高考风向标

丛书主编 刘美伦　　本册主编 刘美伦

3+X

网络结构复习法 数学

随书赠送
彩色知识网络结构图

北京教育科学研究院基教研中心教研员
北京四中、北大附中等一线特高级教师
编写

气象出版社

高考风向标——

网络结构复习法

数学

主编:刘美伦
编者:任光辉　丁益祥　唐安华
谷　丹　付小平　袁京生

气象出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考风向标——网络结构复习法·数学/刘美伦主编 . 北京:气象出版社,2002.7
ISBN 7-5029-3406-5

Ⅰ. 高 . . . Ⅱ. 刘 . . . Ⅲ. 数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 044175 号

气象出版社出版
(北京中关村南大街 46 号 邮编:100081)
责任编辑:郭彩丽 刘 煜 终审:黄润恒
封面设计:曹全弘 责任技编:都平 责任校对:时人
*
北京昌平环球印刷厂印刷
气象出版社发行 全国各地新华书店经销
*
开本:787×1092 1/16 印张:16 字数:397 千字
2002 年 7 月第一版 2002 年 7 月第一次印刷
印数:1—10100 定价:18.50 元

出版前言

考试成绩好的学生,知识在他们的脑海里是一张具有逻辑结构的关系网;考试成绩不好的学生,知识在他们的脑海里则凌乱而支离破碎。一个好老师,他能够帮助学生编织这张网。一本好的教辅书,也能帮助学生编织这张网。这张网可以帮助你网住各种各样的试题,有条理地找出问题的因果关系和难点所在。

本套丛书正是给广大师生介绍**网络结构复习法**这一高效的得分武器。目的是帮助学生改进复习方法,在脑海中形成具有逻辑关系的知识网络结构,提高学生的学习能力和综合素质,从而能在高考冲刺阶段使成绩大幅度提高。丛书是针对性、运用性很强的高考复习用书。

本套书的内容结构

第一部分　单元复习讲练

以知识块为单元,全书共分若干单元。单元的划分以是否具有相对完整的知识网络结构为标准,每个单元都分以下六个子栏目:

【知识网络结构】是各单元的知识网络结构图,帮助学生理清知识脉络。

【考点重点难点】概述本单元的高考内容与要求、复习的重点与难点。不仅体现在知识上,而且体现在思想方法上和综合能力上。

【知识纵横精析】通过精选的典型例题,突出单元的重点难点,多角度、多层面地分析本单元的知识间及与其他单元知识间的联系,归纳总结解题规律与技巧,达到融汇贯通提高能力的目的。

【答题失误点拨】针对学生理解和做题的错误以及易错之处进行剖析。

【学科交叉热点】分文、理科。结合例题点拨相关学科知识的交叉、渗透,拓宽视野,拓展思路,提高综合能力。

【综合能力训练】精选题目,题量适当。其中较易题约占20%,中等题约占50%,较难题约占30%。

第二部分　高考模拟训练

语文、数学、英语每科3~4套高考模拟题。

物理、化学、生物、历史、地理、政治每科3~4套综合训练题。

第三部分　全书测试题答案及提示

第四部分　知识网络结构图(对开,彩色印刷)

用图表形式来归纳整理各学科的知识点,并揭示其内在联系。这张图是知识网络结构的基础,包括学生掌握的所有内容。全图彩色印刷,结构鲜明,便于学生形象记忆,以形成他们脑海里那张无形的知识网。

本套丛书的作者主要来自北京教育科学研究院基础教育教学研究中心、北京四中、北京大

学附中、人大附中、北京师范大学二附中等单位，均为特级、高级教师和各个学科的学科带头人。

本套书的主要特点

1. 对高考热点及命题走向把握精准——本套书的作者均是长期从事教学或教学研究工作的专家，对高考热点和命题走向研究精深，因而把握准确。

2. 富有奇效的知识网络结构复习法——本套书能帮助学生在脑海里编织具有逻辑结构的知识网络结构图。真正帮助学生做到融会贯通，应付自如。

3. 印装有特色——每科附有一张对开全彩色印刷的知识网络结构图，使学生把重点、难点把握在胸。

前　言

为了帮助广大中学生系统掌握中学数学的基础知识、基本技能、基本思想和方法，提高自学能力，帮助考生适应“3+X”高考改革的需要，培养创新精神和实践能力，提高总复习的效率和学习成绩，我们编写了这本《高考风向标——网络结构复习法·数学》。

