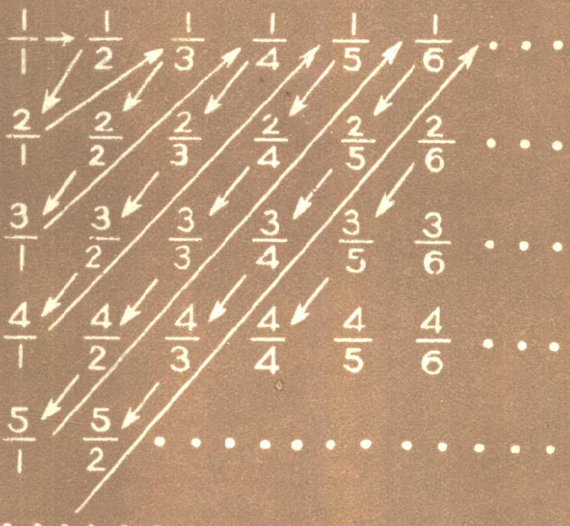
集合与数

张鸿顺 编著



科学出版社

集 合 与 数

张鸿顺 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书系统讲述有关集合论和数系的基本概念、基本理论和基本方法，以集合论为基础，逐步建立自然数、有理数、实数和复数系统，以及相应的运算法则. 本书内容丰富、论述严谨、深入浅出、通俗易懂. 本书包括相当数量的习题，书末附有习题解答.

本书是中学数学教师业务进修教材之一；也可供师范院校有关专业的教师和学生参考；并可供中学生数学爱好者阅读.

集 合 与 数

张鸿顺 编著

责任编辑 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 8 月第 一 版　　开本：787×1092 1/32

1982 年 8 月第一次印刷　　印张：6 3/8

印数：0001—28,700　　字数：144,000

统一书号：13031·1953

本社书号：2653·13—1

定价： 0.80 元

编者的话

本书的第一稿于1979年在北京电视台初等代数专题讲座中系统地讲授之后，许多同志敦促作者早日编辑成书，以满足广大读者的需要，并提出了许多宝贵的具体的建议.

在第二稿中，力图对自然数、有理数、实数以及复数等知识，从理论上给以严谨的阐述，指明学习、研究和讲授它们的一些方法，并提出一些与它们有关的问题以激发读者进一步学习数学的兴趣. 但是，由于作者水平有限，上述的想法很可能未能完满地体现出来，甚至难免出现一些缺点和错误，欢迎读者批评指正.

本书第三、四、五章中的附录，是作者本人对有关教材、教法的一些粗浅看法，仅供参考.

杨大淳、刘嘉琨、刘培娜等同志对本书的第一稿提出了许多改进意见，杨大淳同志对本书的第二稿又作了详细的审阅和修改，最后又由北京师范大学钟善基同志作了细致的审查.

在此谨向以上各位同志，特别是杨大淳同志、钟善基同志致以深切的谢意.

