实分析

程民德　邓东皋　龙瑞麟　编著

高等教育出版社

实 分 析

程民德　邓东皋　龙瑞麟　编著

高等教育出版社

(京)112 号

本书是以实变函数与泛函分析课程内容为先导的介绍近代实分析的引论性著作. 除必要的基础性知识外，着重反映了自 50 年代起至最近几年来国内外关于实分析方面的研究成果. 各个时期最活跃的研究领域，如 Calderón－Zygmund 奇异积分算子，H^p 空间的实变理论，算子的加权模不等式等，在书中都得到了充分反映. 全书通过对实变量函数所构成的各种函数空间 (Lebesgue 空间、连续函数空间、Hardy 空间、*BMO* 空间等)和它们之间的算子作用 (Hardy－Littlewood 极大函数算子，Calderón－Zygmund 奇异积分算子等)以及Fourier 分析、算子与空间内插等重要方法的描述，对50 年代以来逐步形成与发展的处理 $\mathbb{R}^n$ 上各种分析问题的实变方法与技巧作了系统、深入、简明的介绍. 本书是北京大学以程民德教授为首的学术集体几十年来教学与科研的结晶，具有内容丰富、近代，叙述严谨、简明的特色，是实分析方面一本可读性很强的教科书与参考书.

本书前 4 章可供本科高年级学生选修，全书可作基础与应用数学、计算数学等许多方向的研究生的公共学位课教材，为从事调和分析、偏微分方程、非线性分析、数值分析、乃至数学物理等方面的研究与应用的读者提供必要的实分析基础训练.

实 分 析

程民德　邓东皋　龙瑞麟　编著

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

高等教育出版社激光照排技术中心照排

高等教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 21.25　字数 550 000

1993 年 11 月第 1 版　1993 年 11 月第 1 次印刷

印数 0 001—1 083

ISBN7—04—004438—2/O·1250

定价 8.80 元

前　　言

实分析，作为大学理工科有关专业高年级学生数学选修课与研究生数学基础课的教材，是以实变函数论与泛函分析课程内容为先导的、着重研究实变量函数所构成的各种函数空间以及空间之间的变换的一本入门教材.

50 年代以来，在 A.P. Calderón 和 A. Zygmund 开展 $\mathbb{R}^n$ 上奇异积分算子的研究过程中，逐步形成了一套处理 $\mathbb{R}^n$ 上分析数学有关问题的实方法. 以后经过 E.M. Stein 等人的补充与发展，这套实方法不仅丰富了并且继续丰富着 $\mathbb{R}^n$ 上分析数学的研究内容，而且正在愈来愈广泛地应用到偏微分方程、位势理论、算子理论、群表示论、非线性分析、计算数学、概率论和数学物理中. 如果我们把研究实变量函数所构成的各种各样的空间以及这些空间之间的积分算子等的近代进展统称为近代实分析的话，那末本书就是近代实分析的一本引论性教材，它提供基本的实方法，相应地给出近代实分析的一个轮廓，为有关各方向的研究与应用打下基础，使之能较广泛地适用于理工科有关专业高年级学生与研究生的需要.

本书几位作者多年来分别在北京大学数学系、中国科学院研究生院以及其他大学，讲授过这门课程. 本书就是在讲义的基础上整理而成的. 全书共七章. 第一章讲述 Lebesgue 空间 L^p 与连续函数空间理论. 这两类空间是实分析最重要也最基本的研究对象. 对它们缺乏一个基本的理解，就无法前进一步. 故本章带有预备知识的性质. 第二章讲述经典 Fourier 分析的基本内容. Fourier 分析不仅是一门理论性学科，同时也是一门重要的工具性学科. 近代实分析的许多理论与方法，大都来源于经典 Fourier

分析．本章将为以后各章讨论的实方法提供背景、思想与工具．第三章讨论50年代以后发展起来的一些基本的实方法，其中包括集合的分解与覆盖，分布函数的估计，Hardy－Littlewood 极大算子及其变形，函数的Calderón－Zygmund 分解，算子内插及经典奇异积分算子等．本章对这些方法，都限于最基本的介绍．它们的推广与深入发展，可在以后各章中看到．第四章介绍几类新的函数空间，它们是Hardy 空间H_1，有界平均振动函数空间BMO以及 Besov 空间等．这些空间是在Lebesgue 空间与连续函数空间的基础上发展起来的，为近代分析的研究提供了很合适的框架，也为本书讲述的实方法提供了很好的应用舞台．第五章介绍奇异积分算子近代理论的基本内容．这个理论不仅包括了卷积型的经典奇异积分算子，也包括了许多非卷积型的奇异积分算子．本章反映了调和分析80年代以来的某些重大进展．第六章介绍A_p权函数与加权模不等式．第七章进一步讨论算子内插与空间内插．本书前五章的基本内容，可在理工科有关专业研究生的数学基础课或在有关专业高年级本科生的选修课中讲授．最后两章则可根据专业需要与教学时间的长短加以选用．

