成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

苏步青题

线性代数与线性规划

顾静相
张旭辉 主编

广西科学技术出版社

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

线性代数与线性规划

顾 静 相
张 旭 辉　主编

刘 维 翰　主审

广西科学技术出版社

成人高校教学研究丛书
电大数学辅导课教案精选
线性代数与线性规划
*
广西科学技术出版社出版
（南宁市河堤路14号）
广西新华书店发行
广西民族印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/32　印张 11.375　字数 253,000 册
1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷
印　数：1—9,300 册
ISBN 7-80565-028-4
O·2
定价：3.05 元

《电大数学辅导课教案精选》编委

序

为了帮助成人高校学生及广大业余自学者学好高等数学，进一步提高成人数学教学质量，在交流总结各地电大数学辅导课成功经验的基础上，精选各地辅导课的最佳教案，按照成人教育各科教学大纲的要求，加工整理汇编成一套系统的《电大数学辅导课教案精选》丛书．本丛书目前共分“高等数学”（上、下），“微积分”（上、下），工科用的“工程数学”（一、二），经济类用的“数理统计”及“线性代数与线性规划”等八册．每册包含教案约20个，每一教案详细介绍教学目的、教材重点、教学难点的处理、范例分析、巩固练习题、小结、课外思考题、预习内容等．各章之后附教学意见，分别阐明学习本章所需之基础知识，教学与学习注意事项，可供选择的讲授例题，复习套题及期末复习自测题，考虑周到，论述详尽．集中体现了中央电大和全国二十余省、市、自治区许多优秀数学教师的教学经验与辛勤劳动之硕果，实为一套不可多得的教学参考书与自学指导书．本丛书的出版，必将大大有益于成人数学的执教者和广大业余的自学者，深刻理解有关课程的内容与方法，有力地促进我国成人教育发展和提高．值此丛书付梓前夕，乐为推荐如上．

上海师范大学数学系教授

应制夷

一九八七年七月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　线性规划

第一篇　线性代数

第一章　行　列　式

教　案　一

黄开明(南宁)

课题　行列式的定义及性质.

教学目的

(1) 了解 n 阶行列式的定义,熟练掌握二、三阶行列式求值的对角线法;

(2) 掌握行列式的性质,利用行列式性质求行列式的值.

重点　行列式的性质、求行列式的值的计算方法.

难点　n 阶行列式的定义、n 阶行列式求值.

教学过程

一、电视课内容归纳

1. 二、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

这个求行列式值的方法称为对角线法，仅适用于二、三阶行列式。

2. 二、三元线性方程组解的行列式表示法

(1) 设二元线性方程组为 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 则它的解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，其中

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(2) 设三元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

则它的解为 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$，$x_3 = \dfrac{D_3}{D}$

其中 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

求解公式的规律：D为二、三元线性方程组的系数行列式，而 D_j($j = 1,2$ 或 $j = 1,2,3$) 是将方程的常数项，按原来次序换入行列式D中第 j 列所得。从而得到方程组的解 $x_j = \dfrac{D_j}{D}$($j = 1,2$ 或 $j = 1,2,3$)。

3. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{[j_1 j_2 \cdots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式的表达式（或称为完全展开式）。

说明 (1) 求和号“$\sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)}$”表示自然数列 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取和。

(2) 在行列式展开的一般项 $(-1)^{[j_1 j_2 \cdots j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 中：① 每一项 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 都表示取自行列式中不同行不同列上的元素的乘积。并且每一个元素的第 1 个下标（行标）按 $1,2,\cdots,n$ 自然顺序排列，第2个下标(列标) $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列。

② 每一项的符号 $(-1)^{[j_1 j_2 \cdots j_n]}$ 是由这一项中各元素列标排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 逆序数的奇偶性决定的。

(3) n 阶行列式的展开项共有 $n!$ 个，其中正、负项各占一半，即 $n!/2$ 个。

4. 几个特殊的行列式的值

对角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

上三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

下三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

5. 行列式的性质

参见教材 $P18\sim15$（口述不板书）。

二、例题分析

例1 求下列行列式的值

（1）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$ （2）$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

解 应用对角线法

（1）$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab^2 - ba^2 = ab(b-a)$

（2）$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\times5\times4 + 4\times1\times3 + 2\times7\times2 - 2\times5 \times 3 - 4\times7\times4 - 3\times1\times2 = -48$

例2 用定义求下列行列式的值

（1）$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$

(2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

解 (1) 按定义 $D_1=\sum\limits_{(j_1j_2j_3j_4j_5)}(-1)^{[j_1j_2j_3j_4j_5]}a_{1j_1}\cdot a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$。这个行列式有不少元素为0，因此展开项中有很多项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 都等于零。所以只要把可能不为零的项找出来，再加起来即可。

先从零最多的第1行开始考虑（先不考虑符号）。当 $j_1=2$ 时，$a_{12}\neq0$，则 $a_{12}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 可能不为零，而当

$j_1=1,3,4,5$ 时，$\left.\begin{matrix} a_{11} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \end{matrix}\right\}$ $a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 都为零；第二行，

当 $j_2=3$ 时 $a_{23}\neq0$ 则 $a_{12}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 可能不为零，其它项都为零。以此类推 $j_3=4, j_4=5$ 时 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{5j_5}$ 可能不为零。按定义，每一项的元素取自不同行不同列，因此在第五行中只能取a_{51}，从而 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$不为零。

