成人高等教育试用教材

高等数学

（上册）

主　编　杨万禄
副主编　朱希源　曾贻德

高等教育出版社

成人高等教育试用教材

高等数学

（上册）

主　编　杨万禄
副主编　朱希源
　　　　曾贻德

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

本书是根据"全国普通高等理工院校成人教育研究会数学学科委员会"制定的成人教育本科"高等数学"[illegible]学基本要求，按照成人教学的特点编写的.

全书为上、下两册，共十二章. 上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何. 本书每节后配有适量的习题；每章后配有综合性的测验作业题，用来检查学生对本章基本内容掌握的程度；书末附有习题答案、积分表等有关附录.

本书概念清楚，说理浅显，重点内容叙述详细，台阶较小，例题较多，便于自学，具有成人教育教材的特点.

本书可作为成人高等院校函授、夜大学教材，也可作为大学专科的教材及工程技术人员自学用书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册/杨万禄主编．—北京：高等教育出版社，199[illegible]

ISBN 7-04-[illegible]

Ⅰ．高… Ⅱ．杨… Ⅲ．高等数学 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（95）第03950号

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京发行所发行

三河市科教印刷包装集团印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 16.25 字数 420 000

1995 年 5 月第 1 版 1997 年 7 月第 2 次印刷

印数 5 626—9 135

定价14.50元

前　言

本书是根据“全国普通高等理工院校成人教育研究会数学学科委员会”1993年第五届年会制定的成人本科“高等数学”教学基本要求，按照成人学习的特点而编写的.

在编写本书时，我们力求做到在保证教学基本要求的前提下，要体现成人教育教材的特点，符合成人教育教学的规律. 具体突出了以下几点：

1. 教材内容便于自学. 在内容顺序安排上遵循由浅入深、循序渐进的编写原则，在内容叙述上层次分明，脉络清晰，标题醒目，文字准确，通顺易懂.

2. 精选内容，突出重点，贯彻少而精原则. 对重点内容要阐述透彻，分清主次，削枝强干. 力戒面面俱到，使学生抓不到要领.

3. 在保证数学理论基本完整的前提下，重点突出基本概念和基本运算，不过分追求理论上的严密性，对于繁难的理论证明和推导适当删减.

4. 教材中配有较多的例题. 通过对例题的分析，帮助学生加深对基本概念、基本理论的理解，开阔思路，活跃思想，举一反三，提高学生的解题能力和解题技巧，减少学生做习题的困难.

5. 教材与函授教学环节相配合. 每章后有总结，内容包括：本章的基本要求、重点与难点、学习中应注意的几个问题、测验作业题等. 使学生，特别是函授生，自学后明确本章的基本要求，重点和难点，做到“心中有数”. 根据各章的基本要求和学生在学习中容易出现的问题在“学习中应注意的几个问题”作了进一步的阐述和解释，加深学生对这些内容的理解，有针对性地解答学生自学中的一些疑难问题，减少自学中的困难. 此外，为了检查学

生的自学效果，书中还精心选编了阶段性的测验题.

书中标有“*”号的章节，可供有关专业选用. 标有“*”号的例题和习题不作一般要求，可供学生选做.

本书可作为成人高等院校函授、夜大学教材，也可作为各种办学形式的大学专科的教材及工程技术人员自学用书.

全书分上、下两册，共十二章. 其中上册包括：单元函数微积分及向量代数与空间解析几何. 下册包括：多元函数微积分、级数及微分方程.

本书由杨万禄（第一、八章）、滕桂兰（第二、三章）、陈涵西（第四、五章）、曾贻德（第六、十一章）、胡迺丽（第七、十二章）、朱希源（第九、十章）编写. 由清华大学应用数学系康静安教授主审. 参加审稿的还有清华大学应用数学系副教授王天晨、胡金德、李永乐. 他们在繁忙的工作中，认真仔细地审阅了原稿，提出许多具体的宝贵意见. 对于他们的热情支持和帮助我们表示诚挚的感谢.

本书在编写过程中曾广泛参考了许多“高等数学”教材，特别是同济大学、天津大学编写的《高等数学》教材，在此我们一并表示衷心的感谢.

本书在编写过程中，得到了天津大学、北方交通大学、哈尔滨建筑大学（原哈尔滨建筑工程学院）的有关部门领导和同志的关心和支持，在此我们表示衷心的感谢.

对本书的缺点和不妥之处，恳请读者批评指正.

编　　者

1994年6月

目　录

第一章　函数与极限

本章将介绍函数、极限、连续等基本概念和它们的有关性质以及极限计算方法等. 这些内容是学习微积分的基础.

