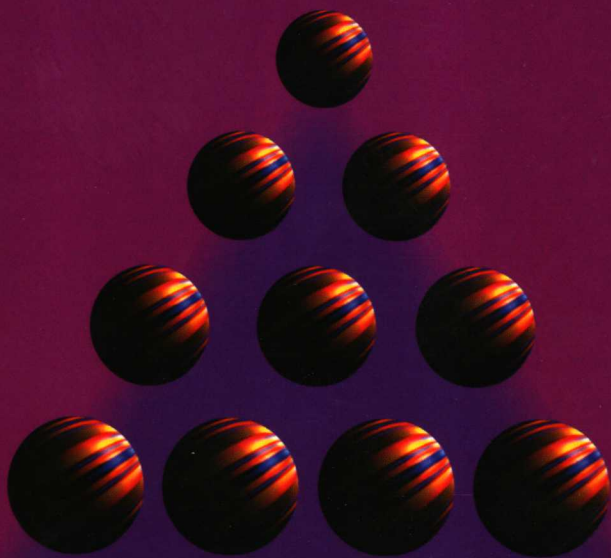


物理学与偏微分方程

下册

李大潜 秦铁虎 编著



高等教育出版社

物理学与偏微分方程

下册

陈维桓 姜伯驹 编



科学出版社

物理学与偏微分方程

(下册)

李大潜 秦铁虎 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

物理学和偏微分方程. 下册/李大潜, 秦铁虎编著.
北京: 高等教育出版社, 2000. 6
ISBN 7-04-008768-5

I. 物… II. ①李…②秦… III. ①物理学②偏微分方程 IV. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 09458 号

物理学与偏微分方程(下册)

李大潜 秦铁虎 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号 邮政编码 100009

电 话 010-64054588 传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 850×1168 1/32

版 次 2000 年 6 月第 1 版

印 张 12.25

印 次 2000 年 6 月第 1 次印刷

字 数 315 000

定 价 12.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究



内 容 提 要

作者曾以本书的内容作为大学高年级选修课及研究生学位基础课在复旦大学连续讲授过多次,取得良好的教学效果,讲稿也经过了不断的补充和修改,本书即是在此基础上定稿的。本书可帮助从事应用偏微分方程学习、研究与教学的教师、研究生、高年级大学生及其他领域学者熟练掌握经典物理学中一些重要的基本方程,了解其来龙去脉及推导过程,理解国际上一些重要并常见的数学模型,从而更自觉地学习、运用它们,并会抓住一些有意义的问题开展研究工作。

本书上册已于1997年出版。下册共5章,从最基本的物理概念出发分别介绍了热弹性力学,粘弹性力学,气体分子运动论,狭义相对论和相对论流体力学,量子力学。本书对数学工作者掌握物理概念可起到桥梁作用。

责任编辑	郭思旭
封面设计	杨立新
责任绘图	尹文军
版式设计	蔡志杰
责任校对	郭思旭
责任印制	杨明

目 录

第六章 热弹性力学	(1)
§1. 引 言	(1)
§2. 能量守恒定律和熵不等式	(2)
2.1. 能量守恒定律	(2)
2.2. 熵不等式	(9)
§3. 热弹性力学的本构关系	(11)
3.1. 本构关系 自由能	(11)
3.2. 热传导的方向性	(15)
3.3. 线性热弹性	(16)
§4. 热弹性动力学方程组及其数学结构	(22)
4.1. 线性热弹性动力学方程组	(22)
4.2. 非线性热弹性动力学方程组	(27)
4.3. 一维非线性热弹性动力学方程组	(30)
§5. 加速度波的传播	(36)
习题	(43)
参考文献	(46)
第七章 粘弹性力学	(48)
§1. 引 言	(48)
1.1. 粘弹性材料	(48)
1.2. 简单的粘弹性单元	(50)
§2. 粘弹性材料的本构方程和耗散不等式	(54)
2.1. 单积分形式的本构方程	(54)
2.2. 耗散不等式及其推论	(62)
2.3. 线性粘弹性本构方程	(72)

