舒文中

幻方

HUAN FANG

广东科技出版社

HUAN FANG

幻 方

舒 文 中

广 东 科 技 出 版 社

幻　方

舒文中

特邀编辑　陈仲英

•

广东科技出版社出版

广东省新华书店发行

广东阳春印刷厂印刷

787×1092毫米　16开本　9.75印张　1插页　190,000字

1991年10月第1版1991年10月第1次印刷

印数1—1,000册

ISBN 7—5359—0341—X

O,20　　定价4.00元

内 容 提 要

幻方又称纵横图、方宫图，在我国已有二千多年的研究历史。它不但以变幻迷离的玄妙性质引人入胜，而且在组合数学、图论以及程序设计、试验设计等方面有着越来越多的应用。

本书阐述了各种平面幻方、立体幻方及其多种多样的作法，并从数学理论上予以论证。书中不仅汇集了古今幻方资料，而且综合了作者的研究成果。它是近年来国内第一部研究幻方的系统著作。

本书适合具有中学文化程度的数学爱好者阅读。

自　　序

还在读小学时，遇一老人出了这样一道题目来考我：“把一正方形分成九个方格，每格分别填入1至9的九个数字之一，使纵、横、斜三格数字之和均为15。”我费了一番周折，终于拼凑成功。这使我既高兴，又受到启发。我进一步想：把一正方形分成十六个方格，再分别填入1至16这些数字，是否也可以使其纵、横、斜四格数字之和也相等呢？再经过一番思考，得知那个相等的和应是34。到后来，才知道具备这些性质的图形叫做幻方。可以说，我从小就接触到幻方，并对它产生了浓厚的兴趣，至今爱不释手。

几十年来，我如饥似渴地阅读各种杂志、书报上登载的论及幻方的文章，从中获得了不少教益，积累了知识，促进我对幻方的研究。

宋代数学家杨辉作出的“百子图”，即10阶幻方，其中对角线十数之和不等于505，即“隅径不合”。杨辉自己发现了却无法纠正。清代学者张潮曾通过调动其中某些数字，试图使“百子图”的对角线符合要求，虽然几经努力但仍以失败告终。我总结了前人的经验，终于用了一种葫芦形法，将杨辉的百子图作了纠正，使图中纵、横、斜十格之和等于505，解决了历时七百年的难题，兴奋的心情是难以言表的。

经过长期研究，我搜集并发现了幻方的多种作法，为了和致力于幻方研究的同志们交流研究成果，择要选编成这本书。书中着重阐明构造幻方图的思考过程，以期读者从中获得启发，提高逻辑推理能力。其中，如环形法、双曲线法、以及圆筒形幻方的奇妙性质等，可使读者欣赏到数字奇妙的特性。

本书编写时，曾参考下列同志的著作或手稿，特此申明并予致谢。

李　俨著：《中算史论丛》

孙泽瀛编：《数学方法趣引》

李铁木著：《纵横图论》

河北保定市杨天宝的手稿

浙江省金华市许实的手稿

浙江省杭州市柯建中的手稿

陕西省宝鸡市索鸿运的手稿

江苏省南京市陈明瑶的手稿

浙江省桐乡县姚锡全的手稿

广东省澄海县张淦周的手稿

上海市　陈关永的手稿

关于幻方的用途，涉及甚广，限于时间和能力，本书较少论及。

本人居处边陲，孤陋而寡闻，加之水平所限，错漏之处肯定不少。但是，《幻方》初稿方成，即广为流传，实感意外！由此而来，美国数学学会接纳我为会员，日本熊本大学邀我作演讲。承蒙中山大学计算机系陈仲英同志对初稿进行精细地整理加工，加强了论证，为本书增色生辉。在此向他表示衷心感谢！