§1　函　　数

一、变量与常量

1. 变量与常量

在观察各种自然现象或实验过程中，会遇到很多的量，这些量一般可分为两种：一种量在某过程中不起变化，保持一定的数值，这种量称为**常量**；还有一种在某过程中变化的量，即可取不同数值的量，这种量称为**变量**.

例如，自由落体的下降速度和下落的距离是不断变化的，它们都是变量；而自由落体的质量在这一过程中则保持不变，因而是常量. 再如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力越来越大，因而是变量.

一个量是常量还是变量，要在具体问题中作具体分析. 例如，火车行驶时的速度，在开始阶段或刹车阶段是变化的，因而在该过程中是变量；在匀速行驶时速度不变，因而是常量.

通常用字母 a、b、c 等表示常量；用字母 x、y、z 等表示变量. 在数学上把常量与变量又分别叫做常数与变数. 在几何上，如果一个数 a 是常数，则用数轴上的一个定点表示；如果数 x 是变数，则用数轴上的一个动点表示.

2. 变量变化范围的表示方法

任何一个变量，总有一定的变化范围. 例如，一天的时间 t 所取的值，总是介于 0 到 24（小时）之间，即变量 t 的变化范围是 0～24. 如果变量的变化是连续的，变量的变化范围常常是用区间来表示. 下面我们列表给出区间的名称、定义和符号.

名称	定义	符号
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$
开区间	$a<x<b$	(a,b)
左半开区间	$a<x\leqslant b$	$(a,b]$
右半开区间	$a\leqslant x<b$	$[a,b)$
无限区间	$a<x$	$(a,+\infty)$
无限区间	$a\leqslant x$	$[a,+\infty)$
无限区间	$x<b$	$(-\infty,b)$
无限区间	$x\leqslant b$	$(-\infty,b]$
无限区间	$-\infty<x<+\infty$	$(-\infty,+\infty)$

注意 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，它们不是数，仅仅是个记号. 在数轴上，表示区间的端点时，实圆点“•”表示区间包括端点；空心圆点“°”表示区间不包括该端点.

例 1 满足不等式 $-\pi\leqslant x<\pi$ 的全体实数 x，是右半开区间，记作 $[-\pi,\pi)$.

例 2 满足不等式 $-\infty<x\leqslant 2$ 的全体实数 x，是无限区间，记作 $(-\infty,2]$.

二、绝对值与邻域

1. 绝对值

(1) **定义** 任意实数 a 的绝对值用符号“$|a|$”表示，定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

由定义可知，任何一个实数 a 的绝对值是非负的. 显然有

$$|a|=\sqrt{a^2},\quad |-a|=|a|.$$

a 的绝对值 $|a|$，在几何上表示数轴上的点 a 到原点的距离.

由绝对值的定义，还可以得到下列一些论断：

1° $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$. (1)

事实上，如果 $a\geqslant 0$，有 $-|a|\leqslant a=|a|$；如果 $a<0$，有 $-|a|=a<|a|$. 因此，对任何实数 a，(1) 式总是成立的.

2° $|x|<r$ ($r>0$)，与 $-r<x<r$ 是等价的. 即，若 $|x|<r$，则有 $-r<x<r$；反之，若 $-r<x<r$，则有 $|x|<r$.

事实上，从几何上看这是非常显然的，因为 $|x|<r$，表示点 x 与原点的距离小于 r，所以点 x 必落在区间 $(-r,r)$ 内，即 $-r<x<r$；反之，若 $-r<x<r$ 成立，则点 x 落在区间 $(-r,r)$ 内，所以点 x 与原点的距离小于 r，因而有 $|x|<r$.

同理还可以得到，绝对值不等式 $|x-a|<r$ 与 $a-r<x<a+r$ 是等价的.

3° $|x|>N$ ($N>0$)，与 $x>N$ 和 $x<-N$ 是等价的. 请读者自证.

(2) **绝对值的性质**

1° $|a+b|\leqslant |a|+|b|$.

2° $|a-b|\geqslant |a|-|b|$.

3° $|ab|=|a|\,|b|$.

4° $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

证 1° 由公式 (1) 得

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|,$$

把两式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

它与不等式

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|,$$

等价，性质 1°得证.

证 2° 因为 $|a|=|(a-b)+b|$，利用性质 1°得，

$$|(a-b)+b|\leqslant |a-b|+|b|,$$

于是 $$|a|\leqslant |a-b|+|b|,$$

即 $$|a-b|\geqslant |a|-|b|.$$

性质 2°得证.

