

高等学校教材

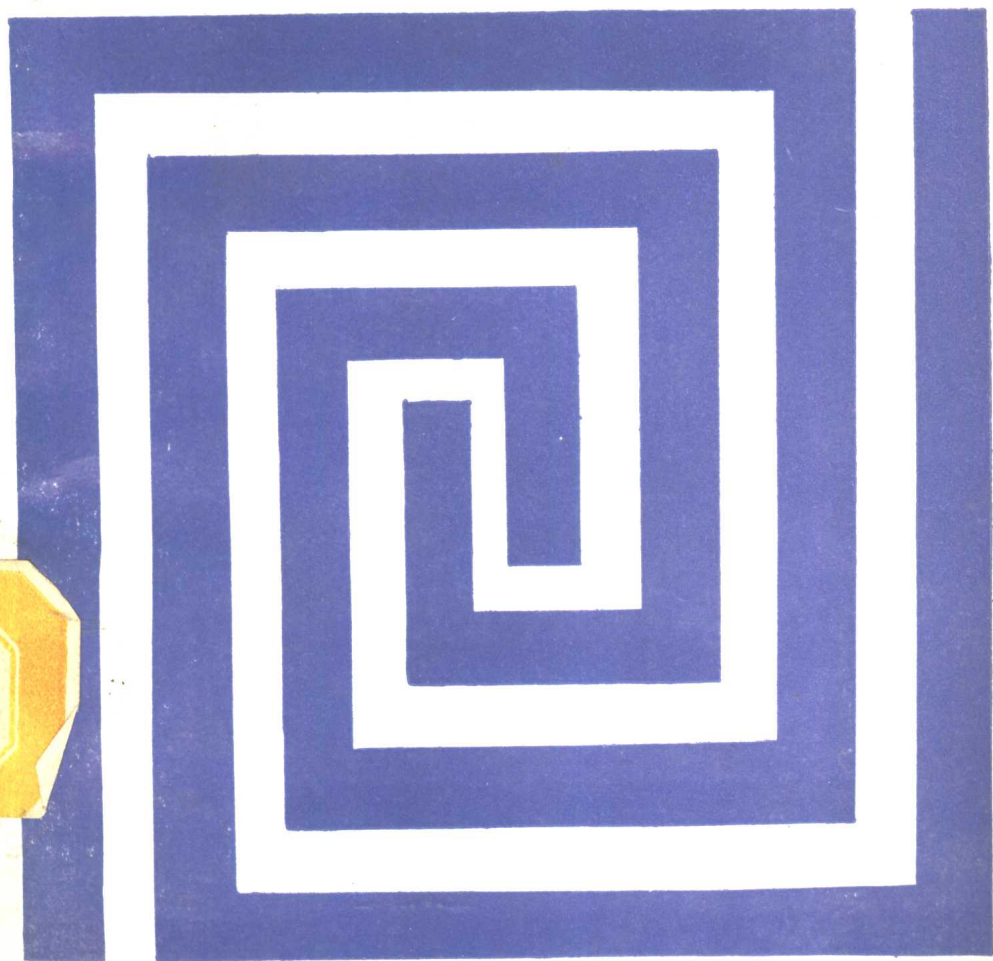
数学分析讲义

(第三版)

上册

刘玉琚 傅沛仁 编

高等教育出版社



011219

017

021163

1

高等学校教材

数学分析讲义

(第三版)

上 册

刘玉琚 傅沛仁 编

高等教育出版社

(京)112号

本版内容和体例,较第二版未作大的变动。因此,刘玉珪等编的《数学分析讲义学习指导书——附解题方法提要》一书仍能与本版配套使用。此次修订,主要改动有:改正了第二版中的错漏,对内容作了个别增删,对练习题作了小量调整和精简,引入了量词符号。

本书阐述细致,范例较多,通俗易懂,便于自学。可作高等师范本科与专科的教材(上册本科与专科共用,下册分本科用本与专科用本两种),也可作高等理科院校的函授教材及高等教育自学用书。

