Foundations of Managerial Mathematics

——Theory and Application

杜纲 编著

管理数学基础

——理论与应用

Foundations of Managerial Mathematics

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

管理数学基础

——理论与应用

杜　纲　编著

天津大学出版社

内容提要

本书比较全面地介绍了高层次管理数学的基本内容，主要有矩阵理论、泛函分析、模糊数学、随机过程的理论、方法及它们在管理中的应用。书中内容系统简明，既有理论深度，又有应用广度，每章后均有习题，书后附有全部习题的解答，便于教学和自学。

本书可作为高等院校经济管理类及相关专业研究生和本科生高年级的教材，也可作为经济管理及工程技术人员的参考书

图书在版编目(CIP)数据

管理数学基础理论与应用/杜纲编著.—天津:天津大学出版社,2003.1
ISBN 7-5618-1701-0

Ⅰ.管… Ⅱ.杜… Ⅲ.管理学:数学
Ⅳ.G931.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 095095 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址 www.tdcbs.com
电　　话 营销部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省昌黎县人民胶印厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 148mm×210mm
印　　张 9.5
字　　数 283 千
版　　次 2003 年 1 月第 1 版
印　　次 2003 年 1 月第 1 次
印　　数 1—3 000
定　　价 15.00 元

前言

一种科学，只有在成功地运用数学时，才算达到了真正完善的地步。

卡尔·马克思

随着现代科学技术和社会经济的不断发展，各个领域对管理的要求越来越高。管理作为一门科学，在向更高层次的发展过程中，必然要对它的重要理论基础——管理数学提出更高的需求。本书就是为适应这种需求，在作者多年为天津大学管理学院研究生开设管理数学基础课程的基础上编写而成的。

从科学技术体系的角度可将管理数学类的各学科分支再划分为两大类别，即基础科学类别和技术科学类别。以目前我国各高等院校管理专业本科层次普遍开设的管理数学类课程为例，基础科学类别中主要包括高等数学、线性代数、概率论等，技术科学类别中主要包括运筹学、应用统计学等。本书内容的理论部分定位于基础科学类别中的较高层次（主要指研究生层次），并区别于纯数学，体现了管理的背景和在管理中的应用。

在本书的编写和出版过程中，得到了天津大学管理学院和天津大学出版社的支持，天津大学管理学院的张世英教授、吴育华教授和刘民千副教授等对本书内容提出过宝贵的建议，谨在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，缺点和错误在所难免，敬请读者给予批评指正。

作者

2002年9月于天津大学

目　录

第一章　矩阵理论 …………………………………………（1）
§1.1　线性变换及其矩阵表示 ……………………………………（1）
1.1.1　线性空间上的线性变换 …………………………………（1）
1.1.2　线性变换的矩阵表示 ……………………………………（3）
1.1.3　特征值与特征向量 ………………………………………（5）
1.1.4　相似矩阵 …………………………………………………（8）
§1.2　方阵在相似变换下的标准形 ……………………………（10）
1.2.1　方阵的行列式因子、不变因子、初等因子 ………………（10）
1.2.2　方阵相似的条件 …………………………………………（15）
1.2.3　方阵在相似变换下的若当标准形 ………………………（15）
1.2.4　方阵在相似变换下的有理标准形 ………………………（20）
§1.3　方阵特征值的估计 ………………………………………（25）
1.3.1　特征值的估计 ……………………………………………（25）
1.3.2　谱半径的估计 ……………………………………………（30）
1.3.3　主特征值及主特征向量的迭代算法 ……………………（31）
§1.4　矩阵分析 …………………………………………………（34）
1.4.1　矩阵序列 …………………………………………………（34）
1.4.2　方阵幂级数 ………………………………………………（35）
1.4.3　方阵函数 …………………………………………………（39）
§1.5　应用举例一:线性动态系统 ………………………………（47）
1.5.1　线性动态系统及其状态空间表达式 ……………………（47）
1.5.2　线性定常系统的解 ………………………………………（48）
1.5.3　系统的能控性与能观性 …………………………………（49）
1.5.4　经济控制论模型 …………………………………………（51）
§1.6　应用举例二:层次分析法 …………………………………（53）
1.6.1　问题的提出 ………………………………………………（53）
1.6.2　基本原理 …………………………………………………（54）
1.6.3　基本步骤 …………………………………………………（55）
§1.7　应用举例三:多元统计分析 ………………………………（66）

