实用运算微积

积分变换在工程中的应

佘寂荣　刘作述　编著

实用运算微积

——积分变换在工程中的应用

佘寂荣　刘作述　编著

安徽教育出版社

（皖）新登字03号

实用运算微积

——积分变换在工程中的应用

安徽教育出版社出版发行

（合肥市金寨路283号）

新华书店经销　　合肥永青印刷厂印刷

•

开本：850×1168　1/32　印张：1[illegible].25　字数：250000

1992年8月第1版　　1992年8月第1次印刷

印数：2,000

ISBN7—5336—0915—3/G·1366

定价：5.90元

内容简介

本书介绍了拉普拉斯变换与富里叶变换的基本内容及其在工程技术中的应用。全书共分五章，前三章讲述拉普拉斯变换的基本概念与在机械系统、电路系统、数理经济系统以及自动控制和随机分析中的应用，后两章讲述富里叶变换的基本知识以及在振动与热导理论中的应用。

读者对象为工科院校高年级学生、研究生、教师以及从事实际工作的工程技术人员等。

前言

本书简要地介绍拉普拉斯变换与富里叶变换的基本知识及其在工程技术中的某些应用，我们希望本书能够作为一个导引帮助读者了解这一理论的基本内容与方法并为从事实际工作的科技人员作好必要的有关变换方法的准备知识。

全书共分五章。第一章叙述拉普拉斯变换的基本概念与性质；第二章叙述求逆拉普拉斯变换的方法；第三章较详细地介绍了拉普拉斯变换在机械系统、电路系统、数理经济系统、自动控制理论以及随机分析理论中的广泛应用；第四章讲述富里叶变换的基本知识，由于数字电子计算机的出现，本章特别讲述了离散富里叶变换及其快速算法，说明了建立计算框图的一般原则，并写出它的ALGOL计算机程序；第五章介绍富里叶变换在振动理论与热导理论中的应用。阅读本书仅需具备大学高等数学中有关微积分和复变函数等基础知识。

书中各章末尾都附有适量的习题，以帮助读者巩固和理解书中的基本内容。书后附有拉普拉斯变换和富里叶变换表，供学习时查用。

武汉工业大学校长袁润章教授对本书的编写曾给予热情的支持，陈永娥副教授帮助整理了若干节，李玉琢副教授帮助校对了部分内容，我们要特别提到的是中国科技大学的龚昇教授、国家教育委员会全国高等工科学校工科数学课程教学指导委员会委员，《工科数学》杂志主编、合肥工业大学的卢树铭先生对本书的编写始终关心和热情支持，并提出许多宝贵意见，使原稿得到很大的改进。作者衷心感谢他们的帮助与合作。