作为一本研究生基础课或高年级本科生选修课的教材，本书不可能完全是自封的．除了需要用到其他数学基础课的内容外，还需要引用某些其他学科的结果．如果把这些结果的证明都写出来，本书的篇幅将变得不可想象．因此我们有几处将只引用结果并注明其出处，但尽可能把这种引用限于最少．另外，本书也未能完全按逻辑顺序讲述，有些地方前面要用到后面的结果．这仅仅是为了叙述方便，读者绝对不必担心会发生逻辑循环．当然，我们也尽可能限制这种情况的出现．本书每一章的最后一节，都用来提供习题、进一步的问题与注记．请注意，其中只有一部分是习题，是为读者提供训练用的．另一部分则是介绍理论的进一步发展与应用，是为有兴趣的读者提供进一步学习与研究的途径．要求读者自己全部完成这些题目，通常是不可能的．

本书的初稿曾由吉林大学王柔怀教授、杭州大学王斯雷教授与北京师范大学陆善镇教授开会审阅，其中特别是陆善镇教授，在会后又仔细审阅了修改稿．在审阅过程中他们前后都提出了许多宝贵意见，我们都作了相应的订正，在此对他们表示衷心的感谢．我们的研究生刘和平、樊启洪、蒋庆堂、熊承杰、杨建生与许传祥，为抄写书稿付出了大量的劳动，在抄写过程中还修正了不少笔误．我们对他们的帮助也表示感谢．最后感谢高等教育出版社，没有他们的热情支持，本书难以很快与读者见面．

限于水平，本书难免有疏漏与不妥之处，欢迎读者指正．

编　者

1991. 5. 30

符　号

根据其首次出现或重要重现而列出的符号表.

第一章　§1.1

$|E|$ —— 可测集 E 的测度

E^c —— 集合 E 的补集

$P(x)$, a.e. —— 命题 $P(x)$ 关于 x 几乎处处成立

L^p —— Lebesgue 空间 L^p

$\|\cdot\|_p$ —— L^p 空间内的模

L^p_+ —— L^p 的非负函数子集

p' —— 指标 p 的共轭(或对偶)指标或相伴数，即满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 的数

$\mathbb{R}_+$ —— 区间 $[0,\infty)$

$\overline{\mathbb{R}}_+$ —— 区间 $[0,\infty]$.

χ_E —— 集合 E 的特征函数

S —— 简单函数组成的空间

$\varphi_n \nearrow \varphi$ —— 增序列 $\{\varphi_n\}$ 收敛于 φ

$\log^+ x$ —— 函数 $\max(\log x, 0)$

$\log^+ L$ —— 空间 $\{f : \log^+|f| \in L^1\}$

$\langle\ ,\ \rangle$ —— Hilbert 空间的内积，或Banach 空间(或线性拓扑空间)与其对偶的对偶作用

§1.2

$\mathrm{sgn}\lambda$ —— 函数 $\overline{\lambda}/|\lambda|$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$

$(L^p)^*$ —— L^p 的对偶空间

§1.3

$f_n \xrightarrow{m} f$ —— 函数序列 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f

$f_n \longrightarrow f$, a.e. —— 函数序列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f

$*$ —— 卷积(或对合，§2.1)

§1.4

$E\Delta F$ —— 集合 E 与 F 的对称差

$B(x_0, r)$ —— 距离空间中以 x_0 为心，r 为半径的球

§1.5

$C(X)$, $C^R(X)$, $C_0(X)$, $C_{00}(X)$ —— 拓扑空间 X 上连续函数的几类空间

$M(X)$ —— X 上有界复值正规 Borel 测度组成的空间

§1.6

τ_h —— $\mathbb{R}^n$ 的平移算子 $\tau_h f(\cdot)=f(\cdot-h)$，其中 $h\in\mathbb{R}^n$

d_δ —— $\mathbb{R}^n$ 的伸缩算子 $d_\delta f(\cdot)=f(\delta\cdot)$，$\delta>0$

$\omega_p(f,\delta)$ $(\omega(f,\delta))$ —— f 的 L^p 连续(一致连续)模

Λ_α, $\Lambda_{p,\alpha}$ —— Lipschitz 空间

$D^\alpha=\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ —— 偏微分算子 $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$，其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,

$\alpha_j\in\mathbb{Z}_+$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$.