1.7.1 多元总体和样本 …… (66)
1.7.2 主成分分析 …… (69)
1.7.3 聚类分析 …… (74)
1.7.4 判别分析 …… (78)
1.7.5 在教育管理中的应用举例 …… (80)
习题 1 …… (82)
第二章 泛函分析 …… (89)
§2.1 距离空间与巴拿赫不动点定理 …… (89)
2.1.1 距离空间 …… (89)
2.1.2 距离空间中的点集 …… (92)
2.1.3 收敛、柯西列、完备性 …… (93)
2.1.4 连续映射 …… (96)
2.1.5 压缩映射与巴拿赫不动点定理 …… (97)
§2.2 线性赋范空间与有界线性泛函 …… (99)
2.2.1 线性赋范空间 …… (99)
2.2.2 有界线性算子 …… (103)
2.2.3 有界线性泛函与对偶空间 …… (107)
§2.3 泛函的极值 …… (109)
2.3.1 泛函的变分 …… (109)
2.3.2 泛函的极值 …… (111)
§2.4 应用举例:最优控制 …… (113)
2.4.1 最优控制问题的一般提法 …… (113)
2.4.2 求解最优控制问题的变分法与最小值原理 …… (114)
习题 2 …… (118)
第三章 凸分析 …… (121)
§3.1 凸集与凸集分离定理 …… (121)
3.1.1 凸集 …… (121)
3.1.2 凸集分离定理 …… (122)
3.1.3 Farkas 引理 …… (125)
§3.2 凸函数与次微分 …… (126)
3.2.1 凸函数与凹函数 …… (126)
3.2.2 凸函数的次微分 …… (131)

§3.3　凸函数的极值与凸规划 …… (137)
3.3.1　凸函数的极值 …… (137)
3.3.2　凸规划 …… (138)
3.3.3　共轭函数与对偶凸规划 …… (141)
§3.4　凸集上的不动点定理 …… (144)
3.4.1　Brouwer 不动点定理 …… (145)
3.4.2　Kakutani 不动点定理 …… (145)
§3.5　应用举例:数理经济 …… (147)
3.5.1　厂商的生产利润优化 …… (147)
3.5.2　经济的均衡 …… (148)
习题 3 …… (154)

第四章　模糊数学 …… (155)
§4.1　模糊集 …… (155)
4.1.1　模糊现象与模糊集 …… (155)
4.1.2　模糊集的隶属函数 …… (156)
4.1.3　模糊集的运算 …… (164)
4.1.4　分解定理与扩张原理 …… (168)
4.1.5　凸模糊集与模糊数 …… (170)
§4.2　模糊关系 …… (173)
4.2.1　模糊关系与模糊矩阵 …… (173)
4.2.2　模糊关系的运算与合成 …… (176)
4.2.3　模糊等价关系与传递闭包 …… (178)
§4.3　模糊灰集与灰关系 …… (180)
4.3.1　模糊灰集 …… (180)
4.3.2　灰关系 …… (181)
§4.4　应用举例一:模糊多元分析 …… (181)
4.4.1　模糊聚类分析 …… (181)
4.4.2　模糊数量化方法 I …… (186)
§4.5　应用举例二:模糊评价与优化 …… (187)
4.5.1　模糊综合评价 …… (187)
4.5.2　模糊线性规划 …… (194)
习题 4 …… (199)

第五章 随机过程 …… (202)
§5.1 随机过程的一般概念 …… (202)
5.1.1 随机过程的直观背景与定义 …… (202)
5.1.2 有限维分布函数族与条件数学期望 …… (204)
5.1.3 重要的几种随机过程 …… (209)
§5.2 马尔可夫过程 …… (217)
5.2.1 马尔可夫过程的定义 …… (217)
5.2.2 马尔可夫链 …… (224)
5.2.3 可数状态的马尔可夫过程 …… (244)
§5.3 应用举例:排队系统分析 …… (253)
习题5 …… (255)
习题解答 …… (257)
附录 预备知识 …… (278)
一、线性代数中的若干基本知识 …… (278)
1.行列式 …… (278)
2.矩阵 …… (279)
3.线性方程组 …… (281)
二、微积分中的若干基本知识 …… (283)
1.极限与连续 …… (283)
2.导数与微分 …… (285)
3.积分 …… (287)
4.级数 …… (287)
三、概率论中的若干基本知识 …… (288)
1.概率空间 …… (288)
2.随机变量及其分布函数 …… (288)
3.随机变量序列的收敛性 …… (290)
参考文献 …… (292)

第一章　矩阵理论

矩阵理论(matrix theory)是近代数学的重要组成部分,在经济管理和工程技术等许多领域中有着广泛的应用.特别是在计算机高度发展的今天,它更成为各领域中处理大量有限维空间形式与数量关系的有力工具.本章介绍矩阵理论的一些基本内容及其应用.