为了更好地保证教学效果,未经我社和编者同意,请不要为本书练习题配备题解公开出版。

高等学校教材 数学分析讲义

(第三版)

上册

刘玉珪 傅沛仁 编

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张13.625 字数 320 000

1960年8月第1版 1992年6月第3版 1992年6月第1次印刷

印数 0 001—13 595

ISBN7-04-003757-2/O·1112

定价 4.45 元

第三版前言

为了使本书的第三版能与《数学分析讲义学习指导书》(刘玉琏等编, 高等教育出版社 1987 年 4 月第一版)配套使用, 此次修订, 内容和体例原则上不作大的变动, 并保持本书通俗易懂, 便于自学的特点. 主要的改动有: 改正了第二版中的错漏, 对内容作了个别的增删, 对练习题作了小量调整和精简, 对某些文字叙述作了改写或重写. 引入了量词符号, 从而许多的定义和定理的叙述以及定理的证明都相应作了改动.

此次修订, 得到韩山师专林庆瑞, 贵阳师专任永复、丁丰朝, 泉州师专蔡永芳, 晋东南师专李江等老师们的关怀和支持. 他们经过多次教学实践, 对本书的第二版提出较全面的系统的批评意见和修订建议. 这是提高修订质量不可缺少的外部条件. 同时也得到我系数学分析教研室吕凤、王大海、苑德新、赵杰、刘宁、尚淑芳等老师的关怀和帮助. 在此谨向他们表示衷心感谢.

高等教育出版社本书的责任编辑文小西副编审, 对本书的出版和修订始终给予具体的帮助和指导, 并细致审定书稿, 纠正一些错误和不妥之处, 为提高书稿质量付出了艰苦劳动. 在此谨向他表示衷心感谢.

尽管本书做了两次修订, 但限于编者的水平, 谬误仍在所难免. 敬希广大读者和老师们再予批评指正.

编者

1991 年 8 月于东北师大

EAB27/10

第二版前言

从1960年本《讲义》出版以来,收到许多读者的来信,对本《讲义》的内容、体系、讲法等诸方面提出很多宝贵意见,并建议增配练习题,有的读者对印刷与编写的一些错漏编制了详细的勘误表。这是对我们工作的鼓励和支持,也是提高修订质量不可缺少的条件。借此再版之机,向关怀和支持我们工作的广大读者表示深切谢意。

此次修订,根据1980年5月在上海高校理科数学教材编审委员会会议上审订的高师《数学分析教学大纲》,对原《讲义》的内容作了小量的增删。在保持原《讲义》通俗易懂,便于自学的前提下,对体例、格式、叙述等作了较大的修改。力求使原《讲义》的优点得到发展,缺点得到克服。其中函数与极限两章是重新编写的。函数的讲法适应了新大纲的要求。极限的讲法注意了与现行高中《微积分初步》的衔接,既便于自学,又有利于指导中学的极限教学。

此次修订,每节(个别除外)之后都配有一定数量的练习题,对较难的题给了提示,书后附有计算题与判别题的答案。为了满足读者学习《数学分析》的不同要求,在每个练习题(个别除外)中分为甲类题(在符号“****”之前)与乙类题(在符号“****”之后)。我们认为,高师数学专业二年制或三年制专修科或函授专修科,以本《讲义》作为《数学分析》代用教材,只做部分或全部甲类题就够了。高师数学专业四年制本科或函授本科,以本《讲义》作为《数学分析》的教材,除做甲类题外,还要做部分或全部乙类题。如果学生做全部练习题有困难,教师可选其中某些题作为习题课上的示范题或习作题。

本《讲义》的内容都是新大纲要求的,故此次修订不排小字。师范专科学校使用本《讲义》,在保证学生学好上册内容的基础上,对下册内容应作必要删减。

此次修订,承蒙四川大学秦卫平副教授在百忙中审阅了全部修订稿,提了许多宝贵的意见和建议。对他为提高本《讲义》的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