舒文中

于广西宾阳中学

一九八二年七月

一九八八年五月改定

目 录

第一篇 平面幻方

第二篇 立体幻方

第一篇 平面幻方

第一章 幻方的定义及历史

一个正方形，如同棋盘一样分成相等的若干个小正方形（如图1），我们称每一横条为行，从上起第一横条叫第一行，第二横条叫第二行，……，其余类推；称每一竖条为列，从左起第一竖条叫第一列，第二竖条叫第二列，……，其余类推。在每个方格里填写一个自然数（所填的自然数从1起至小方格的个数为止，无间断，不重复），如果每一行，每一列以及每条对角线上的数分别加起来所得的和都相等，就叫做幻方。这个相等的数，称为幻方常数或定数。幻方的每条边有几格，就叫做几阶幻方。n阶幻方常数，记作H_n。不难算出$H_n=\frac{n(n^2+1)}{2}$。例如将图1填成图2后，就成为一个4阶幻方。它的每一行，每一列以及每条对角线上各数的和都等于定数$H_4=\frac{4\times(4^2+1)}{2}=34$。

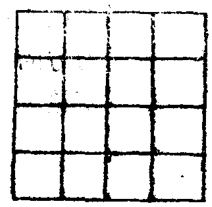

图 1

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

图 2

幻方的历史很悠久。早在两千多年前，我国就有所谓洛书〔图3（一）〕，用阿拉伯数字表成图3（二），就是一个3阶幻方。

在古代，人们没有认识到幻方是利用整数的某些特性构成的，而把它看成神秘的东西。在我国有所谓“河出图，洛出书”，“龙马负图”等神话。在外国例如印度、阿拉伯以及欧洲的某些地方，还有把幻方用于占卜命运的。据说现时阿拉伯和印度少女中，还有把3阶幻方制成银牌作为护身符，挂在胸前以驱邪的。

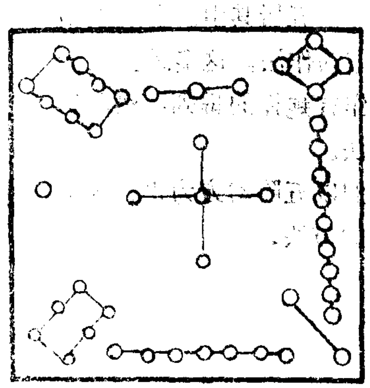

图 3（一）

我国是最早研究幻方的国家。早在公元前1世纪，《大戴礼》一书中就把“洛书”以图3（二）的形式记载

下来，称为九宫算。这是唯一的3阶幻方，也是最简单的奇数阶幻方。1275年宋朝的数学家杨辉所著的《续古摘奇算法》中谈到洛书的构造方法，上卷载有4，5，6，7，8，9，10各阶幻方（其中10阶幻方的对角线不符合条件）。国外幻方研究要推1514年杜勒名画中的4阶幻方（图4）为最早，但比杨辉的研究迟了200多年。

8	3	4
1	5	9
6	7	2

图 3（二）

幻方一名魔方，日本人称为方陈，即方阵，我国又称纵横图或方宫图等。几千年来，人们没有中断过对幻方的研究。整数的这种变幻迷离的玄妙性质，自古以来吸引着无数的数学爱好者。人们不仅造出了各种幻方，还找出了其中的某些规律。到了本世纪60年代，有人应用数论的方法，证明了任何n阶（$n>2$）幻方的可构造性。随着科学的发展以及电子计算机的问世，幻方这个颇似数学游戏的古典题目日益受到重视。现在已经有人编出任意高次的偶阶幻方的计算程序，并编入“CACM程序汇编”。目前，幻方正在组合数学、图论、博奕论以及程序设计、试验设计、人工智能等方面得到应用。

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 4

第二章　奇阶幻方的作法

§1　调　数　法

1．从洛书谈起

杨辉在《续古摘奇算法》一书中对洛书作法是这样叙述的，“九子排列（图5），上下对易，左右相更（图6），四维挺出（图7）”，从而得到洛书。书中指出：“戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，五居其中。”这里指出了3阶幻方的作法。这实际上是一种先把诸数作有规律的排列，然后进行调数的方法。

