高等学校教材

数学分析讲义

（第三版）

上 册

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社

高等学校教材

数学分析讲义

(第三版)

上　　册

刘玉琏　傅沛仁　编

高等教育出版社

(京)112号

本版内容和体例，较第二版未作大的变动．因此，刘玉琏等编的《数学分析讲义学习指导书——附解题方法提要》一书仍能与本版配套使用．此次修订，主要改动有：改正了第二版中的错漏，对内容作了个别增删，对练习题作了小量调整和精简，引入了量词符号．

本书阐述细致，范例较多，通俗易懂，便于自学．可作高等师范本科与专科的教材（上册本科与专科共用，下册分本科用本与专科用本两种），也可作高等理科院校的函授教材及高等教育自学用书．

为了更好地保证教学效果，未经我社和编者同意，请不要为本书练习题配备题解公开出版．

高等学校教材
数学分析讲义
（第三版）
上　册
刘玉琏　傅沛仁　编
*
高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32　印张 13.625 字数 320 000
1960 年 8 月第 1 版　1992 年 6 月第 3 版　1992 年 6 月第 1 次印刷
印数 0 001—13 595
ISBN7-04-003757-2/O·1112
定价 4.45 元

第三版前言

为了使本书的第三版能与《数学分析讲义学习指导书》(刘玉琏等编，高等教育出版社 1987 年 4 月第一版)配套使用，此次修订，内容和体例原则上不作大的变动，并保持本书通俗易懂，便于自学的特点. 主要的改动有：改正了第二版中的错漏，对内容作了个别的增删，对练习题作了小量调整和精简，对某些文字叙述作了改写或重写. 引入了量词符号，从而许多的定义和定理的叙述以及定理的证明都相应作了改动.

此次修订，得到韩山师专林庆瑞，贵阳师专任永复、丁丰朝，泉州师专蔡永芳，晋东南师专李江等老师们的关怀和支持. 他们经过多次教学实践，对本书的第二版提出较全面的系统的批评意见和修订建议. 这是提高修订质量不可缺少的外部条件. 同时也得到我系数学分析教研室吕凤、王大海、苑德新、赵杰、刘宁、尚淑芳等老师的关怀和帮助. 在此谨向他们表示衷心感谢.

高等教育出版社本书的责任编辑文小西副编审，对本书的出版和修订始终给予具体的帮助和指导，并细致审定书稿，纠正一些错误和不妥之处，为提高书稿质量付出了艰苦劳动. 在此谨向他表示衷心感谢.

尽管本书做了两次修订，但限于编者的水平，谬误仍在所难免. 敬希广大读者和老师们再予批评指正.

编者

1991 年 8 月于东北师大

第二版前言

从 1960 年本《讲义》出版以来，收到许多读者的来信，对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出很多宝贵意见，并建议增配练习题，有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表. 这是对我们工作的鼓励和支持，也是提高修订质量不可缺少的条件. 借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意.

此次修订，根据 1980 年 5 月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》，对原《讲义》的内容作了小量的增删. 在保持原《讲义》通俗易懂，便于自学的前提下，对体例、格式、叙述等作了较大的修改. 力求使原《讲义》的优点得到发展，缺点得到克服. 其中函数与极限两章是重新编写的. 函数的讲法适应了新大纲的要求. 极限的讲法注意了与现行高中《微积分初步》的衔接，既便于自学，又有利于指导中学的极限教学.

此次修订，每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题，对较难的题给了提示，书后附有计算题与判别题的答案. 为了满足读者学习《数学分析》的不同要求，在每个练习题(个别除外) 中分为甲类题(在符号“* * * *”之前) 与乙类题(在符号“* * * *”之后). 我们认为，高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科，以本《讲义》作为《数学分析》代用教材，只做部分或全部甲类题就够了. 高师数学专业四年制本科或函授本科，以本《讲义》作为《数学分析》的教材，除做甲类题外，还要做部分或全部乙类题. 如果学生做完全部练习题有困难，教师可选其中某些题作为习题课上的示范题或习作题.