本书依据现行教学大纲，紧扣高考《考试说明》，将高中数学三个分科共十三章教学内容，编织在数学知识网络中，有助于学生从数学整体知识结构和思想体系的高度思考问题，体现了学科的系统性和深刻性。

本书第一部分共分 12 个单元。第一至十单元先通过框图展现本单元的【知识网络结构】，并结合【考点重点难点】的阐述，对本单元的复习方法进行点拨指导。每个单元划分若干重点内容，分【知识纵横精析】【答题失误点拨】【综合能力训练】几个子栏目，力求归纳知识、揭示规律、点拨思路、突出方法。给出的综合能力训练题，突出考点重点难点，针对性强，有助于提高解题能力。第十一、十二两个单元，选择了当前数学课程改革和高考命题改革中的两个重要问题。在数学应用问题中，着眼于提高学生接收、分析、处理、应用信息的能力，培养学生的应用意识。知识网络交汇处的问题，注重知识间的内在联系与综合，有助于提高运用知识和方法分析问题解决问题的能力。

本书还精心编拟了三套高考模拟试题，供学生做综合练习或自我检测用。全书最后的知识网络结构图展现了中学数学所有内容的整体结构和内在联系，有助于学生融会贯通，提高能力。

本书的作者有丰富的教学经验，并多年从事高考命题与复习的研究，他们的见解对师生的复习备考工作有一定的参考价值。

由于时间仓促，书中不妥之处在所难免，欢迎广大师生提出宝贵意见。

主　编

2002 年 6 月

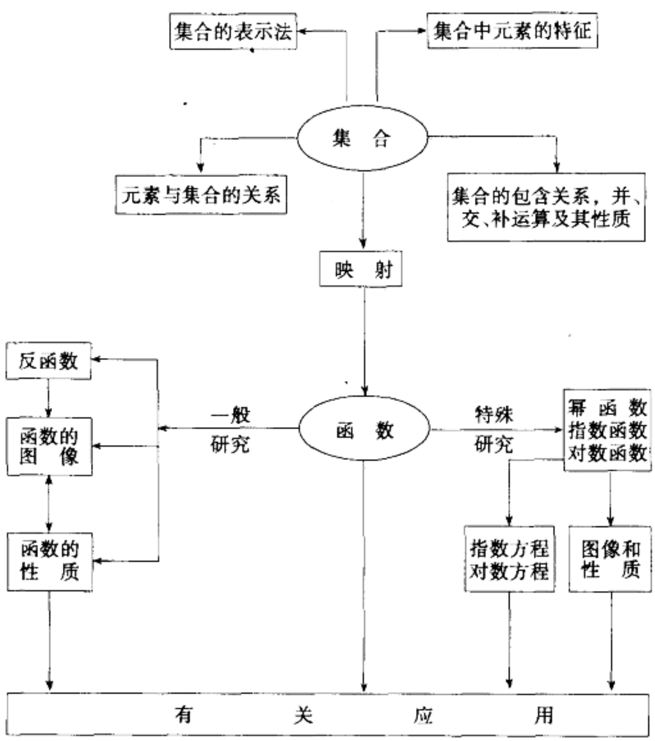
目 录

第一部分　单元复习讲练

第一单元　集合与函数

知识网络结构

（请从集合开始沿箭头所示的方向看）



考点重点难点

1. 高考要求

(1)理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

(2)理解$|ax+b|<c$、$|ax+b|>c(c>0)$型不等式的概念，并掌握它们的解法.

(3)了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的关系，掌握一元二次不等式的解法.

(4)了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图像间的关系.

(5)理解函数的单调性和奇偶性的概念,并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性,能利用函数的奇偶性与图像的对称性的关系描绘函数图像.

(6)理解分数指数幂、根式的概念,掌握分数指数幂的运算法则.

(7)理解对数的概念,掌握对数的性质和运算法则.

(8)掌握幂函数的概念及其图像和性质,在考查掌握函数性质和运用性质解决问题时,所涉及的幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 中的 α 限于在集合 $\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\right\}$ 中取值.

(9)掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图像和性质,并会解简单的指数方程和对数方程.

2. 重点难点

在高三复习中,本单元重点应当是集合与集合的关系、集合的运算;函数的解析式、定义域、值域的探求,函数(包括幂函数、指数函数和对数函数)图像及其性质的应用;指数方程和对数方程的求解.