现在我们以五阶幻方为例，来探讨一种调数的方法。

①
④ ②
⑦ ⑤ ③
⑧ ⑥
⑨

图5

⑨
④ ②
③ ⑤ ⑦
⑧ ⑥
①

图 6

④	⑨	②
③	⑤	⑦
⑧	①	⑥

图 7

把平面上的正方形分成25个方格，把1至25诸数从第一行左起自左至右，由上而下逐行顺序填入方格得到图8。我们把这样的图形称为自然方阵。

5阶幻方定数$H_5=\dfrac{5\times(5^2+1)}{2}=65$。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

图 8

我们先考虑怎样调数才能使各行诸数的和都相等，即都等于65。我们看到每一行各数都比前一行同列的数大5。第五行各数比第一行同列的数大20。如果将第五行与第一行同列的数交换两对（例如将1与21对换，5与25对换），则第五行各数之和仍比第一行各数的和大20。如果我们再把第一行未交换过的一个数与第三行同列的数交换，又把第五行未交换过的数与第三行同列（必须未交换过）的数交换（例如4与14对换，12与22对换），则第一行和第五行各数的和就都等于定数了。类似地，第二行和第四行可作类似交换使各数的和等于定数〔例如7与17对换，9和19对换，10和15对换，11和16对换，这样图8变成图8(一)〕。因为第一、二、四、五行各行诸数的和都等于定数，故第三行诸数的和也必等于定数。上述交换之后，每列诸数之和保持不变。

21	2	3	14	25
6	17	8	19	15
16	22	13	4	10
11	7	18	9	20
1	12	23	24	5

图 8(一)

现在再来考虑列的情形。图8中第5列的数比第一列同行的数大4。图8(一)中仍有两对数保持这一性质，从而我们可以类似行那样进行交换调数（例如21与25对换，1与5对换，6与8对换，20与18对换）。第二、四列也可同样进行〔例如17与19对换，7与9对换，2与3对换，24与23对换，从而图8(一)变成图9〕。

25	3	2	14	21
8	19	6	17	15
16	22	13	4	10
11	9	20	7	18
5	12	24	23	1

图 9

将图8和图9进行比较，我们就会发现，若把两对角线上相对于中心对称的两数进行交换，则各行各列都已交换了两对数。剩下的只是把每一行和每一列向中间行和中间列交换未调动过的一对同行或同列的数就可以了。这时还须保持中心数（即处于中间行中间列的数）不动。这样做，每条对角线上的数仍保持在该对角线上。由于自然方阵每条对角线上的和必等于幻方常数，故所得图形的对角线必满足要求。读者容易验证图9是一个5阶幻方。

2．4k+1阶幻方作法

上面对于5阶幻方作法的讨论，启示我们可以用类似的方法作出4k+1阶的幻方。我们再以9阶和13阶的幻方为例来讨论一般作法。

今后我们称方阵的两条主对角线的交点为方阵的对称中心，称到中心距离相等的两行（列）为对称行（列）。

首先作9阶自然方阵如图10。与5阶的作法类似，现在必须先对各对称行和列分别交换8对数。为此，我们除去中间行和中间列外，每四行四列作两条短对角线如图，然后将对角线上关于方阵中心对称的数两两互换。例如1与81互换，4与78互换，6与76互换，9与73互换，11与71互换，等等。然后，各行、列还要与中心行、列交换一对未调动过的数，并保持中心数不动。例如在图10中画单线的上、下互换，画双线的左、右互换。这样交换以后，就得到9阶幻方如图11。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

图 10

81	2	5	78	3	76	43	8	73
10	71	70	14	13	42	66	65	18
23	62	61	22	19	24	57	56	45
54	32	30	51	29	49	34	44	46
56	47	75	67	41	15	7	35	27
36	38	48	33	53	31	52	50	28
37	26	25	58	63	60	21	20	59
64	17	16	40	69	68	12	11	72
9	74	39	6	79	4	77	80	1

图 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104
105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117
118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143
144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156
157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169