由于编者水平所限，本书错误或不妥之处在所难免，殷切希望读者给予指正，提出宝贵意见。

佘家荣　刘作述

1990年9月

目　录

第一章　拉普拉斯变换

§1.　一个简单的实例

为了理解数学中变换方法的功用，我们先看一个简单的例子，如果要解下列方程

$$x^{1.15}=3 \tag{1—1}$$

由于$x^{1.15}$已不是一个初等的运算，因此直接求解是困难的，通常是将(1—1)式两边取对数（作一数到数的变换），则得到

$$1.15\log x=\log 3 \tag{1—2}$$

此时，方程（1—2）已是含变换域的未知数$\log x$的较易求解的方程，其解为

$$\log x=\frac{\log 3}{1.15}$$

再通过反变换($\log^{-1}(.)$)就可得到原来问题的解答。

即

$$x=\log^{-1}\left(\frac{\log 3}{1.15}\right)$$

这种利用变换方法去求方程解的基本思想可用下列框图表明：

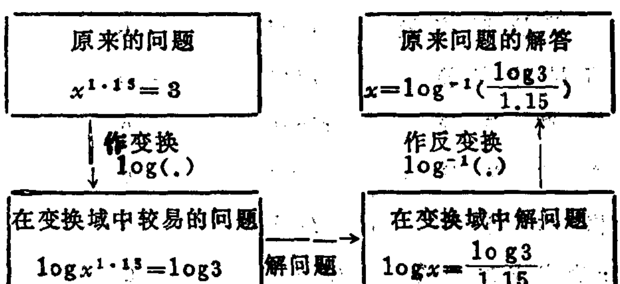

图1—1　利用变换方法求解问题

在现代科学与工程技术中，常常会提出求解各类常微分方程和偏微分方程的问题。而这些方程的求解，除一些特殊情况外，通常是不好求解的，我们能否像上述例子一样，通过作变换（此时，已不是数到数的变换，而应是函数到函数的变换或算子）来简化我们的问题，使得原方程在变换后是较易求解的，在变换域中求解后，再利用反变换以得到原来问题的解答呢？事实上，这种方法确实存在，这就是本书要讲的由电气工程师们的实际工作中总结出来的拉普拉斯变换等方法。

§2. 拉普拉斯变换的定义

拉普拉斯变换属于熟知的积分变换。函数$f(t)$的积分变换是用下面形式的积分定义的

$$F(s)=\int_a^b K(s,t)f(t)dt$$

其中$K(s,t)$称之谓变换核，它是s和t的已知的两元函数，注意，积分变量是t而s是一参数，a和b是两个常数（可以是$\pm\infty$），显然，$f(t)$和$F(s)$之间的对应关系由核$K(s,t)$和积分限a、b确定。在应用数学中，几个重要的积分变换的核与积分限如下：

表1　常用积分变换的核与积分限

变换名称	$K(s,t)$	a	b
拉普拉斯变换	e^{-st}	0	∞
富里叶变换	e^{ist}	$-\infty$	∞
正弦变换	$\sin st$	0	∞
余弦变换	$\cos st$	0	∞
梅林变换	t^{s-1}	0	∞
r阶亨克尔变换	$tJ_r(st)$*	0	∞

* $J_r(x)$表示r阶第一类贝塞尔函数。

定义1 设函数$f(t)$当$t \geqslant 0$时有定义，而且积分

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (s\text{是一复参量})$$

在s的某一域内收敛，则由此积分所确定的函数可写为

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)^{-st}dt \tag{1—3}$$

我们称（1—3）式为函数$f(t)$的拉普拉斯变换式（简称拉氏变换），记作

$$F(s)=L\{f(t)\}$$

$F(s)$称为$f(t)$的拉氏变换（或象函数）。

若$F(s)$是$f(t)$的拉氏变换，则称$f(t)$为$F(s)$的拉氏逆变换（或称为象原函数），记作

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}.$$

为了方便起见，我们可以用符号表示以上的关系

$$f(t)\longleftrightarrow F(s).$$

这里，$\longleftrightarrow$表示右边是左边的拉氏变换。

例1 求单位函数

$$u(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$$

的拉氏变换。

由拉氏变换的定义，有

$$L\{u(t)\}=\int_0^{+\infty} e^{-st}dt$$

这个积分在$\mathrm{Re}(s)>0$时收敛，而且有

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

所以

$$L\{u(t)\}=\frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

例2 求指数函数$f(t)=e^{Kt}$的拉氏变换（K为实数）。

由定义，有

$$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{Kt}e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-(s-K)t}dt$$

这个积分在$\mathrm{Re}(s)>K$时收敛.而且有

$$\int_0^{\infty}e^{-(s-K)t}dt=\frac{1}{s-K}$$

所以

$$L\{e^{Kt}\}=\frac{1}{s-K}\qquad(\mathrm{Re}(s)>K)$$

§3. 拉氏变换的定义域，收敛横坐标

从前面的例子可看出，一个函数的拉氏变换仅对某些复数s存在.例如，在例1中仅当$\mathrm{Re}(s)>0$时，在例2中仅当$\mathrm{Re}(s)>K$时，（1—3）式才有意义.本节将讨论一个函数的拉氏变换的定义域问题，结果发现，拉氏变换的定义域具有非常简单的结构.它是复平面中的一条铅直垂线的右半平面.