张鸿顺

81.2.25

目　　录

第一章　集合 …… 1

§1　集合的概念 …… 1

§2　集合的包含与相等 …… 3

习题一 …… 5

§3　集合的运算 …… 7

§4　集合的运算律 …… 11

习题二 …… 14

§5　一一对应与集合的等价 …… 16

§6　有穷集与无穷集 …… 18

习题三 …… 23

§7　可数集 …… 24

§8　集合上的运算 …… 27

习题四 …… 29

第二章　自然数 …… 31

一、基数理论 …… 31

§1　自然数的概念 …… 31

§2　自然数大小的比较 …… 32

§3　自然数的运算 …… 34

习题一 …… 37

二、序数理论 …… 38

§4　自然数的概念 …… 38

§5　自然数的运算 …… 39

§6　自然数的大小比较 …… 44

§7　数"0" …… 49

习题二 …… 50

第三章 有理数…………………………………………… 51
一、分数……………………………………………… 51
§1 分数的概念及其大小比较 ………………………… 51
§2 分数的运算 …………………………………… 55
§3 数集扩充原则 ………………………………… 61
习题一 …………………………………………… 64
§4 分数与小数的关系 …………………………… 64
习题二 …………………………………………… 70
二、有理数……………………………………………… 70
§5 有理数的概念 ………………………………… 70
§6 有理数的大小比较 …………………………… 72
§7 有理数的运算 ………………………………… 74
习题三 …………………………………………… 85
§8 有理数集的性质 ……………………………… 87
习题四 …………………………………………… 89
附录一 …………………………………………… 90
第四章 实数…………………………………………… 97
§1 无理数的引入 ………………………………… 97
§2 实数的概念及其大小比较 ……………………… 103
§3 实数与数轴……………………………………… 111
习题一 …………………………………………… 112
§4 实数的加法与减法 …………………………… 113
§5 实数的乘法与除法 …………………………… 116
§6 实数的开方 …………………………………… 118
习题二 …………………………………………… 121
§7 数环与数体 …………………………………… 122
§8 实数集的性质 ………………………………… 124
习题三 …………………………………………… 126
§9 代数数与超越数 ……………………………… 127
习题四 …………………………………………… 134

附录二 …………………………………………………… 134
第五章 复数…………………………………………………… 136
§1 复数的概念 …………………………………………… 137
§2 复数的运算 …………………………………………… 137
§3 复数的代数形式 ……………………………………… 140
习题一 …………………………………………………… 143
§4 复数的极坐标形式 …………………………………… 144
§5 复数的乘方与开方 …………………………………… 147
§6 复数运算的几何解释 ………………………………… 153
§7 复数的指数形式 ……………………………………… 163
习题二 …………………………………………………… 166
附录三 …………………………………………………… 167
习题解答…………………………………………………… 174

第一章 集　合

§1 集合的概念

所谓集合(或称集),是由许多“个体”组成的一个“整体”,或者说是由某一种事物组成的一个“类”. 通常把集合作为原始概念(基本概念),不再用另外的概念来规定它的定义. 在中学教科书里是这样描述集合的: “把具有某种属性的一些对象看作一个整体就构成一个集合”. 例如,一个班里的学生、男生、女生等等都分别构成集合;又如在一个教室里的课桌、课椅、电灯等等也都分别构成集合. 对于集合,一般用大写字母 A, B, C, $\cdots$ 表示. 组成某一集合的每一个对象,都叫做这个集合的元素(简称元). 集合的元素一般用小写字母 a, b, c, $\cdots$ 表示.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,并用 $a\in A$ 表示;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,并用 $a\notin A$ (或 $a\bar{\in} A$) 表示. 比如 A 是由 p, q, r 三个字母组成的集合,就有 $p\in A$, $m\notin A$.

值得注意的是,集合中的元素是确定的,即对于任何对象,可以判断出它是否属于这个集合. 比如“儿童商店里的玩具”能够构成一个集合,但是“好玩的玩具”则不能构成一个集合,因为“好玩”没有确定的标准,无法确定某件玩具是否属于所说的“集合”.

表示集合的方法通常有两种.

把集合中所有的元素一一列出,写在花括号内,来表示这个集合;这种表示集合的方法叫做列举法.

例如，由 p, q, r 三个字母组成的集合为 $\{p, q, r\}$；

小于 4 的自然数的集合为 $\{1, 2, 3\}$；

一年中有 30 天的月份所组成的集合为 {4 月，6 月，9 月，11 月}；

与一个三角形三边等距离的点的集合为 $\{I\}$（I 是这个三角形的内心）。

这里要注意，$\{a\}$ 与 a 不同，$\{a\}$ 表示只含有一个元素 a 的集合，而 a 是集合 $\{a\}$ 的元素，二者的关系是 $a \in \{a\}$。

还要注意，我们这里只考虑由不同的元素所组成的集合，因此，一个集合里的元素应当是彼此不同的，而且不考虑这些元素的书写次序。例如，$\{p,q,r\}$，$\{p,p,q,r\}$，$\{r,p,q\}$等都表示由 p,q,r 三个元素组成的同一个集合。

