



大学数学自学指南

DAXUESHUXUEZIXUEZHINAN

赵慈庚 朱鼎勋主编

中国青年出版社



大学数学自学指南

赵慈庚 朱鼎勋 主编

中国青年出版社

封面设计：李芳芳

大学数学自学指南

赵慈庚 朱鼎勋 主编

*

中国青年出版社出版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092 1/32 8.75印张 128千字

1984年9月北京第1版 1984年9月北京第1次印刷

定价0.67元

内 容 提 要

本书是为有志于自学大学数学课程的读者编写的。全书分十四章，总论叙述了数学的作用、特点和发展概况，提出了学好数学的一般方法，介绍各类大学数学专业的课程设置，使读者对数学专业有所了解；后面十三章分别对空间解析几何、数学分析等各门课作深入的学习指导。分析各门课的特点、难点，对自学读者学习注意事项、选择自学课本、学时安排等学习进度和习题选作也都作了提示。内容详尽，通俗易懂。本书是自学读者的“良师”。

前 言

青年人有志于学习高等数学，却没有机会进入大学读书，已经是件憾事；无师可承而自学数学，略有一点经验的人都知道其中的苦恼；我们出于同情的心理，用自己的经验写了这个小册子。主观上希望对读者有一点帮助。

我们以为在学习大学数学具体课程之前，应该对整个数学的概况有一点了解，为此我们开头写了总论。

数学和物理、化学同属于自然科学，然而数学另有自己的特点。物理、化学都有初等高等之分，从中学到大学没有分界的鸿沟；而学习数学却不能不分两步走。中学时期讲初等数学，侧重在具体实用。大学里的高等数学，为了应用广泛，必须概括得宽阔，因此而立论抽象，往往超出生活常识。在这极度抽象之中进行逻辑推理，是许多人不大习惯的。所以用初等数学的学习态度对待高等数学，没有不失败的。很多热气腾腾的青年刚走到高等数学的门前，便望而却步了。学习大学数学不先扭转学习意识，大概是不会有好效果的。在总论中提出了数学的特点，同时谈了大学数学的一般学习方法。

数学现在已是分支众多的学科，我们根据现行教学大纲列出十三门课程详加分析。在大学数学系基础课程里只缺《泛函分析》没有列入。因为它是基础课的最后课程，假若

以前各科学得好，就能领会学习数学的规律，不需要过细的指导了。

各科的学习顺序，应该参考“总论”中大学数学系《专业科目和时间安排》表。具体情况，自学的读者可灵活掌握，本书的安排只供参考。

赵慈庚 朱鼎勋

1982年十一月

目 次

总论	1
一 数学的作用和特点	1
二 数学的发展	2
三 学习大学数学的方法	3
四 各类大学数学课程设置概况	5
空间解析几何	16
一 概述	16
二 平面解析几何复习和补充	19
三 向量代数	20
四 空间的一次问题	22
五 特殊曲面和空间曲线	24
六 空间二次问题	27
七 自我测试题	29
数学分析	31
一 概述	31
二 函数和极限	35
三 导数和微分	37
四 积分	39
五 级数理论	42
六 多元函数的微分学	44
七 多元函数的积分学	46
八 自我测试题	47
高等代数	50
一 概述	50
二 基本概念	53
三 多项式论	54
四 行列式	58

五	线性方程组理论	51
六	矩阵	60
七	向量空间和它的线性变换	61
八	欧几里得空间和它的线性变换	63
九	二次型和对称矩阵	65
十	自我测试题	67
常微分方程		71
一	概述	71
二	基本概念	74
三	初等积分法	75
四	基本理论	78
五	线性方程和线性方程组的一般理论	82
六	自我测试题	86
复变函数论		87
一	概述	87
二	复数	89
三	解析函数	92
四	解析函数的积分理论	93
五	解析函数的级数展开	95
六	留数理论和它的应用	96
七	解析开拓	97
八	解析函数的几何理论	99
九	自我测试题	100
实变函数论		104
一	概述	104
二	集论	106
三	测度	108
四	可测函数	110
五	勒贝格积分	111
六	自我测试题	113
近世代数		115
一	概述	115
二	基本概念	117
三	群	119
四	环和域	122
五	整环里的因子分解	123