尽管此次修订我们作了很大努力,但是由于我们水平有限,错误与不妥之处在所难免,敬希广大读者再予批评指正。

编者

1981年7月于东北师大

第一版前言

本《讲义》是在我系函授本科用《数学分析讲义》的基础上修改完成的。在修改时,吸取了系内教师和广大函授生对该《讲义》在多次教学中所提出的意见。

本《讲义》的内容选取,考虑了当前中等学校多数数学教师的专业基础,注意了数学分析课程本身的系统性,照顾了其它后继课的需要。文字叙述力求通顺,定理证明力求详明,使其通俗易懂,便于自学。

我们对某些重要的概念和定理作了细致的分析;对一些定理的证明,除了给出分析的严格证明外,注意用几何图形帮助读者理解定理内容,掌握定理的证法。

本《讲义》有些部分用小字排印,它们有的是对某些问题作进一步的说明;有的是教学上的难点;有的是进一步提高不可缺少的内容。初学的读者,可先不阅读小字部分,待逐步掌握数学分析的方法之后,再阅读这部分内容。

由于我们水平有限,错误和不妥之处一定很多,敬希广大读者批评指正。

本《讲义》主要由刘玉珪同志执笔编写,傅沛仁同志参加了部分章节的编写和修改工作。

吉林师范大学数学系
数学分析教研室

1960年于长春

常用符号

一、集合符号

1. 集合与元素之间

符号“ $\in$ ”表示“属于”；符号“ $\notin$ ”表示“不属于”，符号“ $P(x)$ ”表示“元素 x 具有性质 P ”。

设 A 是集合， x 是元素。例如：

$x \in A$ ——元素 x 属于 A 。 $x \notin A$ ——元素 x 不属于 A 。 $\{x | x \in A, P(x)\}$ ——集合 A 中具有性质 P 的元素 x 的全体。

2. 集合之间

符号“ $\subset$ ”表示“包含”；符号“ $=$ ”表示“相等”；符号“ $\emptyset$ ”表示“空集”；符号“ $\cup$ ”表示“并”或“和”；符号“ $\cap$ ”表示“交”或“乘”；符号“ $-$ ”表示“差”或“余”。

设 A 与 B 是两个集合。例如：

$A \subset B$ —— A 的任意元素 x 都是 B 的元素，或 A 是 B 的子集，或 A 被 B 包含。

$A = B$ —— A 与 B 相等，即 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$ 。

$A \subset B$ ，且 $A \neq B$ —— A 是 B 的真子集。

$A \cup B$ —— A 与 B 的并集或和集，即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

$A \cap B$ —— A 与 B 的交集或积集，即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 同时 } x \in B\}$ 。

$A - B$ —— A 与 B 的差集或余集，即 $A - B = \{x | x \in A \text{ 同时 } x \notin B\}$ 。设 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 是一列无限多个集合。

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x | \text{存在某个自然数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}$ 。

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{对任意自然数 } k, \text{ 有 } x \in A_k\}.$$

二、数集符号

本书所说的数都是实数. 全体实数, 即实数集, 表为 $\mathbf{R}$. 我们已知实数集 $\mathbf{R}$ 和数轴上的点集是一一对应的, 因此也称 $\mathbf{R}$ 是实直线. 常将“数 a ”说成“点 a ”, 反之亦然. 本书所说的数集都是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集. 实数集 $\mathbf{R}$ 有些常用的重要子集:

符号“ $\mathbf{N}$ ”表示自然数集; 符号“ $\mathbf{Z}$ ”表示整数集; 符号“ $\mathbf{Q}$ ”表示有理数集, 有

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

1. 区间 为了书写简练, 将各种区间的符号、名称、定义列表如下: ($a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$)

符 号		名 称	定 义
(a, b)	有 限 区 间	开区间	$\{x \mid a < x < b\}$
$[a, b]$		闭区间	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$
$(a, b]$		半开区间	$\{x \mid a < x \leq b\}$
$[a, b)$		半开区间	$\{x \mid a \leq x < b\}$
$(a, +\infty)$	无 限 区 间	开区间	$\{x \mid a < x\}$
$[a, +\infty)$		闭区间	$\{x \mid a \leq x\}$
$(-\infty, a)$		开区间	$\{x \mid x < a\}$
$(-\infty, a]$		闭区间	$\{x \mid x \leq a\}$

2. 邻域 设 $a \in \mathbf{R}$, 任意 $\delta > 0$.