再确定 $(-1)^{[23451]}a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$ 的符号，因为23451是偶排列，所以此项取正号，从而

$D_1=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$

说明 在按定义求值时，一般先从第1行或者最后一行中，零元素较多的一行开始考虑。每一项的元素必须是取自不同行不同列。

(2) 为了便于讨论，先求行列式

$$B_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15}\\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & a_{35}\\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} & a_{45}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}\end{vmatrix}$$

的值，然后令 $a_{14}=4$，$a_{15}=9$，$a_{23}=3$，$a_{24}=11$，$a_{25}=8$，$a_{32}=2$，$a_{33}=10$，$a_{35}=7$，$a_{41}=1$，$a_{44}=12$，$a_{45}=6$，$a_{55}=5$，由 B_2 的结果，即可得到 D_2 的值。

先从 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ 中，找出非零项。由行列式中零较多的第五行开始，根据定义，每一项必须是取自不同行不同列的元素的乘积，因此，可能不为零的项

$$a_{55}\begin{cases} a_{41}\begin{cases} a_{32}\begin{cases} a_{23}\,a_{1j_1}\\ a_{24}\,a_{1j_1}\end{cases}\\ a_{33}\,a_{24}\,a_{1j_1}\end{cases}\\ a_{44}\,a_{33}\,a_{2j_2}\,a_{1j_1}\end{cases}$$

而 $a_{11}=0, a_{12}=0, a_{13}=0$，$a_{22}=0$，只有当 $j_1=4$ 时 $a_{14}\neq 0$，所以不为零的项是 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$。

又因为 4 3 2 1 5 是偶排列，所以

$$(-1)^{[4\,3\,2\,1\,5]}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$$

$$\therefore\quad B_2=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{55}$$

将 $a_{14}=4$，$a_{15}=9, a_{23}=3, a_{24}=11, a_{25}=8, a_{32}=2, a_{33}=10, a_{35}=7, a_{41}=1, a_{44}=12, a_{45}=6, a_{55}=5$ 代入行列式 B_2 得到

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 11 & 8\\ 0 & 2 & 10 & 0 & 7\\ 1 & 0 & 0 & 12 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=4\times 3\times 2\times 1\times 5=120$$

例3 求下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{3} & 0 & -2 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{4} & 4 & -3 \\ -4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$

(1) **分析** 由于上(下)三角形行列式的计算容易，因此计算行列式的值，可利用行列式的性质，把行列式化为上(下)三角形行列式，再求其值．在计算过程中，应尽可能避免分数（或小数）运算．

解

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix} \xlongequal{(①,\ ③)} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{②+①·(+2)}]{\substack{\text{④+①·(−4)}\\ \text{③+①·(−3)}}}\begin{vmatrix}1&-3&-1&2\\0&-1&-1&1\\0&2&5&-2\\0&6&7&0\end{vmatrix}\xlongequal[\text{③+②·2}]{\text{④+②·6}}\begin{vmatrix}1&-3&-1&2\\0&-1&-1&1\\0&0&3&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{④+③·}\left(-\frac{1}{3}\right)}\begin{vmatrix}1&-3&-1&2\\0&-1&-1&1\\0&0&3&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}=18$$

(2) **分析** 此行列式有分数，因此，首先要用性质1，从第2列提取公因子$\frac{1}{12}$，把原行列式化为全是整数的行列式.

解

$$\begin{vmatrix}2&\frac{1}{3}&0&-2\\5&-\frac{1}{2}&1&-2\\3&\frac{1}{4}&4&-3\\-4&1&2&5\end{vmatrix}=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}1&-1&0&-2\\5&-6&1&-2\\2&4&4&-3\\-4&12&2&5\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}1&-1&0&-2\\0&-1&1&8\\0&6&4&1\\0&8&2&-3\end{vmatrix}=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}1&-1&0&-2\\0&-1&1&8\\0&0&10&49\\0&0&10&61\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{vmatrix}1&-1&0&-2\\0&-1&1&8\\0&0&10&49\\0&0&0&12\end{vmatrix}=-10$$

（3）**分析** 观察发现，行列式中除主对角线上的元素 a、b 外，第 1、3 行都是 -1，第 2、4 行都是 $+1$，因此将第 1 行加到第 2 行上去，第 3 行加到第 4 行上去，则得结果。

解

$$\begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{②+①}]{\text{④+③}} \begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ a & a & 0 & 0 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 0 & 0 & b & b \end{vmatrix}$$

$$= ab\begin{vmatrix} a-1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & b-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\substack{\text{①+④}\\ \text{③+④}\\ \text{③+②}\\ \text{①+②}}} ab\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2b^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2b^2$$

说明 对于含字母的行列式，首先分析行列式本身的特点，找出行、列之间的关系，利用行列式的性质化为三角形行列式。

（4）**解法一** 行列式中每一行元素之和都等于 $x+\sum_{i=1}^{n}a_i$ 因此将第 2 列第 3 列……直至第 n 列加到第 1 列上去，提取公因子 $x+\sum_{i=1}^{n}a_i$，再化为三角形行列式。

$$\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix}$$