$\varphi_\varepsilon(\cdot)$ —— 函数 $\varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)$

$\mathscr{C}^k$ $(\mathscr{C}^\infty)$ —— k 阶(无限次)连续可微函数类(也见 §2.2，其中 C^0 见 §4.8)

$\mathscr{D}$ —— $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 赋适当拓扑所成的空间，(也见 §2.9 题 42)

cI —— 方体 I 的同心 c 倍扩大

f_I —— f 在方体 I (或其他可测集 I) 上的积分平均

L^q_{loc} —— 局部 L^q 可积函数空间

$\mathbb{Z}_+$ —— 非负整数 $\{0,1,2,\cdots\}$

S_{n-1} —— $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面，$d\sigma$ 表示其上的面积元.
I_α —— α 阶分数次积分算子
L_k^p —— Sobolev 空间
suppf —— f 的支集 (也见 §2.9 与 §7.6)

§1.7

V (f) —— 有界变差函数的全变差

第二章 §2.1

$\mathbb{T}$ —— 平面上的单位圆周

a_0 —— 特殊常数，$a_0=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}$.

$x \cdot y$ —— $\mathbb{R}^n$ 的内积
ρ^t (T^t) —— 矩阵 ρ (算子 T) 的转置
$P(D)$ —— 微分多项式
$\mathscr{F}$ 或 ∧ ($\mathscr{F}^{-1}$ 或 ∨) —— Fourier (逆)变换
$A(\mathbb{R}^n)$，$B(\mathbb{R}^n)$ —— 分别表示 $L^1(\mathbb{R}^n)^\wedge$，$M(\mathbb{R}^n)^\wedge$

§2.2

$D_N(x)$，$D_N^*(x)$ —— Dirichlet 核，修改的Dirichlet 核
$P_r(x)$ ($P_t(x)$) —— 单位圆 (上半平面)的 Poisson 核
$Q_r(x)$ ($Q_t(x)$) —— 单位圆 (上半平面)的共轭 Poisson 核
$\sigma_N(f, x)$ —— f 的 Fourier 级数的 N 阶Fejér 和或称$(c, 1)$和
$f(x, r)$ —— f 的Fourier 级数的 Poisson 和
$f \approx g$ —— f 与 g 等价即可互相控制
$\mathscr{T}$ ($\mathscr{T}_N$) —— 全体 (N 次)三角多项式集合
$P_t(x)$ —— $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 的Poisson 核

c_n —— 常数 $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Big/\pi^{\frac{n+1}{2}}$

$BR^{(\delta)}(\xi)$ —— Bochner－Riesz 核

§2.3

Λ_* —— Zygmund 函数类

$E_n(f)$ —— f 的n 次最佳三角多项式逼近

§2.5

$\Gamma_\alpha(x)\,(\Gamma(x))$ —— 宽度为 α (为1)的以 x 为顶点的锥

$\widetilde{f}$ —— f 的共轭函数 ($\widetilde{f}$ 有时也表示f 的反射，见 §2.8)

$H\,(H^*)$ —— (极大)Hilbert 变换

I —— 恒等算子

§2.8

$\mathscr{S}$ —— Schwartz 函数类(空间)

$\mathscr{S}'$ —— 缓增广义函数(分布)空间

§2.9

$L\log^+L$ —— 空间 $\{f : f\log^+|f| \in L^1\}$

第三章 §3.2

$\sigma_f(x)$ —— f 的分布函数

$f^*(f^{**})$ —— f 的非增重排函数(的平均)