在本单元的复习中,复合函数的定义域及函数值域的求解、一般函数方程及含参数的指数方程和对数方程的求解、函数的性质和利用函数的思想方法解决实际问题,都具有一定的难度.

本单元知识是高中数学中极为重要的内容之一,高中数学许多内容都与函数有关,因此学好函数是学好高中数学的基础.此外,数形结合的思想是解决本单元问题的重要数学思想之一,它贯穿于本单元知识的始终,它和函数思想一起在本单元中有着十分广泛的应用.因此,运用数形结合的思想加深对函数(包括特殊函数)的认识和理解,掌握函数的图像特征和性质,树立运动变化、广泛联系的观点,巧用数形结合的思想与函数的思想,善于抽象建模,是学好本单元知识的关键.

一、集　　合

知识纵横精析

集合既是数学中基本概念之一,又是学习研究数学的重要工具之一.明了元素与集合、集合与集合的关系,理解并掌握元素的两个基本特征(确定性、互异性),是研究集合及其运算的基础.集合的交、并、补运算及其性质是本节的重点,应当很好掌握.

【例1】 设全集为 R,$A=\{x|x^2-5x-6>0\}$,$B=\{x||x-5|<a\}$(a 是常数),且 $11\in B$,则

A. $\overline{A}\cup B=R$　　B. $A\cup\overline{B}=R$　　C. $\overline{A}\cup\overline{B}=R$　　D. $A\cup B=R$

【分析】 由 $x^2-5x-6>0$,得 $x>6$,或 $x<-1$,故 $A=\{x|x<-1$,或 $x>6\}$.由于 $11\in B$,故 $B\neq\phi$,因此 $a>0$,于是 $B=\{x|5-a<x<5+a\}$.由 $11\in B$,知 $|11-5|<a$,即 $a>6$.于是 $5-a<-1,5+a>11>6$,故 $A\cup B=R$,因此选 D.

【说明】 由 B 非空进而获得 $a>0$,它为本题求解创造了条件.

【例2】 一含有三个实数的集合既可表示为 $\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}$,也可表示为 $\{x^2,x+y,0\}$,则 $x^{2002}+y^{2003}$ 的值等于__________.

【分析】 只需建立关于 x,y 的方程组,解出 x,y,再求欲求之式的值.

【解】 由集合中元素的确定性,知

$$\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}=\{x^2,x+y,0\}$$

由 $0\in\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}$ 及 $x\neq 0$， 易得 $\frac{y}{x}=0$， 故 $y=0$， 从而 $\{x,0,1\}=\{x^2,x,0\}$.
因此，$x^2=1$，即 $x=\pm 1$.
当 $x=1$ 时，集合中两元素重复，与互异性矛盾，故 $x\neq 1$，从而只有 $x=-1$.
所以，$x^{2002}+y^{2003}=(-1)^{2002}=1$.

【说明】 本题求解时应注意集合中元素的确定性及互异性两大主要特征. 此外，如果我们能注意到 $\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}=\{x^2,x+y,0\}$ 的一个必要条件是

$$\begin{cases}x+\frac{y}{x}+1=x^2+(x+y)+0,\\ x\cdot\frac{y}{x}\cdot 1=x^2\cdot(x+y)\cdot 0,\end{cases}$$

那么，由此方程组即可得 $\begin{cases}x=\pm 1,\\ y=0.\end{cases}$ 再由集合中元素的互异性排除 $x=1$，即得 $x=-1,y=0$. 这是求解上述这类问题的又一方法.

【例 3】 在直角坐标平面上，已知集合 A 是以原点为圆心，半径为 $r(r>0)$ 的圆及其内部的点集，集合 $B=\{(x,y)\mid |x|\leqslant a,|y|\leqslant a,a>0\}$，当实数 a 和 r 满足什么关系时，

(1)$A\subset B$； (2)$A\supset B$.

【解】 集合 B 是由四条直线 $x=-a,x=a,y=-a,y=a$ 所围成的正方形及其内部.

如图 1-1(1)，当⊙O 位于正方形内部时，$A\subset B$. 最大的⊙O 应是正方形的内切圆，此时 $a\geqslant r$.