§3. 粘弹性力学方程组及其定解问题	(85)
3.1. 线性粘弹性动力学方程组	(85)
3.2. 非线性粘弹性动力学方程组	(93)
3.3. 一维非线性粘弹性动力学方程	(97)
§4. 核的奇性与线性波的传播	(100)
§5. 加速度波的传播	(112)
习题	(118)
参考文献	(121)
第八章 气体分子运动论	(123)
§1. 引言	(123)
§2. 玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程	(124)
2.1. 分布函数	(124)
2.2. 玻尔兹曼方程	(127)
2.3. 二体碰撞	(130)
2.4. 碰撞项 J 的决定	(138)
§3. 稀疏气体的平衡态	(142)
3.1. 玻尔兹曼 H 定理	(142)
3.2. 麦克斯韦 - 玻尔兹曼分布	(145)
§4. 守恒定律	(151)
§5. 零阶近似	(159)
§6. 一阶近似	(162)
6.1. 恰普曼 - 恩斯科格 (Chapman-Enskog)	
展开	(162)
6.2. 积分方程的可解性	(168)
6.3. 粘性系数和导热系数	(170)
§7. 伏拉索夫 (Vlasov) 方程及耦合方程组	(177)
7.1. 伏拉索夫方程	(177)
7.2. 伏拉索夫 - 泊松 (Vlasov-Poisson) 方程组	(178)
7.3. 伏拉索夫 - 麦克斯韦 (Vlasov-Maxwell)	

方程组	(179)
7.4. 伏拉索夫耦合方程组的数学结构及其定解 问题	(185)
习题	(192)
参考文献	(194)
第九章 狭义相对论和相对论流体力学	(196)
§1. 引 言	(196)
1.1. 相对性原理与伽利略 (Galileo Galilei) 变换	(196)
1.2. 麦克斯韦电磁场理论与伽利略相对性原理 ..	(198)
§2. 狭义相对论的基本原理 洛伦兹变换	(200)
2.1. 狭义相对论的基本假设	(200)
2.2. 洛伦兹变换	(201)
§3. 狭义相对论的时空观	(211)
3.1. 同时的相对性	(211)
3.2. 运动时间的膨胀	(216)
3.3. 杆长沿运动方向的收缩	(217)
3.4. 闵可夫斯基 (H. Minkowski) 四维时空	(219)
3.5. 任何传输速度均不能超过真空中的光速	(223)
§4. 相对论动力学	(223)
4.1. 闵可夫斯基四维时空中的张量	(224)
4.2. 四维速度与四维能量 - 动量向量	(227)
4.3. 动量与能量守恒定律	(231)
§5. 相对论流体力学	(235)
5.1. 能量 - 动量张量	(236)
5.2. 守恒律方程组	(239)
5.3. 简化的状态方程	(245)
§6. 相对论流体力学方程组的数学结构	(247)
6.1. 熵方程的另一种形式	(247)
6.2. 相对论流体力学方程组的数学结构	(248)

6.3. 一维相对论流体力学方程组	(255)
§7. 相对论磁流体力学方程组	(261)
7.1. 麦克斯韦方程组的洛伦兹不变性	(261)
7.2. 电磁场的能量 - 动量张量	(267)
7.3. 理想磁流体的能量 - 动量张量	(268)
7.4. 相对论理想磁流体力学方程组	(271)
习题	(277)
参考文献	(280)
第十章 量子力学	(283)
§1. 量子力学的建立	(283)
1.1. 黑体辐射和普朗克 (M. Planck) 的量子论 ...	(284)
1.2. 光电效应和爱因斯坦的光量子说	(286)
1.3. 原子光谱和玻尔 (N. Bohr) 的氢原子模型 .	(288)
1.4. 德布罗意 (de Broglie) 的物质波假设	(291)
1.5. 量子力学的建立	(292)
§2. 薛定谔方程与波函数	(293)
2.1. 薛定谔方程	(294)
2.2. 波函数的意义	(297)
2.3. 薛定谔方程的数学结构	(303)
2.4. 定态的薛定谔方程	(308)
§3. 量子力学基本原理简介	(317)
3.1. 有关量子力学原理的基本假设	(317)
3.2. 算子的对易关系	(320)
3.3. 测不准关系	(322)
§4. 相对论量子力学与狄拉克 (Dirac) 方程	(324)
4.1. 克莱因 - 高登 (Klein-Gordon) 方程	(324)
4.2. 电子自旋	(326)
4.3. 狄拉克方程	(330)
4.4. 自由电子的平面波解	(340)

4.5. 狄拉克方程组的数学结构	(345)
4.6. 狄拉克方程组的洛伦兹不变性	(350)
习题	(358)
参考文献	(362)
附录三 闵可夫斯基四维时空中的张量	(364)
1. 闵可夫斯基四维时空与洛伦兹变换	(364)
2. 闵可夫斯基四维时空中的张量	(367)
3. 张量的计算	(370)
4. 张量的协变导数	(371)
索引	(373)