数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 表为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

称为 a 的 δ 邻域. 当不需要注明邻域半径 δ 时, 通常是对某个确定的邻域半径 δ , 常将它表为 $U(a)$, 简称 a 的邻域.

数集 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 表为 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x|0<|x-a|<\delta\} = (a-\delta, a+\delta) - \{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a, \delta)$ 中去掉 a , 称为 a 的 δ 去心邻域. 当不需要注明邻域半径 δ 时, 通常是对某个确定的邻域半径 δ , 常将它表为 $\overset{\circ}{U}(a)$, 简称 a 的去心邻域.

三、逻辑符号

数学分析的语言是文字叙述和数学符号共同组成的, 其中有些数学符号是借用数理逻辑的符号. 使用这些数理逻辑的符号能使定义、定理的表述简明、准确. 数学语言的符号化是现代数学发展的一个趋势. 本书将普遍使用这些符号.

1. 连词符号

符号“ $\Rightarrow$ ”表示“蕴涵”或“推得”, 或“若 $\dots$, 则 $\dots$ ”.

符号“ $\Longleftrightarrow$ ”表示“必要充分”, 或“等价”, 或“当且仅当”.

设 A, B 是两个陈述句, 可以是条件, 也可以是命题. 例如:

$A \Rightarrow B$ ——若命题 A 成立, 则命题 B 成立; 或命题 A 蕴涵命题 B ; 称 A 是 B 的充分条件, 同时也称 B 是 A 的必要条件.

n 是整数 $\Rightarrow n$ 是有理数.

$A \Longleftrightarrow B$ ——命题 A 与命题 B 等价; 或命题 A 蕴涵命题 B ($A \Rightarrow B$), 同时命题 B 也蕴涵命题 A ($B \Rightarrow A$); 或 A (B) 是 B (A) 的必要充分条件.

$A \subset B \Longleftrightarrow$ 任意 $x \in A$, 有 $x \in B$.

2. 量词符号

符号“ $\forall$ ”表示“任意”, 或“任意一个”, 它是将英文字母 A 倒过来.

符号“ $\exists$ ”表示“存在”, 或“能找到”, 它是将英文字母 E 反过来.

应用上述的数理逻辑符号表述定义、定理比较简练明确. 例如, 数集 A 有上界、有下界和有界的定义:

数集 A 有上界 $\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leq b.$

数集 A 有下界 $\Longleftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } a \leq x.$

数集 A 有界 $\Longleftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in A, \text{有 } |x| \leq M.$

设有命题: “集合 A 中任意元素 a 都有性质 $P(a)$ ”, 用符号表为

$\forall a \in A, \text{有 } P(a).$

显然, 这个命题的否命题是: “集合 A 中存在某个元素 a_0 没有性质 $P(a_0)$ ”, 用符号表为

$\exists a_0 \in A, \text{没有 } P(a_0).$

这两个命题互为否命题. 由此可见, 否定一个命题, 要将原命题中的 “ $\forall$ ” 改为 “ $\exists$ ”, 将 “ $\exists$ ” 改为 “ $\forall$ ”, 并将性质 P 否定. 例如, 数集 A 有上界与数集 A 无上界是互为否命题, 用符号表示就是:

数集 A 有上界 $\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{有 } x \leq b.$

数集 A 无上界 $\Longleftrightarrow \forall b \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in A, \text{有 } b < x_0.$

四、其它符号

符号 “max” 表示 “最大” (它是 maximum (最大) 的缩写).