图12

13阶幻方作法基本相同，只须注意作短对角线时跨过中间行和中间列要断开（如图12）。将对角线上关于方阵中心对称的数互换，然后各行、列与中间行、列交换一

对数。即将图12中画上单线的数上、下互换，画上双线的左、右互换，就得到13阶幻方如图13。

169	2	3	166	165	7	6	86	161	160	11	12	157
14	155	154	17	20	151	18	149	87	23	146	145	26
27	142	141	33	31	138	30	136	35	88	133	132	39
130	41	46	127	126	45	42	47	122	121	89	51	118
117	59	55	114	113	58	54	60	109	108	63	90	105
72	103	102	69	70	99	66	97	74	75	94	93	91
92	106	120	134	148	162	85	8	22	36	50	64	78
79	77	76	95	96	73	104	71	100	101	68	67	98
65	80	107	62	61	110	116	112	57	56	115	111	53
52	119	81	49	48	123	128	125	44	43	124	129	40
131	38	37	82	135	34	140	32	139	137	29	28	143
144	25	24	147	83	21	152	19	150	153	16	15	156
13	158	159	10	9	84	164	163	6	4	167	168	1

图 13

一般地，$4k+1$阶幻方的作法可归纳如下：

1）先作$4k+1$阶自然方阵和两条主对角线。

2）除去中间行和中间列不计，每四行四列作两条对角线（若跨过中间行或中间列的，则要断开）。

3）把各对角线上关于方阵中心对称的数两两互换。

4）保持中心数不动，每行与中间行选择一对同列且未调动过的数进行交换，每列与中间列选择一对同行且未调动过的数进行交换（要尽量使要交换的数具有一定的规律，例如图12中使交换的数围成一个菱形，这样可以避免错乱）。

如上述方法调数，幻方即成。

下面我们来证明这样作成的图形的确满足幻方的条件。

先引进一个记号。符号“Σ”表示各数连加。例如$\sum_{i=1}^{N} i$表示i取1直至N并连加起来，

即 $$\sum_{i=1}^{N} i = 1+2+3+\cdots+N = \frac{N(N+1)}{2}$$

又如幻方常数$H_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n^2} i = \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2}$

我们将方阵的第i行第j列的数记为a_{ij}。对于n阶自然方阵，显然有

$$a_{ij}=(i-1)n+j \qquad (*)$$

我们指出，n阶自然方阵的n个不同行不同列的数的和必等于幻方常数H_n。事实上，这样n个数a_{ij}中，下标i和j都取遍1,2,3，…,n且不重复，因此由（*）式可知它们的和等于

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)n+\sum_{j=1}^{n} j=\frac{(n-1)n}{2}\cdot n+\frac{n(n+1)}{2}=H_n$$

由此可知，自然方阵的每条对角线上诸数的和等于H_n。在上面的作法中，由于每条对角线上的数虽经调换，但仍然保持在该对角线上，故其和不变，仍等于幻方常数H_n。

现在再考察各行诸数之和。先看自然方阵的中间行（即第$2k+1$行）各数之和。据（*）式，此和为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{2k+1,j}=\sum_{j=1}^{n}(2kn+j)=2kn^2+\frac{n(n+1)}{2}=H_n$$

由于在自然方阵中各行的数比前一行同列的数大n，因此第$2k+1\pm m$行（$1\leqslant m\leqslant 2k$）在调数前各数之和为$H_n\pm mn^2$。由于除中间行外各行与对称行交换$2k$对数，与中间行交换一对数，因此调数后第$2k+1\pm m$行各数的和为

$$H_n\pm mn^2\mp 2k\cdot 2mn\mp mn=H_n$$

即调数后这些行各数的和都等于幻方常数。因为方阵全部数的总和为nH_n，故剩下的中间行经调数后各数的和等于$nH_n-4kH_n=H_n$。事实上，由作法可知，这时中间行必然由自然方阵中不同行不同列的数所组成，故也知其和为H_n。列的情况与行类似，故同理可证。