本《讲义》的内容都是新大纲要求的，故此次修订不排小字.师范专科学校使用本《讲义》，在保证学生学好上册内容的基础上，对下册内容应作必要删减.

此次修订，承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿，提了许多宝贵的意见和建议.对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢.

尽管此次修订我们作了很大努力，但是由于我们水平有限，错误与不妥之处在所难免，敬希广大读者再予批评指正.

编者

1981年7月于东北师大

第一版前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的. 在修改时,吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见.

本《讲义》的内容选取，考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础,注意了数学分析课程本身的系统性,照顾了其它后继课的需要. 文字叙述力求通顺,定理证明力求详明，使其通俗易懂,便于自学.

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析；对一些定理的证明,除了给出分析的严格证明外,注意用几何图形帮助读者理解定理内容,掌握定理的证法.

本《讲义》有些部分用小字排印，它们有的是对某些问题作进一步的说明;有的是教学上的难点;有的是进一步提高不可缺少的内容. 初学的读者,可先不阅读小字部分,待逐步掌握数学分析的方法之后,再阅读这部分内容.

由于我们水平有限,错误和不妥之处一定很多,敬希广大读者批评指正.

本《讲义》主要由刘玉琏同志执笔编写，傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作.

吉林师范大学数学系

数学分析教研室

1960年于长春

常 用 符 号

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“$\in$”表示“属于”；符号“$\overline{\in}$”表示“不属于”，符号“$P(x)$”表示“元素 x 具有性质 P”.

设 A 是集合，x 是元素．例如：

$x\in A$——元素 x 属于 A．$x\overline{\in}A$——元素 x 不属于 A．$\{x|x\in A, P(x)\}$——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体.

2. 集合之间

符号“$\subset$”表示“包含”；符号“$=$”表示“相等”；符号“$\varnothing$”表示空集”；符号“$\cup$”表示“并”或“和”；符号“$\cap$”表示“交”或“乘”；符号“$-$”表示“差”或“余”.

设 A 与 B 是两个集合．例如：

$A\subset B$——A的任意元素 x 都是 B 的元素，或 A 是 B 的子集，或 A 被 B 包含.

$A=B$——A 与 B 相等，即 $A\subset B$ 同时 $B\subset A$.

$A\subset B$，且$A\neq B$——A 是 B 的真子集.

$A\cup B$——A 与 B 的并集或和集，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

$A\cap B$——A 与 B 的交集或积集，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 同时 $x\in B\}$.

$A-B$——A 与 B 的差集或余集，即 $A-P=\{x|x\in A$ 同时 $x\overline{\in}B\}$．设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列无限多个集合.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{x|\text{存在某个自然数 } k\text{，有 } x\in A_k\}.$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=\{x \mid 对任意自然数\ k，有\ x\in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数．全体实数，即实数集，表为R．我们已知实数集R和数轴上的点集是一一对应的，因此也称R是**实直线**．常将"数a"说成"点a"，反之亦然．本书所说的数集都是实数集R的子集．实数集R有些常用的重要子集：

符号"N"表示**自然数集**；符号"Z"表示**整数集**；符号"Q"表示**有理数集**，有

$$N\subset Z\subset Q\subset R.$$

1．区间　为了书写简练．将各种区间的符号、名称、定义列表如下：($a,b\in R$，且$a<b$)

符　号	名　称		定　义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

2．邻域　设$a\in R$，任意$\delta>0$．

数集　$\{x\mid |x-a|<\delta\}$表为$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

称为**a的δ邻域**．当不需要注明邻域半径δ时，通常是对某个确定的邻域半径δ，常将它表为$U(a)$，简称**a的邻域**．

数集 $\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$表为$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$中去掉 a，称为 **a 的 δ 去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时,通常是对某个确定的邻域半径 δ，常将它表为$\mathring{U}(a)$，简称 **a 的去心邻域**.

三、逻辑符号

数学分析的语言是文字叙述和数学符号共同组成的，其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号. 使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号“$\Rightarrow$”表示“蕴涵”或“推得”,或“若…,则…”.

符号“$\Longleftrightarrow$”表示“必要充分”,或“等价”,或“当且仅当”.