有些集合不能用列举法表示。例如，对于小于 4 的正数的集合，就不能把它的元素一一列举出来。对于这样的集合，我们可以采用集合的第二种表示法。

把对于集合中元素的公共属性或特性的描述写在花括号内来表示这个集合；这种表示集合的方法叫做**描述法**。

例如，所有等腰三角形的集合用{等腰三角形}表示；小于 4 的正数的集合用{小于 4 的正数}表示。

如果用 x 表示集合 A 中的任意元素，而用 $P(x)$ 来描述 x 的性质或特性，那么集合 A 可以表示为

$$\{x|P(x)\} \text{ 或 } \{x:P(x)\}.$$

这样，小于 4 的正数的集合可以表示为：$\{x:0<x<4\}$ 或 $\{x|0<x<4\}$；

在平面直角坐标系上，所有与原点距离等于 5 的点的集合为 $\{(x,y):x^2+y^2=25\}$。

在数学中对于一些数集常用以下的符号来表示，它们是

N：自然数集；

Z: 整数集(也有用“J”表示的);

Q: 有理数集;

R: 实数集;

C: 复数集.

§2 集合的包含与相等

定义 1 如果集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素，就把集合 A 叫做集合 B 的子集,集合 B 叫做集合 A 的扩集,记作

$$A\subseteq B \quad 或 \quad B\supseteq A.$$

A 是 B 的子集也说成 A 包含于 B 或 B 包含 A.

由定义 1 显然可以证明 $A\subseteq A$. 也就是说，任何集合都是它自己的子集.

定义 2 如果 $A\subseteq B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，A 就叫做 B 的真子集，B 叫做 A 的真扩集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

如果某班一次考试成绩肯定有及格的,那么就有

$$\{及格的学生\}\subseteq\{某班的学生\};$$

$$\{不及格的学生\}\subset\{某班的学生\}.$$

也可能根本不存在不及格的，这时集合{不及格的学生}不包含任何元素.

定义 3 不包含任何元素的集合叫做空集，用符号 $\varnothing$ 表示.

在上述的问题中，有可能 {不及格的学生} $=\varnothing$. 那么{不及格的学生}$\subset$\{甲班的学生\}是否还成立呢?

定理 空集是任一集合的子集;即

$$\varnothing\subseteq A.$$

证明：因为不属于 A 的元素一定不属于 $\varnothing$，所以 $\varnothing$ 是 A 的子集.

例 1. 设 $A=\{1,2,3\}$，试写出 A 的所有的子集.

解：A 的子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{2,3\}$，$\{1,3\}$，$\{1,2,3\}$.

由例 1 可以看出：由 3 个元素组成的集合，它的子集共有 8（即 2^3）个.

例 2. 试证明：由 n 个元素组成的集合，它的子集共有 2^n 个.

证明：空集是它的子集，可以看成是有 C_n^0 个这样的子集；由一个元素组成的子集有 C_n^1 个，由 2 个元素组成的子集有 C_n^2 个，…，所以所有子集的个数为

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n.$$

而

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n.$$

所以由 n 个元素组成的集合的子集共有 2^n 个.

定义 4 设有两个集合 A 和 B，如果 A 包含 B，且 B 包含 A，就说 A 与 B 相等.

显然，如果两个集合的元素完全相同，那么这两个集合相等.

容易证明集合的包含与相等的关系有下列的传递性质：

（1）如果 $A=B$，$B=C$，那么 $A=C$；

（2）如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$；

（3）如果 $A\subset B$，$B=C$，那么 $A\subset C$.

有时，在所讨论的问题中，一切集合都是某一特定集合的子集. 例如，在研究平面图形性质时，所有平面图形都是平面上所有点的集合这个特定集合的子集.

定义 5 在所讨论的问题中，如果一切集合都是某一特定集合的子集，就把这个特定的集合叫做全集，并用符号 I 表示.

我们通常用维恩（Venn）图来表示集合之间的关系，就是用一个矩形表示全集 I，矩形中的点表示元素，这样，每一个集合就用矩形中的一个区域(通常用圆)来表示．例如，图 1-1 表示集合 A；图 1-2 表示集合 B 是集合 A 的真子集，即 $A \supset B$．