第六章 热弹性力学

§1. 引言

在第五章中，我们仅讨论了弹性体在机械荷载作用下产生的变形和应力，而没有考虑温度变化所产生的影响。其实，弹性体内温度的变化会引起附加的应变和应力。在本章中，我们要着重讨论温度变化对弹性体变形产生的影响，即讨论热弹性体的变形及其内部温度分布所遵从的规律。

什么是热弹性体？热弹性体指具有下述特征的物体：原先处在自然状态（内部既无变形也无温度梯度）的物体，受到机械荷载及热环境的作用所发生的变形和温度场的变化，在机械荷载和热环境撤消后会立即消失，使物体恢复到原来的自然状态，既不下永久变形也无温度梯度。

要得出热弹性体的变形和温度分布的规律，即建立热弹性力学的数学模型——热弹性力学方程组，如同第五章对弹性体已作过的那样，必须给出相应的守恒律方程组及本构关系。由于质量守恒定律和动量守恒定律与弹性体的温度变化无关，所以第五章导出的这两个守恒定律对热弹性体仍然成立。但由于对热弹性体的讨论要考虑温度的变化，热弹性体不同部分之间有热量的传递，除上述两个守恒定律外，还应建立相应的能量守恒定律。此外，从热力学的观点看，热的传导是一个不可逆的过程，仅仅依靠能量守恒定律还不足以判断一个过程能否进行，还必须建立相应的熵不等式。同时，在弹性力学的本构关系中，有关的量表示为变形梯度张量 F 的函数；而在热弹性力学中，由于要考虑由温

度及温度梯度引起的变形及热传导现象、在相应的本构关系中，有关的量就应该同时表示为变形梯度张量、绝对温度及温度梯度的函数。

在本章中，我们将沿用第五章中的有关记号。

§2. 能量守恒定律和熵不等式

2.1. 能量守恒定律

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 为热弹性体的参考构形，即热弹性体变形前（设为时刻 $t = 0$ ）在空间占据的区域。在此区域中的点以 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 表示。到时刻 $t (> 0)$ ，设热弹性体所占的区域由 Ω 变为 Ω_t 。这个变形由

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x})$$

描述，其中 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega_t$ 。

对任意给定的区域 $G_t \subset \Omega_t$ ，我们来考察 G_t 中总能量的变化情况。对弹性体而言，总能量是动能和应变能之和。而对热弹性体，由于要考察由于温度变化引起的不同部分之间热量的传递，应以内能代替应变能。这样， G_t 中的总能量应为总动能与总内能之和。当然，这里的内能既包括热力学内能也包含应变能。

G_t 中的总动能为

$$\int_{G_t} \frac{1}{2} \rho |\boldsymbol{v}|^2 dy.$$

其中 ρ 为物体的质量密度， \boldsymbol{v} 为速度向量。又设热弹性体单位质量的内能为 e ，则 G_t 中总内能为

$$\int_{G_t} \rho e dy.$$

由能量守恒定律, G_t 中总能量的变化率应等于单位时间内 G_t 中体积力和 G_t 的边界 S_t 上的应力所作的功、 G_t 中热源产生的热量以及由 S_t 流入 G_t 中的热量这四部分之和.

设体积力密度, 即单位质量的体积力为 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则单位时间内体积力作的功为

$$\int_{G_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dy.$$

此外, Ω_t 中 G_t 以外的部分作用在 G_t 的边界 S_t 上的应力为 $\mathbf{T}\boldsymbol{\nu}$, 其中 \mathbf{T} 为柯西应力张量 (见第五章 §3.5), 而 $\boldsymbol{\nu}$ 为 S_t 上的单位外法线向量. 这样, 单位时间内 S_t 上应力作的功为

$$\int_{S_t} (\mathbf{T}\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{v} dS_t.$$

设热弹性体的热源密度, 即单位时间内单位质量所产生的热量为 γ , 则单位时间内 G_t 中热源产生的热量为

$$\int_{G_t} \rho \gamma dy.$$

另设 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ 为热流密度向量: 它的方向为热流即热传导的方向, 而它的模长则表示单位时间内通过垂直于热流方向的单位面积的热量. 这样, 对 S_t 上的任意面积微元 dS_t , 单位时间内沿法向量 $\boldsymbol{\nu}$ 的方向流过 dS_t 的热量由

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_t$$

给出. 因此, 单位时间内通过 S_t 流入 G_t 的热量为

$$-\int_{S_t} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_t.$$

综合以上诸式, 由能量守恒定律就得到

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_{G_t} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 dy + \int_{G_t} \rho e dy \right) \\ &= \int_{S_t} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} dS_t + \int_{G_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dy \\ & \quad + \int_{G_t} \rho \gamma dy - \int_{S_t} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

利用第五章引理 3.1, 有

$$\frac{d}{dt} \int_{G_t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \rho e \right) dy = \int_{G_t} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) dy,$$

其中 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_y)$, 而 $\nabla_y = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right)$. 于是,

(2.1) 式可改写为

$$\begin{aligned} & \int_{G_t} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) dy \\ &= \int_{S_t} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} dS_t + \int_{G_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dy \\ & \quad + \int_{G_t} \rho \gamma dy - \int_{S_t} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_t. \end{aligned} \quad (2.2)$$

这就是在空间描述下 (见第五章 §1) 能量守恒定律的积分形式.