由上所证，调数后所得图形为一幻方。

从上面所述还可看到，每4行4列作对角线并非必要，只是为了调数简便且有规律。如果掌握了上面所述的原理，则可以作出不同的调数方法。

3．4k+3阶幻方作法

先以7阶幻方为例进行分析，作自然方阵如图14。按$4k+1$阶幻方作法的思想，把对角线上关于中心对称的数两两互换后，各对称行、列还要交换一对未调动过的数，同时各行、列还要与中间行、列在同列或同行交换一对未调动过的数。这样做难以实现，因为各对称行、列交换了一对数后就没有足够多的未动过的数来与中间行、列交换；而若先与中间行、列交换一对数，又没有足够多的未动过的数来作对称行、列的交换。因此须另想办法。如果图14的最外一圈不动，里面就是一个5阶方阵。按5阶幻方的作法调数，可以使这个5阶方阵的每行、每列和每条对角线上5个数的和都等于125。再把外圈四角的数同对角的数互换，得到图15。现在只须

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

图 14

调整外圈的数，使除四角外同行、同列两数的和为50，且四条外边上每边7个数的和为175就行了。这种调整并不太难，如图16就是调好后的7阶幻方。

49	2	3	4	5	6	43
8	41	11	10	26	37	14
15	18	33	16	31	27	21
22	30	38	25	12	20	28
29	23	19	34	17	32	35
36	13	24	40	39	9	42
7	44	45	46	47	48	1

图 15

49	35	3	4	5	36	43
8	41	11	10	26	37	42
6	18	33	16	31	27	44
28	30	38	25	12	20	22
29	23	19	34	17	32	21
48	13	24	40	39	9	2
7	15	47	46	45	14	1

图 16

11阶幻方也可以如上用先调中间的9阶方阵，再作外圈的调动的办法来作。但由于格数加多，可供调动的数多，不致出现7阶时没有未动过的数可调的问题。因此，11阶以上的$4k+3$阶幻方可用直接调数的方法。调数的基本想法与$4k+1$阶幻方的情形相同。下面我们举例说明具体作法。为了叙述方便，我们先作如下说明，即下文所说的交换都是指交换自然方阵中未调动过的数，并且方阵的中心数保持不动，不列入交换的范围。

1	△ 2	3	4	× 5	○ 6	○ 7	# 8	9	△ 10	11
△ 12	13	14	× 15	16	○ 17	18	○ 19	# 20	21	△ 22
— 23	× 24	25	△ 26	# 27	○ 28	29	△ 30	31	○ 32	— 33
# 34	35	× 36	37	△ 38	○ 39	△ 40	41	○ 42	43	44
× 45	# 46	△ 47	48	49	○ 50	51	52	△ 53	54	○ 55
× 56	× 57	× 58	× 59	× 60	61	× 62	× 63	× 64	× 65	× 66
○ 67	# 68	△ 69	— 70	71	○ 72	73	— 74	△ 75	76	× 77
# 78	— 79	○ 80	81	△ 82	○ 83	△ 84	85	× 86	— 87	88
89	○ 90	91	△ 92	# 93	○ 94	95	△ 96	97	× 98	99
△ 100	101	102	○ 103	— 104	○ 105	— 106	× 107	# 108	109	△ 110
111	△ 112	— 113	114	○ 115	○ 116	× 117	# 118	— 119	△ 120	121

图 17

例如作11阶幻方。先作11阶自然方阵如图17。各对称行、列要互换5对数，各行、列还要分别同中间行、列交换一对数。具体做法是先把对角线上关于中心对称的二数交换，然后每行、列还要交换三对数。如图17，把有“△”号的数交换到中心对称的位置

上去。这样，各对称行、列都已交换了四对数。再把有“#”号的同列上下交换，有“—”号的同行左右交换，则各行、列都与对称行、列换了5对数。最后只需各行与中间行，各列与中间列再交换一对数就行了。如将图17中有“×”号的与中间行同列上下交换，有“O”号的与中间列同行左右交换，便得到11阶幻方如图18。