§1.1　线性变换及其矩阵表示

1.1.1　线性空间上的线性变换

定义 1.1　设 X 是一个非空集合,K 是数域(K 为实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$),若定义 X 中二元素之间的加法运算以及数域 K 中的数与 X 中元素之间的数乘运算,并满足下列条件:

加法运算"+"满足:对任意 $x,y\in X$,$x+y\in X$,且

(1) $x+y=y+x$;

(2) 对任意 $z\in X$,$(x+y)+z=x+(y+z)$;

(3) 存在 $0\in X$,使得对一切 $x\in X$,有 $x+0=x$(0 称 X 的零元素);

(4) 对任意 $x\in X$,存在 $y\in X$,使 $x+y=0$(y 称 x 的负元素);

数乘运算"·"满足:对任意 $\alpha\in K$,$x\in X$,$\alpha x\in X$,且

(5) 对任意的 $\beta\in K$,$\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

(6) $1\cdot x=x$;

(7) 对任意的 $y\in X$,$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$;

(8) 对任意的 $\beta\in K$,$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

则称 X 为数域 K 上的**线性空间**.当 K 是实数域 $\mathbf{R}$ 时,X 称为**实线性空间**;当 K 是复数域 $\mathbf{C}$ 时,X 称为**复线性空间**.X 上的加法运算和数乘运

算统称为**线性运算**.

例 1.1 容易验证,n 维向量的全体 $\mathbf{R}^n$,在通常定义的向量加法和实数与向量的数乘运算下构成实线性空间,常称为 n 维向量空间或 n 维欧氏空间.

在线性代数中,已知在 $\mathbf{R}^n$ 中的向量间定义了线性组合、线性相关、线性无关以及等价等概念.这些概念及有关性质只涉及线性运算.因此,对一般线性空间中的元素,这些概念和性质仍然适用,还可把线性空间中的元素称为**向量**,线性空间称为**向量空间**.

定义 1.2 如果线性空间 X 中有 n 个线性无关的元素 $\xi_1,\cdots,\xi_n$,且 X 中任一元素 x 都可以由它们线性表示,即

$$x = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n,$$

则称 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为 X 的一组**基**,基中所含元素的个数 n 称为 X 的**维数**,系数 $x_1,\cdots,x_n$ 称为 x 在这组基下的**坐标**,记为$[x_1 \quad \cdots \quad x_n]$.

设$[\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n]$和$[\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_n]$是线性空间 X 中的两组不同的基,则其中一组基可由另一组基线性表出,设

$$\begin{gathered}\xi_1 = p_{11}\eta_1 + \cdots + p_{n1}\eta_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi_n = p_{1n}\eta_1 + \cdots + p_{nn}\eta_n.\end{gathered}$$

即

$$[\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n] = [\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_n]\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

记

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{P}$ 为由基$[\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_n]$到基$[\xi_1 \quad \cdots \quad \xi_n]$的**过渡矩阵**.可以证明[1],过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的.

如果线性空间 X 的子集 Q 也构成线性空间,则称 Q 为 X 的一个

线性子空间，简称**子空间**.

可以证明[1]，线性空间 X 的子集 Q 是子空间的充要条件是：Q 对 X 中的线性运算封闭.

所谓一个集合对某种运算**封闭**，是指集合中任意元素经该运算后的结果仍属于此集合.

例 1.2　齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解集合 $Q=\{\boldsymbol{\eta}\in\mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

证： 首先，Q 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集；其次，对于任意的 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2\in Q$，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1+\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2\in Q$，又对任意 $\alpha\in\mathbf{R}$，有

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{\eta}_1)=\alpha\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{0},$$

所以 $\alpha\boldsymbol{\eta}_1\in Q$. 即 Q 对 $\mathbf{R}^n$ 中的加法与数乘运算封闭，故 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

定义 1.3　设 X,Y 是两个非空集合，若对每个 $x\in X$，都有惟一的 $y\in Y$ 与它对应，这种对应规律记为 T，称做从 X 到 Y 的一个**映射**，也称为**算子**或**变换**，简记为 $T:X\to Y$. $y=Tx$ 称做 x 在映射下的**像**，x 称为**原像**.

定义 1.4　设 X,Y 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，若映射 $T:X\to Y$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in X,\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，有

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2,$$

则称 T 是从 X 到 Y 的一个**线性变换**（或称为**线性算子**）. 当 $Y=X$，称 T 是 X 上的线性变换.