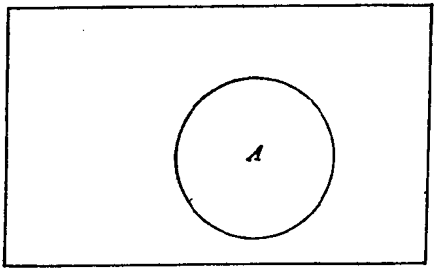


图 1-1

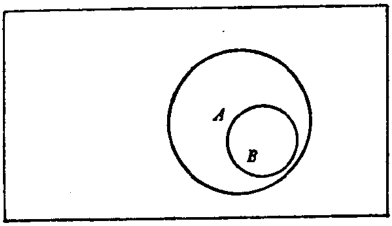


图 1-2

习 题 一

1. 下列各题中哪些是集合，哪些不是集合？
   (1) 某路公共汽车的所有的车站；
   (2) 某城市里的较大的商店；
   (3) 我国的直辖市；
   (4) 高个子的人；
   (5) 某学校的数学教师．
2. 用列表法表示下列集合：
   (1) $A=\{x \mid x$ 为整数且 $5<x<10\}$；

(2) $B=\{$小于 30 的 3 的正整倍数$\}$;

(3) $C=\{$在 0 与 1 之间分母为 2 的既约分数$\}$.

3.用描述法表示下列集合:

(1) 所有大于 1 的奇数的集合;

(2) 所有 5 的正整倍数的集合;

(3) 所有横、纵坐标乘积等于 6 的点的集合;

(4) 在闭区间 $[0, 1]$ 上所有实数的集合.

4.已知 $A=\{x|x$ 为大于 5 的整数$\}$,下列命题哪些正确,哪些不正确?

(1) $10\in A$;　(2) $5\in A$;　(3) $7.2\in A$;

(4) $\{10\}\in A$;　(5) $\{1\}\in A$;　(6) $\{12\}\subset A$;

(7) $\varnothing\in A$;　(8) $1\notin A$.

5.已知 $A=\{x|x$ 为小于 8 的正整数$\}$,

$B=\{x|x$ 为大于 2 的整数$\}$,

$C=\{x|x$ 为所有英文字母$\}$,

$D=\{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\}$,

求出分别满足下列条件的所有的元素 y:

(1) $y\in A$ 同时 $y\in B$;

(2) $y\in A$ 同时 $y\in D$;

(3) $y\in A$ 但 $y\notin D$;

(4) $y\in C$ 同时 $y\in D$;

(5) $y\notin C$ 但 $y\in D$;

(6) $y\in A$ 同时 $y\in D$ 但 $y\notin B$.

6.在下列各题的____上，填以适当的符号 ($\subseteq$, $\subset$, $\in$, $\notin$)，使命题正确:

(1) x ____$\{$所有英文字母$\}$;

(2) $\{x\}$____$\{$所有英文字母$\}$;

(3) 3____$\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$;

(4) $\{3,4\}$____$\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$;

(5) $\{$某校教令超过 5 年的教师$\}$____$\{$该校的教师$\}$.

7.写出 $A=\{a,b,c,d\}$的所有的子集，并计算 $B=\{a,b,c,d,e,f\}$

的所有子集的个数.

8.证明：如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$.

9.证明下列集合是相等的：

(1) {小于 10 的自然数}与{一位数的自然数}；

(2) $\{3,6,9,12\}$ 与 $\{x|x$ 是小于 15 且能被 3 整除的正数$\}$；

(3) {等腰三角形}与{两内角相等的三角形}；

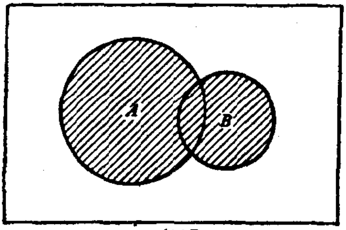
(4) $\{x|x\in R$ 且 $x^2+x+2=0\}$ 与 ϕ.

§3 集合的运算

定义 1 设有两个集合 A 与 B，由 A 与 B 所有的元素组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集(也称和集)，记作 $A\cup B$.

A，B 所有的元素，就是属于 A 或者属于 B(至少属于二者之一，也可能同时属于二者)的元素．因此有

$$\begin{aligned}&A\cup B\\&=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}\\&=\{x|x \text{ 至少属于 } A,\ B \text{ 中的一个}\}.\end{aligned}$$



$A\cup B$

图 1-3

图 1-3 阴影部分表示 $A\cup B$.

例 1. 设 $A=$ {某班的男学生}，$B=$ {某班的女学生}，那么 $A\cup B=$ {某班的学生}.