六	域的扩张	124
七	自我测试题	126
高等几何		129
一	概述	129
二	平面仿射几何的基本概念	132
三	平面射影几何的基本概念	136
四	变换群和几何学	139
五	二次曲线的射影理论、仿射理论和度量理论	140
六	射影几何公理基础	143
七	非欧几里得几何概要	144
八	自我测试题	144
微分几何		146
一	概述	146
二	向量分析	148
三	曲线论	150
四	可展曲面初论	152
五	曲面论	153
六	自我测试题	155
点集拓扑学		157
一	概述	157
二	集合论初步	159
三	度量空间	160
四	拓扑空间	161
五	特殊类型拓扑空间	163
六	自我测试题	165
概率论和数理统计		166
一	概述	166
二	基本概念	168
三	随机变量	169
四	数字特征和特征函数	170
五	大数定律和中心极限定理	171
六	统计推断初步	171
七	自我测试题	173
数学物理方程		176
一	概述	176

二	波动方程	178
三	热传导方程	180
四	调和方程	182
五	二阶线性方程的分类和特征	183
六	自我测试题	185
计算数学		188
一	概述	188
二	误差的基本知识	191
三	函数插值	192
四	曲线拟合	193
五	数值积分和数值微分	194
六	线性代数方程组的解法	196
七	矩阵特征值和特征向量的计算	197
八	非线性方程的求解方法	198
九	常微分方程初值问题的数值解	199
十	偏微分方程边值问题的数值解	200
十一	自我测试题	201
后记		204

总 论

赵慈庚

一 数学的作用和特点

数学属于自然科学，它是一切科学技术的基础。立志自学大学数学的读者，不但对数学研究要培养浓厚的兴趣，而且必须对数学在发展国民经济和科学技术方面的作用有一定的了解。

初等数学在中小学课程里的重要性是人所共知的。高等数学的基础部分，除了数学专业之外，既是理工科的重要基础，又是其他许多非理工科专业的基础。也可以说，没有数学基础，就难以学好自然科学领域的各门学科。

现在的科学技术比较复杂，但是它们都有共同的地方，那就是它们的研究和发展都离不开数学。同时，科学技术的发展又反过来促进数学的发展。

和其他学科比较，数学的特点是：抽象性、准确性和运用广泛性。数学的抽象是一步步提高的，把客观具体事物和数分离，比如从三个苹果分离出3，这是第一步抽象，用字母代替数是从抽象所得的数再抽象，用字母作运算，抽象程度便又加深一步。抽象的过程就是数学发展的过程。数学的准确性就是它的逻辑的严密性，数学的结论要求是确定的，

而这种确定性的结论，只有通过严密的逻辑推理才可能获得。数学在自然科学领域里，几乎无所不及，现在就连社会科学的许多领域也都需要数学了。可以这样说，不论是工业、农业，还是国防、贸易，也不论是科学研究，还是工程技术，很难找出哪一个部门、哪一个行业是和数学无关的。这就是数学应用的广泛性。

二 数学的发展

数学产生于生产实践，考古学证明，早在四五千年以前，人类就已经在生产实践中积累了许多零散的、片断的数学知识。中国、巴比伦、埃及和印度这四个文明古国的史料说明，公元前两千多年前，就已产生了算术、代数和几何的初步知识。我国在三千多年前的商代就已使用十进位的数了。两千多年前，我国就有《九章算术》这样的数学专著，书里已经有了一次方程组的解法。至于几何方面，另一部书《周髀算经》记载的内容就更早了。巴比伦、埃及和印度的古代数学也有许多光辉的成就。