又如图 1-1(2)，当正方形位于⊙O 内部时，$A\supset B$. 最大的正方形应是⊙O 的内接正方形，此时 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

综上，当 $a\geqslant r>0$ 时，$A\subset B$；当 $0<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}r$ 时，$A\supset B$.

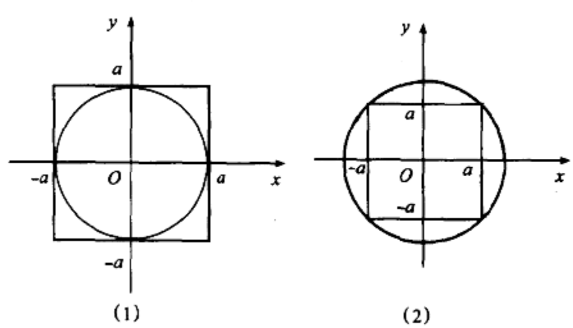


图 1-1

【说明】 本题中的集合 A 和 B 是常见的一类点集，利用数形结合，可使点集与点集之间的关系更加直观明了.

【例 4】 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in R\}$，$B=\{x\mid 2x^2-ax+2=0,x\in R\}$，若 $A\cup B=A$，求实数 a 的范围.

【分析】 由 $A\cup B=A$ 知，$B\subseteq A$. 故应分 $B\neq\phi$ 与 $B=\phi$ 两种情况讨论.

【解】 由 $x^2-3x+2=0$，得 $x=1$，或 $x=2$， 故 $A=\{1,2\}$.
由于 $A\cup B=A$，因此 $B\subseteq A$，
(1)当 $B\neq\phi$ 时，把 $x=1$ 代入 $2x^2-ax+2=0$，得 $a=4$. 此时 $B=\{1\}$，符合题意.
把 $x=2$ 代入 $2x^2-ax+2=0$，得 $a=5$. 此时 $B=\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$，从而 $A\cup B\neq A$. 不合题意.
(2)当 $B=\phi$ 时，由 $\Delta=a^2-4\times 2\times 2<0$，得 $-4<a<4$. 此时 $B=\phi\subset A$，符合题意.
综上，所求的 a 的取值范围是 $\{a\mid -4<a\leqslant 4\}$.

【说明】 空集是任何一个集合的子集. 由于 $B\subseteq A$，故 B 应有 $B\neq\phi$ 和 $B=\phi$ 两种情况，而

$B=\phi$ 是极易遗漏的，应当引起注意.

答题失误点拨

集合问题在高考中一般难度不大.然而尽管如此，在求解中如若我们不认真审题，或看错字符，或对集合的交、并、补运算及其性质模糊不清，或未能注意集合中元素的确定性、互异性等特征、或未能深入理解集合之间包含关系的意义，或不能巧用文氏图等工具，那么，求解失误也是时有发生的.

【例 5】 已知集合 A 和 B 都含有三个元素，且 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{9,a-5,1-a\}$，试问实数 a 为何值时 $A\cap B=\{9\}$？

【误解】 为使 $A\cap B=\{9\}$，则必有 $9\in A$. 因此 $2a-1=9$，或 $a^2=9$.

若 $2a-1=9$，则 $a=5$.

此时 $A=\{-4,9,25\}$，$B=\{9,0,-4\}$，$A\cap B=\{-4,9\}$，与 $A\cap B=\{9\}$ 矛盾.

若 $a^2=9$，则 $a=\pm3$.

当 $a=3$ 时，$A=\{-4,5,9\}$，$B=\{-2,-2,9\}$， ①

此时 $A\cap B=\{9\}$.

当 $a=-3$ 时，$A=\{-4,-7,9\}$，$B=\{9,-8,4\}$，

此时 $A\cap B=\{9\}$.

综上，当 $a=\pm3$ 时，$A\cap B=\{9\}$.

【说明】 求解本题这类问题时，既要注意求出的 a 的值符合题设条件（如本题中的条件 $A\cap B=\{9\}$），又要注意集合中元素的确定性和互异性特征.本解法的错误在于当 $a=3$ 时，集合 B（见①式）中有两个元素重复，故 B 中只有两个元素，因此 $a\neq3$.所以，正确结论是仅当 $a=-3$ 时，$A\cap B=\{9\}$.