设A,B是两个陈述句,可以是条件,也可以是命题. 例如:

$A\Rightarrow B$——若命题A成立,则命题B成立; 或命题A蕴涵命题B;称A是B的充分条件,同时也称B是A的必要条件.

$$n\text{ 是整数}\Rightarrow n\text{ 是有理数}.$$

$A\Longleftrightarrow B$——命题A与命题B等价;或命题A蕴涵命题B ($A\Rightarrow B$),同时命题B也蕴涵命题A ($B\Rightarrow A$);或A (B)是B (A)的必要充分条件.

$$A\subset B\Longleftrightarrow\text{任意 }x\in A,\text{有 }x\in B.$$

2. 量词符号

符号“$\forall$”表示“任意“，或“任意一个”，它是将英文字母A倒过来.

符号“$\exists$” 表示“存在”，或“能找到”，它是将英文字母E反过来.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确．例如，数集 A 有上界、有下界和有界的定义：

数集 A 有上界 $\Longleftrightarrow \exists b\in\mathbb{R}, \forall x\in A$, 有 $x\leqslant b$.

数集 A 有下界 $\Longleftrightarrow \exists a\in\mathbb{R}, \forall x\in A$, 有 $a\leqslant x$.

数集 A 有界 $\Longleftrightarrow \exists M>0, \forall x\in A$, 有 $|x|\leqslant M$.

设有命题："集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$"，用符号表为

$$\forall a\in A, \text{有 } P(a).$$

显然，这个命题的否命题是："集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$"，用符号表为

$$\exists a_0\in A, \text{没有 } P(a_0).$$

这两个命题互为否命题．由此可见，否定一个命题，要将原命题中的"$\forall$"改为"$\exists$"，将"$\exists$"改为"$\forall$"，并将性质 P 否定．例如，数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题，用符号表示就是：

数集 A 有上界 $\Longleftrightarrow \exists b\in\mathbb{R}, \forall x\in A$, 有 $x\leqslant b$.

数集 A 无上界 $\Longleftrightarrow \forall b\in\mathbb{R}, \exists x_0\in A$, 有 $b<x_0$.

四、其它符号

符号"max"表示"最大"（它是 maximum（最大）的缩写）．

符号"min"表示"最小"（它是 minimum（最小）的缩写）．

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个数．例如：

$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ —— n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最大数．

$\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ —— n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最小数．

符号"$n!$"表示"不超过 n 的所有自然数的连乘积"，读作"n 的阶乘"，即

$$n!=n\cdot(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1. \qquad 7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1.$$

符号"$n!!$"表示"不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的自然数的连乘积"读作"n 的双阶乘"，即

$$(2k-1)!!=(2k-1)\cdot(2k-3)\cdots5\cdot3\cdot1.$$

$$(2k)!!=(2k)\cdot(2k-2)\cdots6\cdot4\cdot2.$$

$$9!!=9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1. \qquad 12!!=12\cdot10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2.$$

符号“C_n^m”($n,m\in\mathrm{N}$，且 $m\leqslant n$)表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”，即

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

有公式: $C_n^m=C_n^{n-m}$ 与 $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

规定: $0!=1$.

目　录

第一章　函　　数

在自然科学、工程技术，甚至在某些社会科学中，函数是被广泛应用的数学概念之一，其重要意义远远超出了数学范围．在数学中函数处于基础的核心地位．函数不仅是贯穿于中学《代数》的一条主线，它也是数学分析这门课程研究的对象．

中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念，并在此基础上讨论了函数的一些简单性质．本章除对中学《代数》的函数及其性质重点复习外，根据本课与后继课的需要，将对函数作深入的讨论．

§1.1　函　　数

一、函数概念

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是互相联系着．这是物质世界的一个普遍规律．下面列举几个有两个变量互相联系着的例子：

例 1. 真空中自由落体，物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着．如果物体距地面的高度为 h，

$$\forall t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]^{①}$$

都对应一个距离 s．已知 t 与 s 之间的对应关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

① 当 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$时，由 $s=\frac{1}{2}gt^2$，有 $s=h$，即物体下落到地面．