以下，我们叙述几个有关拉氏变换存在域的结果，要想详细了解其证明的读者可参看附录8.

定理1 设积分（1—3）当$s=s_0=\sigma_0+i\tau_0$时收敛，则（1—3）在任何角域（图1—2）

$$A_r=\{s:|\arg(s-s_0)|\leqslant r\}$$

上一致收敛，这里$r\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

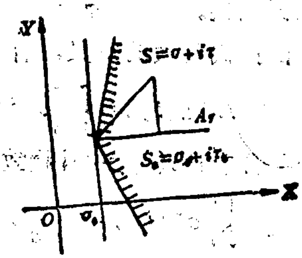

图1—2 角域Ar

推论1 积分（1—3）在$s=\sigma_0+i\tau_0$收敛，则（1—3）在$\{s:\mathrm{Re}(s)>\sigma_0\}$内任一点处收敛.

由推论1及常用的分析技巧，我们可以证明除去（1—3）在全平面处处收敛与无处收敛两种情况外，一定存在一实数σ_c，使得对于任意$s\in\{s:\mathrm{Re}(s)>\sigma_c\}$时，积分（1—3）收

敛，$s\in\{s: \mathrm{Re}(s)<\sigma_c\}$时，（1—3）发散，该实数$\sigma_c$称作积分（1—3）的收敛横坐标，$\mathrm{Re}(s)=\sigma_c$称为收敛轴，$\{s: \mathrm{Re}(s)>\sigma_c\}$称为收敛半平面。由定理1可知，积分（1—3）在其收敛半平面内确定一解析函数（因一致收敛的含参积分可在其收敛域中求导）

在数学分析理论中，我们知道，实幂级数的收敛域是一区间，而复幂级数的收敛域是一圆域，它们的收敛半径可以用Cauchy—Hadamard公式来确定。在拉氏变换理论中，为了确定收敛横坐标，我们有下述Kojima—knopp公式：

定理2 积分（1—3）的收敛横坐标由下式确定

$$\sigma_c=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln A_n}{n}$$

其中

$$A_n=\max_{n\leqslant t\leqslant n+1}\left|\int_n^t f(u)du\right|$$

从以上定理我们可看出，由Kojima—Knopp公式去确定一般的拉氏积分（1—3）的收敛横坐标是比较复杂的，以下我们提出一组使函数的拉氏积分存在的充分条件，而且很容易确定其收敛区域，这种条件在实际应用中已相当广泛了。

✓ **定理3** 若函数$f(t)$满足下列条件：

1° $f(t)$在每一个有限区间$0\leqslant t\leqslant T$上满足狄里赫利条件*（更广泛地，可以假设函数在$0\leqslant t\leqslant T$是逐段连续的，即$f(t)$仅有有限个间断点，而且间断点是第一类的）。

2° 在t充分大后满足不等式$|f(t)|\leqslant Me^{ct}$，其中M、c都是实常数，满足条件2°的函数称它的增大是指数级的，c为它的增长指数，则$f(t)$的拉氏变换

---

* 狄里赫利条件，参看樊映川等编《高等数学》（下册），1964年版第57页。

$$F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在半平面$\mathrm{Re}(s)>c$上一定存在。此时右端的积分绝对而且一致收敛，而在这半平面内$F(s)$为解析函数。

证 由条件2°知，存在某一相当大的正数T，使得当$t>T$时

$$|f(t)|\leqslant Me^{ct}$$

成立，由于

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_0^T f(t)e^{-st}dt+\int_T^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

右端第一个积分是个定积分，当然收敛，对于第二个积分，由

$$|f(t)e^{-st}|=|f(t)|e^{-\sigma t}\leqslant Me^{-(\sigma-c)t}$$

可见，它在$\mathrm{Re}(s)=\sigma>c$的条件下收敛，即有

$$\int_T^{+\infty}\left|f(t)e^{-st}\right|dt\leqslant M\int_T^{+\infty}e^{-(\sigma-c)t}dt$$

$$=\frac{M}{\sigma-c}e^{-(\sigma-c)T}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