综合能力训练

1. 若全集 $I=R$，$A=\{x\mid\sqrt{x+1}\leqslant0\}$，$B=\{x\mid\lg(x^2-2)=\lg x\}$，则 $A\cap\overline{B}$是

A. $\{2\}$ B. $\{-1\}$ C. $\{x\mid x\leqslant-1\}$ D. ϕ

2. 设 I 为全集，M,P,Q 都是它的子集，则图 1-2 中阴影部分表示的集合是

A. $M\cup(P\cup Q)$ B. $M\cup(P\cap Q)$

C. $M\cap(P\cap Q)$ D. $M\cap(P\cup Q)$

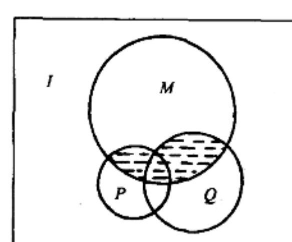


图 1-2

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+3x+2<0\}$，$B=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，且 $A\subseteq B$，那么 a 的取值范围是

A. $\left[-1,-\frac{2}{3}\right]$

B. $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$

C. $\left[\frac{2}{3},1\right]$

D. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

4. 已知集合的运算满足如下分配律：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

现有两个非空集合 M,N，定义 $M-N=\{x\mid x\in M,但\ x\notin N\}$.则 $M-(M-N)$等于

A. $M\cup N$　　　B. N　　　C. $M\cap N$　　　D. M

5. 已知含有三个元素的集合 $A=\{x,xy,xy-1\}$，$x\in Z$，$y\in Z$，且 $y\neq 0$. 若 $0\in A$，则集合 A 中元素的和为________.

6. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=-3x+1,x\in R,y\in R\}$，$B=\{(x,y)\mid y=(k-2k^2)x-k,x\in R,y\in R\}$，当 $A\cap B=\phi$ 时，常数 k 的值等于________.

7. 设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,99\}$，A 是 M 的非空子集，若对任意的 $a\in A$，必有 $(100-a)\in A$，则这样的集合 A 共有________个.

8. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+ax+b=0\}$，$B=\{x\mid x^2+cx+15=0\}$，且 $A\cap B=\{3\}$，$A\cup B=\{3,5\}$，求 a,b,c 的值.

二、　函数的概念、图像和性质

知识纵横精析

函数的定义、图像和性质是函数理论的主要内容，它是研究各类函数以及学习微积分的基础，因此在高考中有着极其重要的地位. 高中函数的概念是建立在映射基础上的，定义域、值域和对应法则是函数的三个要素. 函数 $y=f(x)$ 的图像实际上是直角坐标平面上的点集 $M=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$，其中 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域. 函数的性质主要指函数的单调性、奇偶性和周期性.

【例 6】 已知 A,B 是平面内的两个点集，$f:A\to B$ 是 A 到 B 的映射，且 $f:(x,y)\to(xy,x+y)$，则

(1) A 中元素 $(15,8)$ 在 B 中的像是______；

(2) B 中元素 $(15,8)$ 在 A 中的原像是______；

(3) B 中元素 $(9,6)$ 在 A 中的原像是______；

(4) B 中元素 $(2,1)$ 在 A 中的原像是______.

【分析】 已知原像求像，或已知像求原像，通常利用方程组来求解.

【解】 (1) 当 $x=15,y=8$ 时，$xy=120$，$x+y=23$. 故 $(15,8)$ 在 B 中的像是 $(120,23)$.

(2) 解方程组 $\begin{cases}xy=15,\\x+y=8,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$

$\therefore$ $(15,8)$ 在 A 中的原像是 $(3,5)$ 和 $(5,3)$.

(3) 解方程组 $\begin{cases}xy=9,\\x+y=6,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=3.\end{cases}$ $\therefore$ $(9,6)$ 在 A 中的原像是 $(3,3)$.

(4) 解方程组 $\begin{cases}xy=2,\\x+y=1,\end{cases}$ 知其无解.　故 $(2,1)$ 在 A 中无原像.

【说明】 映射 $f:A\to B$ 有如下三个特征：

①A 中任一元素在 B 中都有像，且像惟一；

②A 中不同元素在 B 中可以有相同的像；

③并不要求 B 中所有元素在 A 中都有原像，即允许 B 中某些元素在 A 中没有原像（如本例(4)）. 即使 B 中元素在 A 中有原像，原像也未必惟一（如本例(2)）.

本例是映射三个特征的一个很好例证.