121	120	3	4	60	7	6	118	9	112	111
110	109	14	59	16	19	18	17	108	101	100
33	57	97	96	93	32	29	92	91	28	23
78	35	58	85	84	12	82	81	39	43	44
56	68	75	48	73	55	71	52	69	54	50
45	24	36	15	5	61	117	107	86	98	77
72	46	53	74	51	67	49	70	47	76	66
34	87	83	41	40	80	38	37	64	79	88
89	94	31	30	27	90	95	26	25	65	99
22	21	102	105	106	103	104	63	20	13	12
11	10	119	114	116	115	62	8	113	2	1

图 18

1	△ 2	△ 3	4	5	6	× 7	○ 8	○ 9	10	11	# 12	13	△ 14	15
△ 16	17	18	19	△ 20	× 21	22	○ 23	24	○ 25	○ 26	27	# 28	29	△ 30
△ 31	32	33	△ 34	× 35	36	# 37	○ 38	39	40	○ 41	△ 42	43	44	△ 45
— 46	△ 47	× 48	49	△ 50	# 51	52	○ 53	54	55	△ 56	57	○ 58	△ 59	— 60
61	— 62	# 63	× 64	65	△ 66	△ 67	○ 68	△ 69	△ 70	71	○ 72	73	— 74	75
# 76	× 77	— 78	△ 79	80	81	△ 82	○ 83	△ 84	85	86	△ 87	— 88	○ 89	90
× 91	# 92	△ 93	94	95	△ 96	97	98	99	△ 100	101	102	△ 103	104	○ 105
× 106	× 107	× 108	× 109	× 110	× 111	× 112	113	× 114	× 115	× 116	× 117	× 118	× 119	× 120
○ 121	# 122	△ 123	124	125	△ 126	127	○ 128	129	△ 130	131	132	△ 133	134	× 135
# 136	○ 137	138	△ 139	140	141	△ 142	○ 143	△ 144	145	146	△ 147	148	× 149	150
151	152	# 153	○ 154	155	△ 156	△ 157	○ 158	△ 159	△ 160	161	× 162	163	164	165
166	△ 167	○ 168	169	△ 170	# 171	— 172	○ 173	— 174	175	△ 176	177	× 178	△ 179	180
△ 181	182	183	△ 184	○ 185	— 186	# 187	○ 188	189	— 190	× 191	△ 192	193	194	△ 195
△ 196	197	198	199	△ 200	○ 201	202	○ 203	204	× 205	△ 206	— 207	# 208	209	△ 210
211	△ 212	△ 213	214	215	216	○ 217	○ 218	× 219	220	— 221	# 222	△ 223	△ 224	225

图 19

又如作15阶幻方。先作15阶自然方阵如图19。各对称行、列要交换7（即$\frac{15-1}{2}$）对数，各行、列还要分别同中间行、列换一对数。我们把要交换的数作上记号。对角线上的数和标有“△”号的数都调换到对称位置上去；标有“#”号的同列上下互换；标有“—”号的同行左右互换；标有“×”号的与中间行同列的数互换；标有“○”号的与中间列同行的数互换。这样便得到15阶幻方如图20。

225	224	223	4	5	6	112	9	8	10	11	222	213	212	211
210	209	18	19	206	111	22	25	24	23	200	27	208	197	196
195	32	193	192	110	36	187	41	39	40	38	184	183	44	181
60	179	108	177	176	171	52	58	54	55	170	169	53	167	[illegible]
61	74	153	109	161	160	159	72	157	156	155	68	73	62	[illegible]
136	107	88	147	80	145	144	89	142	141	86	139	78	83	[illegible]
106	122	133	94	95	130	129	105	127	126	101	102	123	104	[illegible]
91	77	48	64	35	21	7	113	219	205	191	162	178	149	[illegible]
128	92	103	124	125	100	99	121	97	96	131	132	93	134	120
76	143	138	87	140	85	84	137	82	81	146	79	148	119	150
151	152	63	158	71	70	69	154	67	66	65	117	163	164	165
166	59	173	57	56	51	174	168	172	175	50	49	118	47	180
45	182	43	42	188	190	37	185	189	186	116	34	33	194	31
30	29	198	207	26	203	202	201	204	115	20	199	28	17	16
15	14	13	214	221	216	218	217	114	220	215	12	3	2	1