绝对收敛。

由含参变量广义积分的性质知，在$\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$内，积分(1-3)是一致收敛的，不仅如此，用同样的方法还可进一步证明，在此积分号内对s求导数所得的积分在$\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$内也一致收敛，根据复变函数的解析函数理论，知$F(s)$在$\mathrm{Re}(s)>c$内解析。

我们强调一下，定理3中的条件1°和2°仅是充分的，而不是$f(t)$存在拉氏变换的必要条件，例如下面函数

$$f(t)=e^{t^2}\cos e^{t^2} \tag{1—4}$$

不是指数阶的，然而积分

$$\int_0^{\infty} e^{t^2}\cos e^{t^2}dt \tag{1—5}$$

收敛。易见当$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$时，（1—4)式的拉氏变换必定存在。

通常，一些函数的拉氏变换是一有理函数，且设它的m个极点是P_1，P_2，…，P_m。按照其实部的大小可排成以下次序，即

$$\mathrm{Re}P_1\geqslant \mathrm{Re}P_2\geqslant\cdots\geqslant \mathrm{Re}P_m$$

则该函数的拉氏变换的收敛横坐标是$\sigma_c=\mathrm{Re}P_1$，这意味着，拉氏变换的收敛轴通过$F(s)$的最右边的极点，这个事实可从$F(s)$应该是一解析函数并且它的收敛横坐标的右边不可能包含任何奇点而推得。

§4. 一些简单变换对

为了今后的应用，下面我们再介绍一些常用函数的拉氏变换。

例3 求

$$u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geqslant a\end{cases}$$

的拉氏变换。

解 $$L[u(t-a)]=\int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt$$
$$=\int_a^\infty e^{-st}dt=-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_a^\infty$$

这个积分在$\mathrm{Re}(s)>a$时收敛，而且有

$$L[u(t-a)]=\frac{e^{-sa}}{s}\qquad \mathrm{Re}(s)>0,$$

例4 求正弦函数$f(t)=\sin bt$（b为实数）的拉普拉斯变换。

解 $$L(\sin bt)=\int_0^\infty \sin bt e^{-st}dt$$
$$=\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(-s\sin bt-b\cos bt)\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{b}{s^2+b^2}\qquad (\mathrm{Re}(s)>0)$$

例5 求周期三角波

$$f(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t<b \\ 2b-t, & b\leqslant t<2b, \end{cases}$$

且$f(t+2b)=f(t)$（图1—3）的拉氏变换。

解 $L[f(t)]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

$$=\int_0^{2b}f(t)e^{-st}dt+\int_{2b}^{4b}f(t)e^{-st}dt+$$

$$+\int_{4b}^{6b}f(t)e^{-st}dt+\cdots$$

$$\int_{2Kb}^{2(K+1)b}f(t)e^{-st}dt+\cdots$$

$$=\sum_{K=0}^{+\infty}\int_{2Kb}^{2(K+1)b}f(t)e^{-st}dt$$

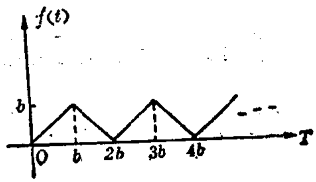

图1—3

令$t=\tau+2Kb$，则

$$\int_{2Kb}^{2(K+1)b}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{2b}f(\tau+2Kb)e^{-s(\tau+2Kb)}d\tau$$

$$=e^{-s2Kb}\int_0^{2b}f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

而

$$\int_0^{2b}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{b}te^{-st}dt+\int_b^{2b}(2b-t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s^2}(1-e^{-bs})^2$$

所以

$$L[f(t)]=\sum_{K=0}^{+\infty}e^{-s2Kb}\int_0^{2b}f(t)e^{-st}dt$$

$$=\int_0^{2b}f(t)e^{-st}dt\,(\sum_{K=0}^{+\infty}e^{-s2Kb})$$

由于当$\mathrm{Re}(s)>0$时

$$|e^{-s2b}|=e^{-\sigma 2b}<1$$