

成人高校教学研究丛书

# 电大数学辅导课 教案精选

蘇步青題



线性代数与线性规划

顾 静 相 主编  
张 旭 辉

广西科学技术出版社

成人高校教学研究丛书

# 电大数学辅导课教案精选

## 线性代数与线性规划

顾 静 相      主编  
张 旭 辉

刘 维 翰      主审

广西科学技术出版社

成人高校教学研究丛书  
**电大数学辅导课教案精选**  
**线性代数与线性规划**

\*

广西科学技术出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行

广西民族印刷厂印刷

\*

开本 787×1092 1/32 印张 11.375 字数 253,000 册

1988年10月第1版 1988年10月第1次印刷

印 数: 1—9,300 册

ISBN 7-80565-028-4

O·2

定价: 3.05 元

## 《电大数学辅导课教案精选》编委

|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| 柴全战(辽宁)   | 顾静相(中央电大) | 彭文学(湖北)   |
| 郭星英(中央电大) | 葛振三(湖南)   | 吴增炽(广西)   |
| 张旭辉(南宁)   | 虞恩蔚(长春)   | 周以祥(江苏)   |
| 胡秀珍(天津)   | 韦永武(广西)   | 杨荣源(浙江)   |
| 孙美春(中央电大) | 邓承永(锦州)   | 蔡孝伟(上海)   |
| 刘维翰(上海)   | 吴彩麟(柳州)   | 李树新(广西)   |
| 赵 坚(中央电大) | 任创业(宁夏)   | 陈卫宏(中央电大) |
| 陈宗彬(河南)   | 李毓芝(中央电大) | 刘 军(上海)   |
| 宋瑞书(唐山)   | 王国珍(抚顺)   | 苑乐仁(河北)   |
| 胡长华(天津)   | 李立忠(上海)   | 陈立元(山东)   |
| 仲崇彬(黑龙江)  | 钱辉镜(中央电大) | 李林育(天津)   |
| 赵章琳(四川)   | 马 毅(西安)   | 戴振民(吉林)   |
| 王可宪(青岛)   | 夏杏菊(浙江)   | 王昭华(锦州)   |
| 席安顺(天津)   | 唐承谨(湖南)   | 赖立祥(柳州)   |
| 李文国(河北)   |           |           |

(排名不分先后)

# 序

为了帮助成人高校学生及广大业余自学者学好高等数学，进一步提高成人数学教学质量，在交流总结各地电大数学辅导课成功经验的基础上，精选各地辅导课的最佳教案，按照成人教育各科教学大纲的要求，加工整理汇编成一套系统的《电大数学辅导课教案精选》丛书。本丛书目前共分“高等数学”（上、下），“微积分”（上、下），工科用的“工程数学”（一、二），经济类用的“数理统计”及“线性代数与线性规划”等八册。每册包含教案约20个，每一教案详细介绍教学目的、教材重点、教学难点的处理、范例分析、巩固练习题、小结、课外思考题、预习内容等。各章之后附教学意见，分别阐明学习本章所需之基础知识，教学与学习注意事项，可供选择的讲授例题，复习套题及期末复习自测题，考虑周到，论述详尽。集中体现了中央电大和全国二十余省、市、自治区许多优秀数学教师的教学经验与辛勤劳动之硕果，实为一套不可多得的教学参考书与自学指导书。本丛书的出版，必将大大有益于成人数学的执教者和广大业余的自学者，深刻理解有关课程的内容与方法，有力地促进我国成人教育发展和提高。值此丛书付梓前夕，乐为推荐如上。

上海师范大学数学系教授

应制夷

一九八七年七月

# 目 录

## 第一篇 线性代数

|                          |                |
|--------------------------|----------------|
| 第一章 行列式                  | ( 1 )          |
| 教案一 行列式的定义及性质            | 黄开明(南宁) ( 1 )  |
| 教案二 行列式按行(列)展开、克莱姆法则     |                |
| 黄开明(南宁)                  | ( 17 )         |
| 对于行列式这一章的教学意见            | 张旭辉(南宁) ( 29 ) |
| 第二章 矩阵                   | ( 33 )         |
| 教案三 矩阵概念、运算及几种特殊矩阵       |                |
| 吴增炽(广西)                  | ( 33 )         |
| 教案四 逆矩阵及其计算、分块矩阵         |                |
| 吴增炽(广西)                  | ( 47 )         |
| 对于矩阵这一章的教学意见             | 吴增炽(广西) ( 62 ) |
| 第三章 线性方程组                | ( 69 )         |
| 教案五 消元法、矩阵的初等变换, $n$ 维向量 |                |
| 及其运算 张旭辉(南宁)             | ( 69 )         |
| 教案六 向量的相关性、向量组的秩、矩阵的秩    |                |
| 张旭辉(南宁)                  | ( 86 )         |
| 教案七 线性方程组解的情况判定及解的结构     |                |
| 张旭辉(南宁)                  | ( 101 )        |
| 对于线性方程组这一章的教学意见          |                |
| 张旭辉(南宁)                  | ( 113 )        |
| 第四章 矩阵特征值                | ( 117 )        |