为了得到 (2.2) 的微分形式, 和第五章中类似, 要将其右端的曲面积分化为该曲面所围区域中的体积分. 设所讨论的被积函数是光滑的, 由格林公式有

$$\int_{S_t} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} dS_t = \int_{G_t} \operatorname{div}_y (\mathbf{T}\mathbf{v}) dy, \quad (2.3)$$

$$\int_{S_t} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} dS_t = \int_{G_t} \operatorname{div}_y \mathbf{q} dy, \quad (2.4)$$

其中 div_y 表示关于 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ 的散度. 在得到 (2.3) 式的过程中, 我们还利用了柯西应力张量 \mathbf{T} 的对称性 (见第五章定理 3.2).

利用 (2.3) 和 (2.4) 式, 由 (2.2) 式就得到

$$\begin{aligned} & \int_{G_t} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) dy \\ &= \int_{G_t} (\operatorname{div}_y(\mathbf{T}\mathbf{v}) - \operatorname{div}_y \mathbf{q} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho \gamma) dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

因为 (2.5) 式对一切 $G_t \subset \Omega_t$ 均成立, 所以有

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) = \operatorname{div}_y(\mathbf{T}\mathbf{v}) - \operatorname{div}_y \mathbf{q} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \rho \gamma. \quad (2.6)$$

这就是在空间描述下能量守恒定律的微分形式.

显然有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

及

$$\operatorname{div}_y(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \operatorname{div}_y \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j}, \quad (2.7)$$

其中 t_{ij} 为 \mathbf{T} 的分量, 而 $\operatorname{div}_y \mathbf{T} = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial t_{ij}}{\partial y_j} \right)$ 为一向量 (见附录一). 在得到 (2.7) 式时, 我们再一次利用了 \mathbf{T} 的对称性. 这样, 利用第五章得到的动量守恒定律的微分形式 (见第五章 (3.27) 式)

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{div}_y \mathbf{T} - \rho \mathbf{b} = 0, \quad (2.8)$$

(2.6) 又可改写为如下较简单的形式:

$$\rho \frac{de}{dt} = \sum_{i,j=1}^3 t_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \operatorname{div}_y \mathbf{q} + \rho \gamma. \quad (2.9)$$

这是在空间描述下能量守恒定律微分形式的另一种表示方式.

如同在弹性力学中那样, 在热弹性力学中最常用的也是上述诸方程在物质描述下 (见第五章 §1) 的形式. 设参考构形中的区域 $G_0 \subset \Omega$ 对应于 $G_t \subset \Omega_t$. 为了得到在物质描述下的能量守恒方程, 我们要将 (2.2) 式中在 G_t 上关于变量 (y_1, y_2, y_3) 的体积分化为在 G_0 上关于变量 (x_1, x_2, x_3) 的体积分, 并将在 S_t 上的曲面积分化为在 G_0 的边界 S_0 上的曲面积分. 对于前者, 只要利用通常的积分变量代换, 并注意

$$\rho J = \rho_0 \quad (2.10)$$

(见第五章 (3.4) 式) 即可做到, 其中 $J = \det \mathbf{F}$, 且 $\mathbf{F} = (f_{ij})$, $f_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, 而 ρ_0 则表示热弹性体变形前的质量密度 (仅依赖于 x , 而与 t 无关). 例如

$$\begin{aligned} & \int_{G_t} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) dy \\ &= \int_{G_0} \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) J dx \\ &= \int_{G_0} \rho_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + e \right) dx \\ &= \int_{G_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_0 e + \frac{1}{2} \rho_0 |\mathbf{v}|^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

类似地, 有

$$\int_{G_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dy = \int_{G_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx, \quad (2.12)$$

$$\int_{G_t} \rho \gamma dy = \int_{G_0} \rho_0 \gamma dx. \quad (2.13)$$

现考察 (2.2) 式中在 S_t 上的曲面积分的相应变化. 注意到

$$\mathbf{v} dS_t = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n} dS_0. \quad (2.14)$$