【例 7】 函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x^2)}{1+\lg(x+1)}$ 的定义域是

______________.

【分析】 $f(x)$的定义域是$[0,2]$，是指凡被 f 作用的量都在闭区间$[0,2]$内，故可得 $0\leqslant x^2\leqslant2$，再注意到分母不能为零及对数的真数大于零即可建立关于 x 的不等式组，然后求解即可.

【解】 由题意，得 $\begin{cases}0\leqslant x^2\leqslant 2,\\ x+1>0,\\ \lg(x+1)\neq-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2},\\ x>-1,\\ x\neq-\dfrac{9}{10}.\end{cases}$

故 $-1<x\leqslant\sqrt{2}$，且 $x\neq-\dfrac{9}{10}$.

$\therefore$ $g(x)$的定义域为$\left\{x\mid -1<x<-\dfrac{9}{10}，或 -\dfrac{9}{10}<x\leqslant\sqrt{2}\right\}$.

【说明】 求函数的定义域通常利用解不等式组的办法，因此正确列出符合条件的不等式组是求解定义域的关键.

【例 8】 已知函数 $f(x)$的值域是$\left[\dfrac{3}{8},\dfrac{4}{9}\right]$，试求函数 $y=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$的值域.

【分析】 这是一个复合函数的值域问题.可利用换元法将问题转化为闭区间上二次函数的值域问题，再结合函数的单调性即可获解.

【解】 $\because$ $\dfrac{3}{8}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{4}{9}$， $\therefore$ $\dfrac{1}{9}\leqslant 1-2f(x)\leqslant\dfrac{1}{4}$，

故 $\dfrac{1}{3}\leqslant\sqrt{1-2f(x)}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

令 $t=\sqrt{1-2f(x)}$，则 $t\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$，$f(x)=\dfrac{1}{2}(1-t^2)$.

$\therefore$ $y=F(t)=\dfrac{1}{2}(1-t^2)+t=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1$.

由于 $F(t)$在$\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$上是增函数， 故 $y_{\min}=F\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{7}{9}$，$y_{\max}=F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{8}$.

$\therefore$ 函数的值域是$\left[\dfrac{7}{9},\dfrac{7}{8}\right]$.

【说明】 本题中在求得$\dfrac{3}{8}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{4}{9}$及$\dfrac{1}{3}\leqslant\sqrt{1-2f(x)}\leqslant\dfrac{1}{2}$后，若把两式相加所得的结果作为值域那就错了.这是因为，对同一个 x 值，上述两式中的 $f(x)$与$\sqrt{1-2f(x)}$并非同时取到最大值或最小值.这里采用了换元法，一方面为利用函数的单调性求最值奠定了基础，另一方面又避免了“相加求值域”这一极易发生的错误.

【例 9】 已知函数 $f(x)$的反函数是 $y=f^{-1}(x)=1-\sqrt{ax^2+25}$ $(-5\leqslant x\leqslant 0)$，点 $M(-2,-4)$在 $f(x)$的图像上，求函数 $f(x)$.

【分析】 这是已知反函数 $y=f^{-1}(x)$求原函数的问题，即求 $y=f^{-1}(x)$的反函数.因此只需先设法求出实数 a，再按照求反函数的步骤求解即可.

【解】 由于点 $M(-2,-4)$在 $f(x)$的图像上，故点 $M'(-4,-2)$必在 $f^{-1}(x)$的图像上.

因此有 $1-\sqrt{16a+25}=-2$. 解之，得 $a=-1$.

$\therefore$ $y=f^{-1}(x)=1-\sqrt{25-x^2}$ $(-5\leqslant x\leqslant 0)$. ①

显然，求 $f(x)$即求 $y=f^{-1}(x)$的反函数.

由①式，得 $x^2=25-(1-y)^2$.

$\because\quad -5\leqslant x\leqslant 0,\qquad \therefore\quad x=-\sqrt{25-(1-y)^2}.$

又当 $-5\leqslant x\leqslant 0$ 时，$0\leqslant\sqrt{25-x^2}\leqslant 5$,

$\therefore\quad -4\leqslant 1-\sqrt{25-x^2}\leqslant 1$, 即 $-4\leqslant y\leqslant 1$,

$\therefore$ 所求的函数为 $f(x)=-\sqrt{25-(1-x)^2}\quad(-4\leqslant x\leqslant 1)$.