$\wedge = \min$, $\vee = \max$

§3.4

Mf , $M_r f$ —— Hardy－Littlewood 极大函数

$f^\#$ —— #函数

§3.5

$\mathscr{M}$ —— 测度空间上可测函数的空间

$\|\cdot\|_{WL^q}$ —— 弱 L^q 模

§3.6

R_j —— Riesz 变换

§3.7

g_λ, g_x, g_k —— Littlewood－Paley g 函数的各种变形

$\mathscr{M}_p$ —— L^p 乘子空间

§3.8

M_S —— 强极大函数

第四章 §4.1

$H_1^{(q)}, H_1^{(q,s)}$ —— 原子Hardy 空间

$L(\beta, q', s)$ —— Campanato 空间

§4.2

BMO —— 有界平均振动函数空间（VMO —— 消失平均振动函数空间，BLO —— 下振动有界函数空间，均见§4.9）

$\|f\|_*, \|f\|_{**}, \|f\|_{*p}$ —— BMO 的等价模

§4.4

$S(f)$ —— f 的面积函数

§4.5

$\varphi^+(f)$，$\varphi_\alpha^*(f)$，$P^*(f)$ —— f 的各种极大函数

§4.6

$\mathscr{H}_p$ —— 经典 H_p 空间

§4.7

$\hat{Q}$ —— 以$Q\subset\mathbb{R}^n$ 为底的位于$\mathbb{R}^{n+1}_+$ 的帐篷

$|||\mu|||$ —— Carleson 测度μ的模

$A_q(f)$ —— f 的q 面积函数

§4.8

$\mathscr{S}^{\Omega}(L^{p,\Omega})$ —— Fourier 变换支于Ω的$\mathscr{S}(L^p)$中的函数集合

$L^p(l^q)$，$l^q(L^p)$ —— 向量值函数空间

$C^0(\mathbb{R}^n)$，$C^m(\mathbb{R}^n)$，$C^s(\mathbb{R}^n)$ —— Hölder 空间

$\mathscr{C}^s(\mathbb{R}^n)$ —— Zygmund 空间

$\Lambda^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ —— Besov－Lipschitz 空间

H^s_p —— Bessel 位势空间

B^s_{pq} —— Besov 空间

F^s_{pq} —— Triebel－Lizorkin 空间

§4.9

B_q —— q 块空间

ΛBV, ΛBMV, HBV, $HBMV$ —— 有界变差的推广及其与BMO 概念结合的几类空间

第五章 §5.1

$SK(r)$ —— r 阶的标准核

CZO，$CZO(r)$ —— Calderón－Zygmund 算子

§5.2

$T^*(f)$ —— f 的奇异积分极大算子

§5.3

Π_b —— 仿积算子

$\mathscr{C}_m$ —— m 阶Calderón 交换子

M_A —— 用函数A 作乘法的算子

C_A, C_Γ —— Cauchy 积分算子

§5.4

WBP —— 弱有界性质

$N_q^B(f)$ —— f 在$\mathscr{D}$上的半模

$\mathscr{D}_k$ —— 体积为 2^{-k} 的拟二进方体集，$\mathscr{D}=\bigcup_k \mathscr{D}_k$

$\{\alpha_I, \beta_I\}$ —— L^2 的拟正交基对

$\langle\ ,\ \rangle_b$ —— 以函数 b 为权的L^2 空间的拟内积

§5.5

$S_{1,1}^1$ —— 拟微分算子类

第六章　§6.1

A_p —— Muckenhoupt 权函数类

§6.2

A_∞ —— Muckenhoupt 权函数类，即 $p=\infty$ 时的 A_p

第七章　§7.1

$L^{p,q}$ —— Lorentz 空间

$\|\cdot\|_{p,q}$ ($\|\cdot\|_{p,q}^*$) —— Lorentz 空间的(拟)范数

§7.3

$\Delta(\overline{A})=A_0\cap A_1$ —— 容许空间对$\overline{A}=(A_0, A_1)$的交

$\Sigma(\overline{A})=A_0+A_1$ —— 容许空间对$\overline{A}=(A_0, A_1)$的和

$K(t,a,\overline{A})$, $J(t,a,\overline{A})$ —— 容许空间对 $\overline{A}$ 的K 泛函与 J 泛函

$(A_0, A_1)_{\theta,q,K}=K_{\theta,q}(\overline{A})$ —— K 方法定义的 $\overline{A}$ 的内插空间

$(A_0, A_1)_{\theta, q, J} = J_{\theta, q}(\overline{A})$ —— J 方法定义的 $\overline{A}$ 的内插空间

§7.4

$[A_0, A_1]_\theta$ —— 复方法定义的 $\overline{A} = (A_0, A_1)$ 的内插空间

§7.6

$E(t, a; \overline{A})$ —— 逼近 E 泛函
$E_{\alpha, q}(\overline{A})$ —— 由 E 泛函定义的空间
$K_p(t, a; \overline{A})$ —— K 泛函的一类等价泛函
L^0 —— L^p 当 $p \to 0$ 时的一种极限

目　录