符号 “min” 表示 “最小” (它是 minimum (最小) 的缩写).

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个数. 例如:

$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最大数.

$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ —— n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最小数.

符号 “ $n!$ ” 表示 “不超过 n 的所有自然数的连乘积”, 读作 “ n 的阶乘”, 即

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1. \quad 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

符号 “ $n!!$ ” 表示 “不超过 n 并与 n 有相同奇偶性的自然数的连乘积” 读作 “ n 的双阶乘”, 即

$$(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1.$$

$$(2k)!! = (2k) \cdot (2k-2) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

$$9!! = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1. \quad 12!! = 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

符号“ C_n^m ”($n, m \in \mathbb{N}$, 且 $m \leq n$)表示“从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数”, 即

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

有公式: $C_n^m = C_n^{n-m}$ 与 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

规定: $0! = 1$.

目 录

常用符号	1
第一章 函数	1
§ 1.1 函数	1
一、函数概念(1) 二、函数的四则运算(5) 三、函数的图象(6)	
四、数列(9) 练习题 1.1(10)	
§ 1.2 四类具有特殊性质的函数	12
一、有界函数(12) 二、单调函数(15) 三、奇函数与偶函数(17)	
四、周期函数(18) 练习题 1.2(20)	
§ 1.3 复合函数与反函数	22
一、复合函数(22) 二、反函数(24) 三、初等函数(28)	
练习题 1.3(31)	
第二章 极限	34
§ 2.1 数列极限	34
一、极限思想(34) 二、数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限(36) 三、数列	
极限概念(39) 四、例(42) 练习题 2.1(45)	
§ 2.2 收敛数列	47
一、收敛数列的性质(47) 二、收敛数列的四则运算(49)	
三、数列的收敛判别法(54) 四、子数列(62) 练习题 2.2(64)	
§ 2.3 函数极限	67
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限(67) 二、例(I)(70)	
三、当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限(71) 四、例(II)(76) 练习题 2.3(79)	
§ 2.4 函数极限的定理	80
一、函数极限的性质(80) 二、函数极限与数列极限的关系(84)	
三、函数极限存在判别法(86) 四、例(90) 练习题 2.4(93)	
§ 2.5 无穷小与无穷大	95
一、无穷小(95) 二、无穷大(96) 三、无穷小的比较(99)	
练习题 2.5(102)	

第三章 连续函数.....104

§ 3.1 连续函数.....104

一、连续函数概念(104) 二、例(106) 三、间断点及其分类(108)

练习题 3.1(110)

§ 3.2 连续函数的性质.....112

一、连续函数的运算及其性质(112) 二、闭区间连续函数的性质(113)

三、反函数的连续性(116) 四、初等函数的连续性(117) 练习题 3.2(121)

第四章 实数的连续性.....124

§ 4.1 实数连续性定理.....124

一、闭区间套定理(124) 二、确界定理(126) 三、有限覆盖定理(130)

四、聚点定理(132) 五、致密性定理(134) 六、柯西收敛准则(134)

练习题4.1(136)

§ 4.2. 闭区间连续函数性质的证明.....137

一、性质的证明(137) 二、一致连续性(140) 练习题 4.2(143)

第五章 导数与微分.....146

§ 5.1 导数.....146

一、实例(146) 二、导数概念(149) 三、例(152) 练习题 5.1(157)

§ 5.2 求导法则与导数公式.....159

一、导数的四则运算(159) 二、反函数求导法则(164) 三、复合函数

求导法则(166) 四、初等函数的导数(171) 练习题 5.2 (175)

§ 5.3 隐函数与参数方程求导法则.....177

一、隐函数求导法则(177) 二、参数方程求导法则(182) 练习题 5.3(183)

§ 5.4 微分.....185

一、微分概念(185) 二、微分的运算法则和公式(189) 三、微分

在近似计算上的应用(190) 练习题 5.4(192)