1.1.2　线性变换的矩阵表示

设 X 与 Y 的维数分别为 n 和 m，$\xi=[\xi_1\quad\cdots\quad\xi_n]$ 和 $\eta=[\eta_1\quad\cdots\quad\eta_m]$ 分别是 X 和 Y 中的一组基，又设

$$\begin{aligned}T\xi_1&=a_{11}\eta_1+\cdots+a_{m1}\eta_m,\\&\vdots\\T\xi_n&=a_{1n}\eta_1+\cdots+a_{mn}\eta_m,\end{aligned}$$

即

$$[T\xi_1 \quad \cdots \quad T\xi_n] = [\eta_1, \ \cdots, \ \eta_m]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

记

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为线性变换 T 关于基 ξ、η 的一个**矩阵表示**(简称**矩阵**).

X 中任意元素 x 在 ξ 下的坐标记为 $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$(上标 T 表示转置),$Tx$ 在 η 下的坐标记为 $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad \cdots \quad y_m]^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{aligned} Tx &= T(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n) \\ &= x_1 T\xi_1 + \cdots + x_n T\xi_n \\ &= [T\xi_1 \quad \cdots \quad T\xi_n]\boldsymbol{x} \\ &= [\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_m]\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

另一方面,有

$$\begin{aligned} Tx &= y_1\eta_1 + \cdots + y_m\eta_m \\ &= [\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_m]\boldsymbol{y}. \end{aligned}$$

而$[\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_m]$是线性无关组,故有 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.即 T 作用于 x 相当于用 T 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{x}$.

例 1.3　设 T 是 n 维线性空间 X 上的变换,对于任意 $x \in X$, $Tx = mx$(m 是固定数).则容易验证,T 是 X 上的一个线性变换(称为数乘变换).试求 T 的矩阵.

解: 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 是 X 的一组基,则有

$$\begin{gathered} T\xi_1 = m\xi_1 = m\xi_1 + 0\xi_2 + \cdots + 0\xi_n, \\ T\xi_2 = m\xi_2 = 0\xi_1 + m\xi_2 + \cdots + 0\xi_n, \\ \vdots \\ T\xi_n = m\xi_n = 0\xi_1 + 0\xi_2 + \cdots + m\xi_n, \end{gathered}$$

于是 T 的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m \end{bmatrix}=mE,$$

其中 E 为 n 阶单位阵.

例 1.4　设 θ 为一已知角度,考虑以

$$P=\begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

为矩阵的线性变换,易验证,P 中的列为彼此正交的单位向量,即 P 是正交矩阵.称矩阵为正交阵的线性变换为**正交变换**.

1.1.3　特征值与特征向量

定义 1.5　设 A 为 n 阶方阵,如果数 λ 与 n 维非零的列向量 x,使等式

$$Ax=\lambda x$$

成立,则称数 λ 为方阵 A 的一个**特征值**,非零列向量 x 称为 A 的相应于(属于)特征值 λ 的**特征向量**.

由定义不难看出,如果 x 是 A 的相应于 λ 的特征向量,那么对任意非零数 k,kx 也是相应于 λ 的特征向量;如果 x_1 和 x_2 都是 A 的相应于 λ 的特征向量,那么 x_1+x_2 也是相应于 λ 的特征向量.

定义 1.5 中的式 $Ax=\lambda x$ 可以改写为

$$(\lambda E-A)x=0.$$

这可看做是以 x 为变量的齐次线性方程组.它有非零解的充要条件是系数行列式等于 0,而 x 是特征向量为非零,故 λ 必满足

$$|\lambda E-A|=0.$$

称 $\lambda E-A$ 为 A 的**特征矩阵**,$|\lambda E-A|$ 为 A 的**特征多项式**,$|\lambda E-A|=0$ 为 A 的**特征方程**.

由上述分析可知,方阵 A 的特征值 λ 是 A 的特征方程的根(因此特征值又称**特征根**).A 的相应于 λ 的特征向量 x 是以 A 的特征矩阵为系数阵的齐次线性方程组的解.

例 1.5　求方阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

的特征值与特征向量.

解： $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0,$$

求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=2,\lambda_2=\lambda_3=1.$$

对 $\lambda_1=2$,解齐次线性方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{cases}3x_1-x_2=0\\ 4x_1-x_2=0,\\ -x_1\qquad=0\end{cases}$$

求出它的基础解系：

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

相应于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{x}_1(k_1\neq 0)$.

对 $\lambda_2=\lambda_3=1$,解齐次线性方程组$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即

$$\begin{cases}2x_1-x_2\qquad=0\\ 4x_1-2x_2\qquad=0,\\ -x_1\qquad-x_3=0\end{cases}$$

求出它的基础解系：

$$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},$$

相应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量是 $k_2\boldsymbol{x}_2(k_2\neq 0)$.