在数学发展史上应该提出的是古希腊，大约在公元前五世纪左右，古希腊的文化发展昌盛一时，随着生产的发展，天文学、航海、贸易得到了很大的发展，同时也促进了数学的发展。欧几里得在总结前人知识的基础上，写出了《几何原本》这部流传至今的不朽著作，这也是一部最早的、内容最丰富、最系统的数学巨著。

到了十六世纪，已经是欧洲的文艺复兴时期，数学取得了许多新的进展。工业革命使生产力突飞猛进，机械、造船、建筑、交通、天文、开矿、冶炼等许多新的领域不但需要力

学、物理学和化学的知识，同时需要处理实践中出现的变化现象，这就需要引入变量，这是数学发展的一次大突破。法国数学家费尔马和笛卡尔创立的解析几何，英国科学家牛顿和德国科学家莱布尼茨创立的微积分是数学发展史上光彩夺目的成就之一。从此，数学发展进入了一个转折时期。

二十世纪四十年代，电子计算机的出现，标志着数学的发展又进入了崭新的时期。随着现代科学技术的迅速发展，数学已渗透到许多新的领域里，并和别的学科密切结合，产生了新的边缘学科和综合性学科。现在，数学的分科越来越细，形成了分支众多、内容丰富、应用广泛的学科。

三 学习大学数学的方法

大学的数学更加抽象，要学好数学还要注意学习方法。

许多青年从中学升入大学以后，在一段时期里，对于大学数学的学习方式很不习惯，其中原因，一是大学的学习任务比中学重，二是用中学的学习习惯来学大学数学，这样就很不适应。大体说来，中学数学内容接近于常识，其中的许多理论好象仅仅是把许多常识系统化了，或者逻辑化了。因为它和常识接近，有些人不十分注意逻辑系统，再加上中学数学教材的逻辑推理本来不多，这样，有些人就误以为数学只是讲计算方法的，于是以为会计算就是懂得数学了。大学的数学不同，它不用常识，甚至要我们抛开常识而从纯逻辑上去认识其中的规律，这大概就是初学大学数学的时候往往感到困惑的原因。自学大学数学因为没有人指导，难免因此降低兴趣，或失掉信心，以至望而生畏。所以要先坚持一个时期，闯过第一道关口。

自学是有困难的，为什么要自学？目的一定要明确。学习是为了获得知识，改造自然，服务人类。有了这样高尚的情操，就能在自学中有持久的毅力。

选择数学专业要考虑到自己的个性，比如你平时乐意钻研数学问题，当然你一定喜欢逻辑思维，这就是你的个性。这显然也牵涉到兴趣。如果有这样的基础，对于自学当然是好的。不过，所谓个性和兴趣不是绝对的。你认识到学习数学的需要，兴趣可以从认真钻研中培养起来的。

任何事情都没有一定的成功之路，学习也不例外。怎样自学好大学的数学，也没有一套固定的方法，下面提出的几点也只是提供自学读者作参考。

第一，要认真领会概念、定义等的含意，不可丝毫马虎。数学中的文字十分严格，一字之差，影响极大。自学的时候必须字字斟酌，认真领会定义、概念、定理，不能一知半解，而要真正理解。

第二，要善于积累知识。丰富的知识是积累得来的。学习的时候，常常有人说在某部分教材中，这是重点，那是难点。自学的读者千万不要因此而只注意这些重点和难点。所谓重点，无非是它牵涉的问题多；所谓难点，无非是理论上比较复杂、难于分析和理解的部分。重点和难点一定要弄懂弄通，但是只用这些重点和难点架设不成数学的大厦。学习数学不能放过论证中的任何细节，大小道理都要弄懂。

第三，要加强复习。俗话说，“温故而知新”。只有常常复习功课，才能使已学得的知识不易忘掉。对于教材的内容，每看完一章或一大段后，要把这章或这段的理论系统地回顾几次，要求做到不看书本记清各定理之间的联系，甚至