§ 5.5 高阶导数与高阶微分.....193

一、高阶导数(193) 二、莱布尼兹公式(196) 三、高阶微分(200)

练习题 5.5(201)

第六章 微分学基本定理及其应用.....203

§ 6.1 中值定理.....203

一、洛尔定理(203) 二、拉格朗日定理(205) 三、柯西定理(208)

四、例(209) 练习题 6.1(212)

§ 6.2 洛比达法则·····	214
一、 $\frac{0}{0}$ 型(214) 二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型(219) 三、其它待定型(222) 练习题 6.2(225)	
§ 6.3 泰勒公式·····	226
一、泰勒公式(226) 二、常用的几个展开式(231) 练习题 6.3(234)	
§ 6.4 导数在研究函数上的应用·····	236
一、函数的单调性(236) 二、函数的极值与最值(240) 三、函数的 凸凹性(250) 四、曲线的渐近线(261) 五、描绘函数图象(265) 练习题 6.4(269)	
第七章 不定积分 ·····	273
§ 7.1 不定积分·····	273
一、原函数(273) 二、不定积分(275) 练习题 7.1(280)	
§ 7.2 分部积分法与换元积分法·····	281
一、分部积分法(281) 二、换元积分法(285) 练习题 7.2(295)	
§ 7.3 有理函数的不定积分·····	296
一、代数的预备知识(296) 二、有理函数的不定积分(300) 练习题 7.3(305)	
§ 7.4 简单无理函数与三角函数的不定积分·····	305
一、简单无理函数的不定积分(305) 二、三角函数的不定积分(311) 练习题 7.4(316)	
第八章 定积分 ·····	318
§ 8.1 定积分·····	318
一、实例(318) 二、定积分概念(322)	
§ 8.2 可积准则·····	325
一、小和与大和(325) 二、可积准则(329) 三、三类可积函数(332) 练习题 8.2(335)	
§ 8.3 定积分的性质·····	336
一、定积分的性质(336) 二、定积分中值定理(344) 练习题 8.3(346)	
§ 8.4 定积分的计算·····	347
一、按照定义计算定积分(347) 二、积分上限函数(350) 三、定积分的 基本公式(352) 四、定积分的分部积分法(353) 五、定积分的换元积分 法(356) 练习题 8.4(361)	
§ 8.5 定积分的应用·····	366
一、微元法(366) 二、平面区域的面积(368) 三、平面曲线的弧长(374)	

四、应用截面面积求体积(380)	五、旋转体的侧面积(385)	
六、变力作功(387)	练习题 8.5(389)	
§ 8.6 定积分的近似计算		391
一、梯形法(392)	二、抛物线法(396)	练习题 8.6(399)
附录 希腊字母表		400
练习题答案		401

第一章 函 数

在自然科学、工程技术,甚至在某些社会科学中,函数是被广泛应用的数学概念之一,其重要意义远远超出了数学范围.在数学中函数处于基础的核心地位.函数不仅是贯穿于中学《代数》的一条主线,它也是数学分析这门课程研究的对象.

中学数学应用“集合”与“对应”已经给出了函数概念,并在此基础上讨论了函数的一些简单性质.本章除对中学《代数》的函数及其性质重点复习外,根据本课与后继课的需要,将对函数作深入的讨论.

§ 1.1 函 数

一、函数概念

在一个自然现象或技术过程中,常常有几个量同时变化,它们的变化并非彼此无关,而是互相联系着.这是物质世界的一个普遍规律.下面列举几个有两个变量互相联系着的例子:

例 1. 真空中自由落体,物体下落的时间 t 与下落的距离 s 互相联系着. 如果物体距地面的高度为 h ,

$$\forall t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]^{①}$$

都对应一个距离 s . 已知 t 与 s 之间的对应关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

① 当 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ 时, 由 $s = \frac{1}{2}gt^2$, 有 $s = h$, 即物体下落到地面.