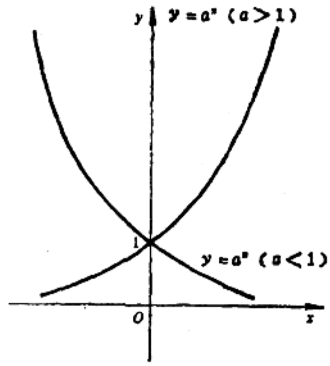


图1—2

（三）对数函数

1.对数函数的形式

$y=\log_a x \qquad (a>0，a\neq 1)$

$(x\neq 0)$

对数是指数的逆运算，对数函数是指数函数的反函数。

2.对数函数的几何图形见图1-3

3.对数函数的基本性质

①在对数函数中，自变量x的取值范围仅限于正数，否则无意义。

②当$a>1$时，函数y随自变量x增大而上升。

③当$a<1$时，函数y随自变量x增大而下降。

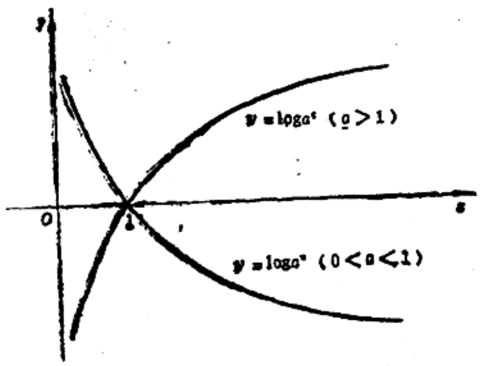


图1—3

（四）三角函数

1.常用三角函数

正弦函数　　$y=\sin x$　　　余弦函数　　$y=\cos x$

正切函数　　$y=\operatorname{tg} x$　　　余切函数　　$y=\operatorname{ctg} x$

其中自变量x通常以弧度为单位。

此外，三角函数中还有正割函数$y=\sec x$与余割函数$y=\csc x$。但由于$\sec x=\frac{1}{\cos x}$，$\csc x=\frac{1}{\sin x}$，可分别用$\cos x$与$\sin x$表示，因而，对它们的性质与图形不再单独讨论。

2.三角函数的几何图形

正弦函数的图形

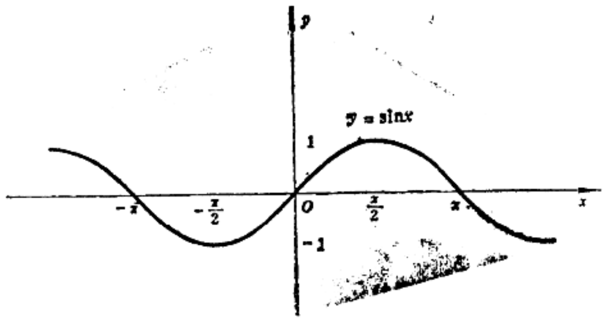


图1—4

余弦函数的图形

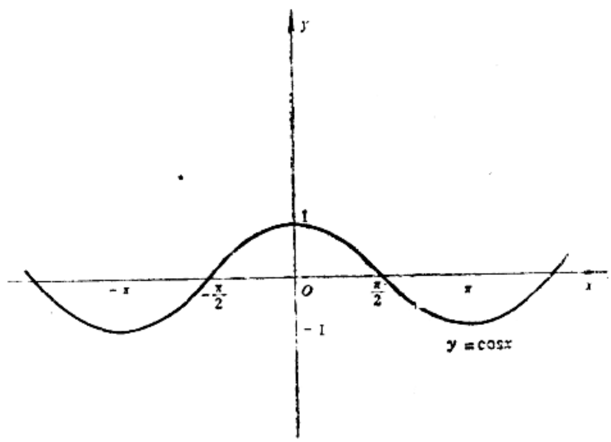


图1—5