【说明】 一般地,设函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数,由互为反函数的两个函数图像间的关系知,若点 (a,b) 在函数 $y=f(x)$ 的图像上,则点 (b,a) 必在反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像上,反之也真.本题求解中实数 a 的值正是基于上述性质而快速确定的.

【例 10】 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{a}$ $(a>0$, 且 $a\neq 1)$, 在同一直角坐标系中, 函数 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=a^{|x-1|}$ 的图像只可能是图 1-3 中的

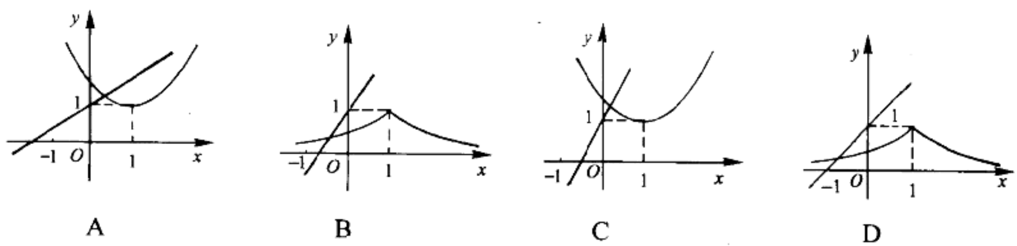


图 1-3

【分析】 这类问题的求解,一般先假定其中一个函数的图像正确,并由此确定参数的范围,再根据这一参数的范围,判断另一图像正确与否,进而确定正确的选项.

【解】 由 $y=\dfrac{x-1}{a}$, 得 $x=ay+1$. $\quad\therefore\quad y=f^{-1}(x)=ax+1$.

对于 A,假设 $y=f^{-1}(x)=ax+1$ 的图像正确,则 $0<a<1$.

这时 $y=a^{|x-1|}$ 在 $(-\infty,1]$ 上为增函数,在 $[1,+\infty)$ 上是减函数.故选项 A 中 $y=a^{|x-1|}$ 的图像是错误的.因此 A 是错误的.

同理可知 B、D 也不真.因此选 C.

【说明】 根据图形语言提供的信息设计选择题,解法非常灵活,它在全面考查学生的数学素质和能力方面有着极其重要的作用,我们应当有意识地进行这类问题的求解训练.

【例 11】 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边界上有一动点 P(如图 1-4),沿折线 $BCDA$ 由起点 B 出发向终点 A 移动.设点 P 移动的路程为 x, $\triangle PAB$ 的面积为 y,求函

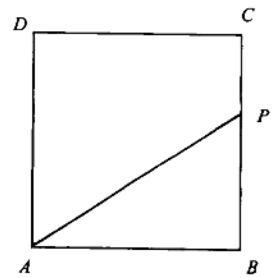


图 1-4

【分析】 由于点 P 在 BC 上移动或在 CD 上移动或在 DA 上移动时, $\triangle PAB$ 的高的表达形式是不同的,故应分三种情况讨论.

【解】 (1)当 P 由 B 移动到 C 时, $0\leqslant x\leqslant 4$, PB 的长为 x,此时

$$y=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x=2x.$$

(2)当 P 由 C 移动到 D 时, $4<x\leqslant 8$,此时

$$y=\frac{1}{2}\cdot4\cdot4=8.$$

(3)当 P 由 D 移动到 A 时,$8<x\leqslant12$,PA 的长为 $12-x$,此时

$$y=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(12-x)=-2x+24.$$

故 $$y=f(x)=\begin{cases}2x & (0\leqslant x\leqslant4),\\ 8 & (4<x\leqslant8),\\ -2x+24 & (8<x\leqslant12).\end{cases}$$

图像如图 1-5.

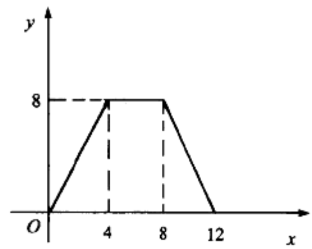


图 1-5

【说明】 这是一道求函数解析式并求作函数图像的实际应用问题.正确确定点 P 的移动路径及三角形的高是解决问题的关键.本题分三种情况讨论,但最终结果通常要用一个分段函数的形式将其表达出来.

【例 12】 已知 $f(x)=\dfrac{a\cdot2^x+a-2}{2^x+1}$是定义在实数集上的奇函数,则 $f(x)$的解析式是____________.