|                |           |       |
|----------------|-----------|-------|
| 教案八 矩阵特征值与特征向量 | 方慕真(中央电大) | (117) |
|----------------|-----------|-------|

|                 |           |       |
|-----------------|-----------|-------|
| 对于矩阵特征值这一章的教学意见 | 方慕真(中央电大) | (130) |
|-----------------|-----------|-------|

## 第五章 投入产出数学模型 ..... (133)

|                                  |           |       |
|----------------------------------|-----------|-------|
| 教案九 价值型投入产出模型、直接消耗系数、<br>平衡方程组的解 | 顾静相(中央电大) | (133) |
|----------------------------------|-----------|-------|

|                                       |           |       |
|---------------------------------------|-----------|-------|
| 教案十 完全消耗系数与完全需要系数、投入<br>产出方法在计划工作中的应用 | 顾静相(中央电大) | (148) |
|---------------------------------------|-----------|-------|

|                    |           |       |
|--------------------|-----------|-------|
| 对于投入产出数学模型这一章的教学意见 | 顾静相(中央电大) | (163) |
|--------------------|-----------|-------|

## 阶段复习一 教案十一..... 方慕真(中央电大)(170)

# 第二篇 线性规划

## 第一章 线性规划问题 ..... (188)

|                   |         |       |
|-------------------|---------|-------|
| 教案十二 线性规划数学模型、图解法 | 刘 军(上海) | (188) |
|-------------------|---------|-------|

## 第二章 单纯形方法 ..... (203)

|               |         |       |
|---------------|---------|-------|
| 教案十三 单纯形方法(一) | 刘 军(上海) | (203) |
|---------------|---------|-------|

|               |         |       |
|---------------|---------|-------|
| 教案十四 单纯形方法(二) | 刘 军(上海) | (216) |
|---------------|---------|-------|

## 第三章 单纯形方法(续) ..... (233)

|               |         |       |
|---------------|---------|-------|
| 教案十五 单纯形方法(续) | 刘 军(上海) | (233) |
|---------------|---------|-------|

## 第四章 对偶线性规划问题 ..... (251)

|                     |         |       |
|---------------------|---------|-------|
| 教案十六 对偶线性规划问题定义及其性质 | 刘维翰(上海) | (251) |
|---------------------|---------|-------|

|                         |           |       |
|-------------------------|-----------|-------|
| 教案十七 对偶单纯形方法·····       | 刘维翰(上海)   | (264) |
| <b>第五章 灵敏度分析</b> .....  |           | (279) |
| 教案十八 灵敏度分析·····         | 刘维翰(上海)   | (279) |
| <b>第六章 运输问题</b> .....   |           | (297) |
| 教案十九 运输问题·····          | 顾静相(中央电大) | (297) |
| 对于运输问题这一章的教学意见          |           |       |
| ·····                   | 顾静相(中央电大) | (316) |
| <b>阶段复习二 教案二十</b> ····· | 顾静相(中央电大) | (321) |
| 期末复习自测题一·····           | 张旭辉(南宁)   | (343) |
| 期末复习自测题二·····           | 张旭辉(南宁)   | (348) |
| 期末复习自测题一参考答案 .....      |           | (353) |
| 期末复习自测题二参考答案 .....      |           | (354) |



# 第一篇 线性代数

## 第一章 行列式

### 教 案 一

黄开明(南宁)

**课题** 行列式的定义及性质.

**教学目的**

(1) 了解  $n$  阶行列式的定义, 熟练掌握二、三阶行列式求值的对角线法;

(2) 掌握行列式的性质, 利用行列式性质求行列式的值.