关于绝对值乘法和除法的性质 3°,4°利用绝对值的定义,即可得证，请读者自己完成.

2. 邻域

定义 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta \tag{2}$$

的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域. 点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 不等式（2）又可写成

$$-\delta<x-a<\delta \quad 或 \quad a-\delta<x<a+\delta.$$

因此，a 点的 δ 邻域就是以点 a 为中心，而长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$，如图 1-1.

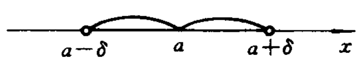

图 1-1

例 3 点 2 的 $\delta=\dfrac{5}{2}$邻域，可表示为

$$|x-2|<\frac{5}{2}.$$

即 $$2-\frac{5}{2}<x<2+\frac{5}{2},$$

即
$$-\frac{1}{2}<x<\frac{9}{2}.$$
该邻域是开区间 $(-\frac{1}{2},\frac{9}{2})$.

例 4 解绝对值不等式
$$|x|>x. \tag{3}$$

解 当 $x\geqslant 0$ 时，根据绝对值定义 $|x|=x$，代入（3）式，得 $x>x$，这是不可能的，故没有任何非负实数满足此不等式.

当 $x<0$ 时，，由 $|x|=-x$，代入（3）式，
移项得 $2x<0$，即 $x<0$. 于是（3）式的解是 $x<0$，即一切负实数均满足（3）式.

三、函数概念

在某一自然现象或实验过程中，往往同时遇到两个或多个变量，这些变量不是孤立地变化，而是互相联系，互相依赖，遵循着一定的规律变化. 下面仅就两个变量的情形举几个例子.

例 5 圆的面积 S 与它的半径 r 间的关系，由公式 $S=\pi r^2$ 确定. 当半径 r 取某一正的数值时，圆面积 S 相应地有一个确定的数值.

例 6 在初速度为零的自由落体运动中，路程 S 和时间 t 是两个变量，当时间变化时，所经历的路程也相应地变化，它们之间有下列关系：
$$S=\frac{1}{2}gt^2,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ g \text{ 是重力加速度（常量）}.$$

例 7 两个质点作相对运动，彼此之间的距离 r 与相互作用的引力 f 是两个变量. 根据万有引力定律，它们之间的关系式是：
$$f=G\frac{m_1m_2}{r^2} \quad (G \text{ 是引力常数，} m_1,\ m_2 \text{ 是两质点的质量}).$$

上述三例都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应规律. 根据这种对应规律，当其中一个变量在某

一个范围内取一个数值时，另一个变量就有一个确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数关系.

定义 设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在实数的某一范围 I 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律，总有一个唯一确定数值和它对应，则变量 y 称为变量 x 的函数，记作

$$y=f(x), x\in I.$$

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数（或因变量）. 自变量的取值范围 I，称为函数的定义域.

在函数的定义中要着重理解以下几点：

1. 函数的两个要素

函数定义中给出，函数是由对应规律和定义域所确定的. 对两个变量只要给出对应规律和定义域，则这两个变量就构成了一个函数关系. 因此，又把函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素.

2. 函数的定义域

如果自变量取某一数值 x_0 时，函数有一个确定的值和它对应，那末就称函数在 x_0 处有定义，因此函数的定义域就是使函数有定义的实数的全体. 我们如何确定函数的定义域呢？通常是按下面两种情况考虑：

（1）对于实际问题，是根据问题的实际意义具体确定. 如例 5 函数的定义域为 $(0,+\infty)$，因为半径不能取负值. 例 6 函数的定义域为 $[0,T]$，其中 T 为自由落体落地的时间.

（2）函数由公式给出时，不考虑函数的实际意义，这时函数的定义域就是使式子有意义的自变量的一切实数值.

例 8 求函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的定义域.

解 显然只有在分母 $x+1\neq0$，即 $x\neq-1$ 时，表达式才有意义. 因此，函数的定义域为 $x\neq-1$ 的全体实数，用区间表示为：$(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$.

例 9 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域.

解 因为根式 $\sqrt{1-x^2}$中的 $1-x^2$ 不能为负，又因为这个根式是分母，不能为零．因此，必须有 $1-x^2>0$，即 $x^2<1$ 或$|x|<1$，故函数的定义域为

$$-1<x<1 \text{ 或写成 } (-1,1).$$

例 10 求 $y=\ln(x-1)$ 的定义域.