【分析】 要求 $f(x)$的解析式,只需求出 a 的值即可,因此需建立一个关于 a 的方程,这当然可由 $f(-x)=-f(x)$求得.但求解这个方程比较复杂.注意到 $f(x)$的定义域是实数集 R,故 $f(x)$在 $x=0$ 处有定义.因此可由 $f(0)=0$ 建立 a 的方程,解之即得 a 的值,进而可得 $f(x)$的解析式.

【解】 由于 $f(x)$的定义域是实数集,故 $f(x)$在 $x=0$ 处有定义

又 $f(x)$是奇函数,故 $f(0)=0$, 即 $\dfrac{a+a-2}{1+1}=0.$

解得 $a=1$. 故 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

又此时 $f(-x)=-f(x)$,因此 $f(x)$是奇函数.所以函数的解析式是

$$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}.$$

【说明】 一般地,若 $f(x)$是奇函数,且 $f(x)$在 $x=0$ 处有定义,则必有 $f(0)=0$.本题中 a 的值正是基于奇函数 $f(x)$的这一性质而获得的.这种处理问题的方法本质上是特殊化法,应当引起关注.但 $f(0)=0$ 只是在 $x=0$ 处有定义的奇函数的一个必要条件,因此,作为解题的一个完整的思维过程,对于由 $f(0)=0$ 求出的 a,验证 $f(x)$是奇函数是必须的.

【例 13】 判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=(x-3)\sqrt{\dfrac{3+x}{3-x}}$;

(2)$f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3)$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$;

(4)$f(x)=\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\varphi(x)$ ($\varphi(x)$为奇函数,且 $\varphi(x)$不恒为零).

【分析】 判断函数的奇偶性,首先应考查函数的定义域是否关于原点对称,在定义域关于原点对称的情况下,再考查 $f(-x)$是否等于 $-f(x)$或 $f(x)$.

【解】 (1)由于定义域是$[-3,3)$,不关于原点对称,故 $f(x)$既不是奇函数,也不是偶函数.

(2)定义域为实数集 R.

$$\because\quad f(x)+f(-x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})+\lg(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=\lg[(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)]=\lg1=0,$$

$\therefore\quad f(-x)=-f(x)$, 故 $f(x)$是奇函数;

(3)定义域为$(-\infty,+\infty)$,当 $x\neq0$ 时,$f(x)\neq0$,此时

$$\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{\sqrt{1+x^2}-x+1}\div\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$$
$$=\frac{(1+x^2)-(x+1)^2}{(1+x^2)-(x-1)^2}=\frac{-2x}{2x}=-1,$$

$\therefore\quad f(-x)=-f(x)$.

又 $f(0)=\frac{1-1}{1+1}=0$, 故 $f(x)$为奇函数.

(4)只需考察 $g(x)=\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}$的奇偶性即可.

$g(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,关于原点对称.

$$\because\quad g(-x)=\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}=-\left(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{2^x-1+1}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\left(1+\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)=-g(x).$$

$\therefore\quad g(x)$是奇函数.

又 $\varphi(x)$为奇函数, 故 $f(x)$为偶函数.

【说明】 奇偶性是函数的一个整体性质,应在其整个定义域内考虑.定义域关于原点对称是函数为奇(偶)函数的必要条件,判断函数的奇偶性时,应注意只有当式子 $f(-x)=-f(x)$ 或 $f(-x)=f(x)$对 $f(x)$定义域内每一个 x 均成立时,才能判定 $f(x)$是奇函数或偶函数.在直接判断 $f(-x)=\pm f(x)$是否成立有困难时,可转化为判断变式 $f(-x)\pm f(x)=0$,或 $\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm1$ 是否成立,如本例(2)、(3).在公共定义域内,两个奇函数的积是偶函数,两个偶函数的积是偶函数,一奇一偶的两个函数的积是奇函数.本例(4)中 $f(x)$的奇偶性的判断就是基于上述结论而作出的.

【例 14】 讨论函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$的单调性.

【分析】 利用单调函数的定义来考查.

【解】 显然 $f(x)$是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的奇函数,故先讨论 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性.

设 $x_1>x_2>0$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\frac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}$$
$$=(x_1-x_2)\left(1-\frac{a}{x_1x_2}\right).$$

(1)当 $0<x_2<x_1\leqslant\sqrt{a}$时,$\frac{a}{x_1x_2}>1$,