**重点** 行列式的性质、求行列式的值的计算方法.

**难点**  $n$  阶行列式的定义、 $n$  阶行列式求值.

### 教学过程

#### 一、电视课内容归纳

##### 1. 二、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

这个求行列式值的方法称为对角线法，仅适用于二、三阶行列式。

## 2. 二、三元线性方程组解的行列式表示法

(1) 设二元线性方程组为  $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$  则它的解

为  $x_1 = \frac{D_1}{D}$ ,  $x_2 = \frac{D_2}{D}$ , 其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(2) 设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

则它的解为  $x_1 = \frac{D_1}{D}$ ,  $x_2 = \frac{D_2}{D}$ ,  $x_3 = \frac{D_3}{D}$

$$\text{其中 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

求解公式的规律： $D$ 为二、三元线性方程组的系数行列式，而 $D_j$  ( $j=1, 2$  或  $j=1, 2, 3$ ) 是将方程的常数项，按原来次序换入行列式 $D$ 中第 $j$ 列所得。从而得到方程组的解

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j=1, 2 \text{ 或 } j=1, 2, 3),$$

### 3. $n$ 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \cdots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为  $n$  阶行列式的表达式（或称为完全展开式）。

**说明** (1) 求和号“ $\sum$ ”表示自然数列  $1, 2, \cdots, n$  的所有排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  取和。

(2) 在行列式展开的一般项  $(-1)^{[j_1 j_2 \cdots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  中：① 每一项  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  都表示取自行列式中不同行不同列上的元素的乘积。并且每一个元素的第 1 个下标（行标）按  $1, 2, \cdots, n$  自然顺序排列，第 2 个下标（列标） $j_1 j_2 \cdots j_n$  是  $1, 2, \cdots, n$  的某一个排列。

② 每一项的符号  $(-1)^{[j_1 j_2 \cdots j_n]}$  是由这一项中各元素列标排列  $(j_1 j_2 \cdots j_n)$  逆序数的奇偶性决定的。

(3)  $n$  阶行列式的展开项共有  $n!$  个，其中正、负项各占一半，即  $n!/2$  个。

### 4. 几个特殊的行列式的值

$$\begin{array}{l} \text{对角形行列式} \\ \text{上三角形行列式} \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

下三角形行列式 
$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

## 5. 行列式的性质

参见教材 P18~15 (口述不板书)。

## 二、例题分析

例1 求下列行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

解 应用对角线法

$$(1) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - ba^2 = ab(b-a)$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 5 \times 4 + 4 \times 1 \times 3 + 2 \times 7 \times 2 - 2 \times 5 \times 3 - 4 \times 7 \times 4 - 3 \times 1 \times 2 = -48$$

例2 用定义求下列行列式的值

$$(1) D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

$$(2) D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

解 (1) 按定义  $D_1 = \sum_{(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)} (-1)^{[j_1 j_2 j_3 j_4 j_5]} a_{1j_1}$

$\cdot a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$ . 这个行列式有不少元素为 0, 因此展开项中有很多项  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$  都等于零. 所以只要把可能不为零的项找出来, 再加起来即可.

先从零最多的第 1 行开始考虑 (先不考虑符号). 当  $j_1 = 2$  时,  $a_{12} \neq 0$ , 则  $a_{12} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$  可能不为零, 而当

$$j_1 = 1, 3, 4, 5 \text{ 时, } \left. \begin{matrix} a_{11} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \end{matrix} \right\} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} \text{ 都为零; 第二行,}$$

当  $j_2 = 3$  时  $a_{23} \neq 0$  则  $a_{12} a_{23} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$  可能不为零, 其它项都为零. 以此类推  $j_3 = 4, j_4 = 5$  时  $a_{12} a_{23} a_{34} a_{45} a_{5j_5}$  可能不为零. 按定义, 每一项的元素取自不同行不同列, 因此在第五行中只能取  $a_{51}$ , 从而  $a_{12} a_{23} a_{34} a_{45} a_{51}$  不为零.

再确定  $(-1)^{[23451]} a_{12} a_{23} a_{34} a_{45} a_{51}$  的符号, 因为 23451 是偶排列, 所以此项取正号, 从而

$$D_1 = a_{12} a_{23} a_{34} a_{45} a_{51}$$

**说明** 在按定义求值时, 一般先从第 1 行或者最后一行中, 零元素较多的一行开始考虑. 每一项的元素必须是取自不同行不同列.

(2) 为了便于讨论, 先求行列式

$$B_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35} \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{vmatrix}$$

的值, 然后令  $a_{14}=4, a_{15}=9, a_{23}=3, a_{24}=11, a_{25}=8, a_{32}=2, a_{33}=10, a_{35}=7, a_{41}=1, a_{44}=12, a_{45}=6, a_{55}=5$ , 由  $B_2$  的结果, 即可得到  $D_2$  的值。