例 1.6　求方阵

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

的特征值与特征向量.

解：$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 4 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1)=0,$$

求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1.$$

对 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases}4x_1-x_2-x_3=0\\ 4x_1-x_2-x_3=0\end{cases},$$

求出它的基础解系：

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix},\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 4\end{bmatrix},$$

相应于 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$（$k_1,k_2$ 不同时为零）.

对 $\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\ -3x_2=0,\\ 4x_1-x_2-4x_3=3\end{cases}$$

求出它的基础解系

$$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},$$

相应于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $k_3\boldsymbol{x}_3(k_3\neq 0)$.

定理 1.1　若 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异的特征值，$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 是分

别相应于它们的特征向量,则 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 线性无关.

证: 对 s 使用数学归纳法.

当 $s=1$,因为任一非零向量线性无关,所以定理成立.

设对 $s-1$ 个互异的特征值定理成立,要证对 s 个互异的特征值定理也成立.为此令

$$k_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+k_s\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

在上式两边同乘以 λ_s 得

$$k_1\lambda_s\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_s\lambda_s\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{0}, \tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i(i=1,\cdots,s)$,用 $\boldsymbol{A}$ 左乘(1)式得

$$k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_{s-1}\lambda_{s-1}\boldsymbol{x}_{s-1}+k_s\lambda_s\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{0},$$

将(1)、(2)二式两边分别相减得

$$k_1(\lambda_1-\lambda_s)\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_{s-1}(\lambda_{s-1}-\lambda_s)\boldsymbol{x}_{s-1}=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{s-1}$ 线性无关,且 $\lambda_i\neq\lambda_s(i=1,\cdots,s-1)$,故必有 $k_1=\cdots=k_{s-1}=0$,从而 $k_s=0$.即 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 线性无关.

1.1.4 相似矩阵

线性空间 X 上的线性变换 T 在 X 的不同基组下的表示矩阵是不同的.那么这些矩阵之间有什么关系呢?

设$[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]$和$[\eta_1\ \cdots\ \eta_n]$是线性空间 X 的两组不同的基,$[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]=[\eta_1\ \cdots\ \eta_n]\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{P}$ 为过渡矩阵.T 是 X 上的线性变换,T 关于$[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]$的矩阵为 $\boldsymbol{B}$,关于$[\eta_1\ \cdots\ \eta_n]$的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则

$$\begin{aligned}[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]\boldsymbol{B}&=T[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]\\&=T[[\eta_1\ \cdots\ \eta_n]\boldsymbol{P}]\\&=T[\eta_1\ \cdots\ \eta_n]\boldsymbol{P}\\&=[\eta_1\ \cdots\ \eta_n]\boldsymbol{AP}\\&=[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP},\end{aligned}$$

而$[\xi_1\ \cdots\ \xi_n]$为线性无关组,因此

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}.$$

定义 1.6 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵,若存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$,使

$$B = P^{-1}AP,$$

则称 A 相似于 B,记为 $A \sim B$.这时也可称 $P^{-1}AP$ 为对 A 施行**相似变换**,P 称为相似变换阵.

由前面的讨论和定义 1.6 可得下面的结论.

定理 1.2 设 T 是线性空间 X 上的线性变换,则 T 在 X 的两组不同基下的矩阵是相似的.

相似矩阵有若干重要性质,例如相似矩阵具有相同的行列式、相同的秩和相同的特征值等.下面仅证明其中之一,其余留作习题.

定理 1.3 设方阵 A 与 B 相似,则 A 与 B 有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

证: 因为 $A \sim B$,所以存在可逆阵 P,使得

$$B = P^{-1}AP.$$

于是 A 与 B 的特征矩阵有如下关系:

$$\lambda E - B = \lambda E - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda E - A)P,$$

等式两端取行列式,显然 $|P^{-1}| = \dfrac{1}{|P|}$,于是

$$|\lambda E - B| = |P^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |P| = |\lambda E - A|,$$

即 A 与 B 有相同的特征多项式,从而 A 与 B 有相同的特征值.

定理 1.3 表明,线性变换的矩阵的特征多项式与基的选择无关,它是直接被线性变换所决定的.

推论 1.1 若方阵 A 相似于对角阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

则 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 即 A 的 n 个特征值.

证: Λ 的特征多项式为 $|\lambda E - \Lambda| = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$,故 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 Λ 的特征值,而 $A \sim \Lambda$. 由定理 1.3,A 与 Λ 有相同的特征值,所以 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.