每个定理的证明。对于相似证法的定理，对于有从属关系或对等关系的概念，都要进行对比，以分清异同，正确理解它们。

第四，通过解题来复习知识和锻炼思维能力。解题是学习数学重要的一环。每本教材都有大量的习题，一类习题能使读者增强计算能力，复习学过的知识，记忆一些公式、定理；一类习题能使读者锻炼思维能力，开动脑筋从逻辑判断上去进行推理和证明。在做练习题的时候，要多方面联系，看清了一道题的题设和题断，就要回忆和这问题有关的定理、定义、法则、公式，看看其中哪些能沟通问题的题设和题断。特别情况比一般情况总要简单一些，解题的时候，可以从特例着手。从特例的解法，往往可以推广到一般情况。

第五，解题后要善于小结。每做完一部分复习题，都要进行一次小结。要想想这些题的解法是否是最好的，能不能再简化；叙述得是否通畅，头绪纷繁的思路要使别人看起来很顺利，哪些问题是应该先说的，哪些问题是应该后说的，等等，在自己解题过程中是否都弄好了；最后要小结一下自己的解法能否推广，这些推广可以作为自己进修的资料连同证明记录下来。

上面所提各点，都是泛泛之谈，结合各分支教材怎样学好，后面各章还要叙述，这里就不作介绍了。

四 各类大学数学课程设置概况

各类大学由于培养目标不同，课程的设置也就不同。为了让自学青年对大学数学课程设置有所了解，现在把综合大学数学系、高等师范院校数学系、工院校校的数学课程和应用

数学专业的教学计划,摘录出来,以供参考。政治、体育、外语是国家规定的公共必修课,各校都一样,因此没有列在表里。教学计划中的专业课程,由各校自己安排,所以同一类学校、同一种专业,设置的课程还有不同,尤其是选修科目差异比较多。

课程设置、教材内容和教学要求,都要跟着时代前进,所以这一切规定都不是一成不变的,读者也应该注意到这一点。

(一) 综合大学数学系数学专业教学计划

1. 培养目标:

本专业培养德、智、体全面发展的从事数学方面的教学、科研和其他实际工作的专门人材。具体要求是:掌握本专业所需要的基础理论、基本知识和基本技能;具有一定的专门知识,了解一些和本专业有关的科学技术新发展;获得从事科学研究的初步训练,具有较强的自学能力和一定的分析问题、解决问题的能力;能用一种外国语阅读本专业的书刊。

2. 修业年限:四年。

3. 专业科目和课时安排表:(见下页)。

下页表里每周学时分配八栏中,只写一个数字的,是每周讲授(或实验)学时数。两数字相加的,其中第一个数字是每周讲授学时数,第二个数字是习题课学时数。如一年级下学期数学分析每周学时“4 + 2”,表示每周讲授4学时,习题课2学时。

表里最后六门课程(从偏微分方程到微分几何)是第一组限制性选课,每个学生必须在这六门中选学四门。

课 程	学 时 总 数	学时分配			各学期每周学时分配									
		讲 授	习 题 课	实 验	一年级		二年级		三年级		四年级			
					上 学 期	下 学 期	上 学 期	下 学 期	上 学 期	下 学 期	上 学 期	下 学 期		
数学分析	238	136	102		4+4	4+2								
数学分析	153	102	51					3+2	3+1					
解析几何	102	68	34		4+2									
线性代数	153	102	51			4+2	2+1							
物 理	170	170				2	4	4						
物理实验	102			102			2	4						
常微分方程	85	68	17					4+1						
复变函数	85	68	17						4+1					
实变函数	85	68	17						4+1					
偏微分方程	68	68							4					
泛函分析	68	68								4				
抽象代数	68	68								4				
拓 扑 学	68	68									4			
概率统计	68	68									4			
微分几何	68	68										4		

还有第二组限制性选修课程十几门，每门讲授51学时，设在四年级，每个学生必须选学其中三门。