先从  $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$  中, 找出非零项。由行列式中零较多的第五行开始, 根据定义, 每一项必须是取自不同行不同列的元素的乘积, 因此, 可能不为零的项

$$a_{55} \left\{ \begin{array}{l} a_{41} \left\{ \begin{array}{l} a_{23} a_{1j_1} \\ a_{32} \left\{ \begin{array}{l} a_{24} a_{1j_4} \\ a_{33} a_{24} a_{1j_1} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ a_{44} a_{33} a_{2j_2} a_{1j_1} \end{array} \right.$$

而  $a_{11}=0, a_{12}=0, a_{13}=0, a_{22}=0$ , 只有当  $j_1=4$  时  $a_{14} \neq 0$ , 所以不为零的项是  $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$ 。

又因为 4 3 2 1 5 是偶排列, 所以

$$(-1)^{[4\ 3\ 2\ 1\ 5]} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$$

$$\therefore B_2 = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$$

将  $a_{14}=4, a_{15}=9, a_{23}=3, a_{24}=11, a_{25}=8, a_{32}=2, a_{33}=10, a_{35}=7, a_{41}=1, a_{44}=12, a_{45}=6, a_{55}=5$  代入行列式  $B_2$  得到

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 = 120$$

**例3** 求下列行列式的值

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 0 & -2 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{4} & 4 & -3 \\ -4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$

**(1) 分析** 由于上(下)三角形行列式的计算容易, 因此计算行列式的值, 可利用行列式的性质, 把行列式化为上(下)三角形行列式, 再求其值。在计算过程中, 应尽可能避免分数(或小数)运算。

**解**

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{(1, 3)} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{4} + \textcircled{1} \cdot (-4) \\
 \textcircled{3} + \textcircled{1} \cdot (-3) \\
 \textcircled{2} + \textcircled{1} \cdot (+2)
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 1 & -3 & -1 & 2 \\
 0 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 2 & 5 & -2 \\
 0 & 6 & 7 & 0
 \end{vmatrix}
 \begin{array}{l}
 \textcircled{4} + \textcircled{2} \cdot 6 \\
 \textcircled{3} + \textcircled{2} \cdot 2
 \end{array}
 \begin{vmatrix}
 1 & -3 & -1 & 2 \\
 0 & -1 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 3 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 6
 \end{vmatrix}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 18$$

(2) 分析 此行列式有分数, 因此, 首先要用性质 1, 从第 2 列提取公因子  $\frac{1}{12}$ , 把原行列式化为全是整数的行列式.

解

$$\begin{vmatrix}
 2 & \frac{1}{3} & 0 & -2 \\
 5 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\
 3 & \frac{1}{4} & 4 & -3 \\
 -4 & 1 & 2 & 5
 \end{vmatrix}
 = \frac{1}{12}
 \begin{vmatrix}
 1 & -1 & 0 & -2 \\
 5 & -6 & 1 & -2 \\
 2 & 4 & 4 & -3 \\
 -4 & 12 & 2 & 5
 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}
 1 & -1 & 0 & -2 \\
 0 & -1 & 1 & 8 \\
 0 & 6 & 4 & 1 \\
 0 & 8 & 2 & -3
 \end{vmatrix}
 = \frac{1}{12}
 \begin{vmatrix}
 1 & -1 & 0 & -2 \\
 0 & -1 & 1 & 8 \\
 0 & 0 & 10 & 49 \\
 0 & 0 & 10 & 61
 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{12}
 \begin{vmatrix}
 1 & -1 & 0 & -2 \\
 0 & -1 & 1 & 8 \\
 0 & 0 & 10 & 49 \\
 0 & 0 & 0 & 12
 \end{vmatrix}
 = -10$$



(3) 分析 观察发现, 行列式中除主对角线上的元素  $a, b$  外, 第 1、3 行都是  $-1$ , 第 2、4 行都是  $+1$ , 因此将第 1 行加到第 2 行上去, 第 3 行加到第 4 行上去, 则得结果.

解

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{②+①}]{\text{④+③}} \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ a & a & 0 & 0 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 0 & 0 & b & b \end{vmatrix} \\
 = ab & \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{①+②}]{\begin{matrix} \text{①+④} \\ \text{③+④} \\ \text{③+②} \end{matrix}} ab \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 = a^2 b^2 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 b^2
 \end{aligned}$$

**说明** 对于含字母的行列式, 首先分析行列式本身的特点, 找出行、列之间的关系, 利用行列式的性质化为三角形行列式.

(4) 解法一 行列式中每一行元素之和都等于  $x + \sum_{i=1}^n a_i$ , 因此将第 2 列第 3 列……直至第  $n$  列加到第 1 列上去, 提取公因子  $x + \sum_{i=1}^n a_i$ , 再化为三角形行列式.

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$