图 20

阶数越高，调数越易，因为在调数过程中可供交换的未调动过的数，随着阶数的增高而增多。熟悉这种方法以后，可以省去先作自然方阵这个步骤。以19阶幻方为例，它需要对自然方阵各行、列与对称行、列交换9（即$\frac{19-1}{2}$）对数，并且各行、列分别与中间行、列交换一对数。于是，我们可以先画出幻方所需要的方格，作两条对角线，再在方阵的小方格中标上若干记号表示要作的交换。例如以“△”表示要与其中心对称的数互换，标号需每行、每列都有6个并且它们的分布是关于中心对称的；以“#”表示要与对称行同列上下互换，每行一个；以“—”表示要与对称列同行左右互换，每列一个；以“×”表示要与中间行同列的数互换，每行一个；以“○”表示要与中间列同行的数互换，每列一个；为清楚起见，除中心数外，中间行全标上“×”号，中间列全标上“○”号（上面所述的每行、每列都不包括中间行、中间列）。只要在同一格中不出现两个符号，即算成功。然后将自然方阵上的数按记号所示逐一填入，例如数1按记号所示填入方阵的右下角等等，如此即得幻方。图21表示按此法所作的19阶幻方。

361	360	359	358	15	6	7	8	10	9	182	12	13	356	5	346	345	344	343
342	341	340	339	24	33	26	29	28	27	20	183	336	25	34	327	326	325	324
323	40	321	320	319	48	51	46	47	44	49	316	45	185	309	308	307	56	305
304	59	74	301	300	299	67	69	66	64	296	65	184	291		289	60	75	286
95	284	79	86	281	280	279	274	87	80	85	88	273	272	271	187	93	268	77
96	97	98	251	105	261	260	259	258	100	256	255	254	253	186	111	112	113	114
115	116	124	118	243	120	241	240	239	117	207	236	235	128	233	244	188	132	133
134	143	136	149	138	223	222	221	220	135	218	217	216	215	224	137	150	189	152
162	208	207	156	157	158	197	202	201	153	199	198	165	166	167	168	193	192	190
191	211	231	270	252	329	311	293	351	181	11	31	70	52	110	92	131	151	171
172	170	169	194	195	196	159	164	163	209	161	160	203	204	205	206	155	154	200
210	173	212	213	214	147	146	145	144	227	142	141	140	139	148	225	226	219	228
229	230	174	232	129	234	127	126	125	245	123	122	121	242	119	130	238	246	247
248	265	250	99	176	109	108	107	106	262	104	103	102	101	257	263	264	249	266
267	94	269	175	91	90	89	84	275	282	277	278	83	82	81	276	283	78	285
76	287	288	73	72	71	292	179	294	298	68	297	295	63	62	61	302	303	58
57	306	55	54	53	310	178	312	313	318	315	50	317	314	43	42	41	322	39
38	37	36	35	328	177	330	331	332	335	334	333	32	337	338	23	22	21	20
19	18	17	16	347	348	349	350	180	353	352	354	355	14	357	4	3	2	1

图 21

§ 2 先定对角线法

用上节所述的调数法，固然能够作出任何奇阶幻方，但未免比较麻烦。现在我们来进一步寻找一些有趣的简便的方法。

为了研究方便，仍以 5 阶幻方为例。先作 5 阶自然方阵如图22。从左上方到右下方的 5 格（ 1，7，13，19，25）叫左对角线，从右上方到左下方的 5 格（ 5，9，13，17，21）叫右对角线。左对角线的右邻 4 格（ 2，8，14，20）加上方阵的左下角一格（21）合为一组，这 5 格也看作对角线。因为如果把方阵

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

图 22