解 因为对数的真数必须大于零，故 $x-1>0$，或 $x>1$．即函数的定义域为 $x>1$，或写成 $(1,+\infty)$.

例 11 求函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ $(b>a>0)$ 的定义域.

解 因为根式内的 $(x-a)(b-x)$ 不能为负，即 x 满足不等式

$$(x-a)(b-x)\geqslant 0.$$

它可分为两种情况：x 适合不等式组：

$$\begin{cases} x-a\geqslant 0, \\ b-x\geqslant 0; \end{cases} \tag{4}$$

或者适合不等式组：

$$\begin{cases} x-a\leqslant 0, \\ b-x\leqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

由 (4) 式可以解出：$a\leqslant x\leqslant b$，而 (5) 式无解．因此，函数的定义域为 $a\leqslant x\leqslant b$，或写成 $[a,b]$.

例 12 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域.

解 此题是求两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域．$\sqrt{x^2-x-6}$的定义域必须满足$x^2-x-6\geqslant 0$，即

$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$

解得

$$x\geqslant 3, \text{ 或 } \quad x\leqslant -2.$$

而 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域是$\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$，即

$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得

$$-3\leqslant x\leqslant 4.$$

这两个函数定义域的公共部分是：$-3\leqslant x\leqslant -2$，与 $3\leqslant x\leqslant 4$，于是，所求函数的定义域是：

$$-3\leqslant x\leqslant -2 \quad 与 \quad 3\leqslant x\leqslant 4.$$

3. 函数记号

函数记号 $y=f(x)$表示 y 是 x 的函数. 如果函数关系由某个式子具体给出时，记号“$f(\quad)$”表示 x 与 y 之间的确定的对应规律. 如例 6 中 S 是 t 的函数写成 $S=f(t)$，则 $f(t)=\frac{1}{2}gt^2$.

再如，$$y=f(x)=x^2-2x+3,$$

对于这个具体函数，记号 $f(\quad)=(\quad)^2-2(\quad)+3$，表示把 x 代入符号内进行运算而得到 y.

y 是 x 的函数，可以记作 $y=f(x)$，也可以记作 $y=G(x)$ 或 $y=F(x)$ 等. 但同一个函数在讨论中应取定一种记法. 同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律. 为避免混淆和方便起见，有时也用记号 $y=y(x)$，$u=u(x)$，$s=s(t)$等表示函数.

4. 函数值

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 在定义域内取得值 x_0，函数 $f(x)$的对应值 y_0，叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作

$$y_0=f(x_0)，或\ y|_{x=x_0}=y_0.$$

注意 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 的区别，前者是一个固定值，后者一般地讲是变量. 在函数的定义中规定对于自变量 x 的确定值，函数 y 只有一个值与其对应（单值函数）. 但有时会遇到变量 y 有一个以上的值与之对应的情形，此时我们称 y 是 x 的多值函数. 对于变量 y 多值的情形，主要是限制 y 的取值范围使之成为单值，再进行研究. 例如反三角函数 $y=\mathrm{Arcsin}x$，它是多值的，当 y 限制在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，就是单值的（这时反正弦函数记为 $y=\arcsin x$）. 当我们研究了 $y=\arcsin x$ 之后，对 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 也就不难了解了.

例 13 求函数 $f(x)=x^2-2x+3$，在 $x=3$，$x=x_0+\triangle x$ 处的函数值.

解 $x=3$ 时，$f(3)=(3)^2-2(3)+3=6$.

$x=x_0+\triangle x$ 时，

$$\begin{aligned}f(x_0+\triangle x)&=(x_0+\triangle x)^2-2(x_0+\triangle x)+3\\&=x_0^2+2x_0(\triangle x-1)+\triangle x(\triangle x-2)+3.\end{aligned}$$

例 14 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，

(1) 求 $f(\frac{2}{\pi})$，(2) 证 $f(x)=f(-x)$.

解 (1) $f(\frac{2}{\pi})=\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}}=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

(2) $f(-x)=\frac{1}{-x}\sin\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，

即
$$f(x)=f(-x).$$

例 15 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解 令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，代入上式得

$$\begin{aligned}f(t)&=(t-1)^2+3(t-1)+5\\&=t^2+t+3.\end{aligned}$$

即
$$f(x)=x^2+x+3.$$

例 16 设 $f(x)=e^x$，证明 $\frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$.

证
$$\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}=f(x-y).$$

四、函数的表示法

函数通常有三种表示法：表格法、图示法、公式法（或解析法).

1. 表格法

表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出．例如常用的平方表，对数表，三角函数表等都是用表格法表