例 2. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4,5\}$. 那么

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}.$$

关于并集显然有以下性质:

(1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \varnothing = A$;

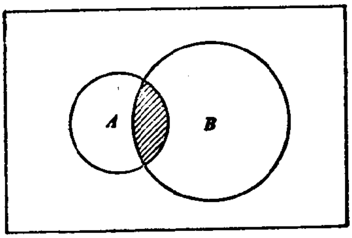
(3) $A \cup B \supseteq A$.

定义 2 由同时属于两集合 A 和 B 的所有元素组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$.

同时属于 A 和 B 两集合的元素,就是 A 和 B 的公共元素,它既属于 A 又属于 B,或者说属于 A 且属于 B. 这样就有

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

图 1-4 中阴影部分表示 $A \cap B$.



$A \cap B$

图 1-4

例 3. 在例 2 中,

$$A \cap B = \{2,3\}.$$

例 4. 在例 1 中,

$$A \cap B = \varnothing.$$

例 5. 设 $A = \{$等腰三角形$\}$, $B = \{$直角三角形$\}$, 那么,

$$A \cap B = \{\text{等腰直角三角形}\}.$$

例 6. 设 $A = \{x$ 轴$\}$, $B = \{y$ 轴$\}$,

那么

$$A \cup B = \{(x,y) \mid x = 0 \text{ 或 } y = 0\};$$

$$A \cap B = \{(x,y) \mid x = 0 \text{ 且 } y = 0\} = \{(0,0)\} = \{\text{原点}\}.$$

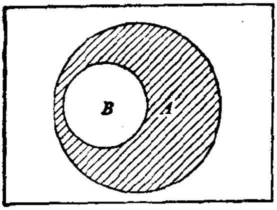
关于交集显然有以下性质:

$$(1)\ A\cap A=A;\ (2)\ A\cap\varnothing=\varnothing;$$

$$(3)\ A\cap B\subseteq A.$$

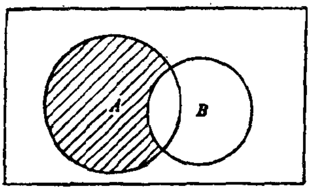
定义 3 由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的差集,记作 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A,\text{但}\ x\notin B\}.$$



$A\backslash B$

图 1-5



$A\backslash B$

图 1-6

图 1-5,图 1-6 中阴影部分表示 $A\backslash B$,其中图 1-5 是 $A\supset B$ 的情况,图 1-6 是 $A\not\supset B$ 的情况。

例 7. 在例 2 中,$A\backslash B=\{1\}$; $B\backslash A=\{4,5\}$.

例 8. 在例 1 中,$A\backslash B=A$; $B\backslash A=B$;

$$(A\cup B)\backslash B=A;\ (A\cup B)\backslash A=B.$$

例 9. 在例 5 中,$A\backslash B=\{$等腰但不是直角的三角形$\}$; $B\backslash A=\{$直角但不等腰的三角形$\}$.

关于差集有以下性质:

$$(1)\ A\backslash A=\varnothing;\ (2)\ A\backslash\varnothing=A;$$

$$(3)\ \varnothing\backslash A=\varnothing;\ (4)\ A\backslash B\subseteq A;$$

(5) 如果 $A\subseteq B$,那么 $A\backslash B=\varnothing$.

下面我们证明 (5).

由 $A\subseteq B$ 可知如果 $x\in A$,那么 $x\in B$,因而

$$A\backslash B=\varnothing.$$

定义 4 $I\backslash A$ 叫做 A 的补集(或余集)，记作 $\overline{A}$. 也就是说，由属于全集而不属于集合 A 的所有元素组成的集合叫做 A 的补集，即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in I \text{ 但 } x\notin A\}.$$

图 1-7 中阴影部分表示 $\overline{A}$.

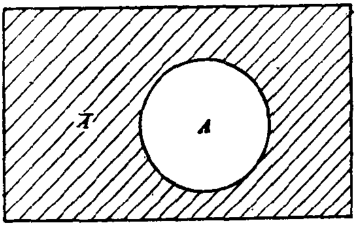


图 1-7

例 10. 如果 $I=\{$全班学生$\}$，$A=\{$全班男生$\}$，那么

$$\overline{A}=\{\text{全班女生}\}.$$

例 11. 如果 $I=N$，$A=\{$正偶数$\}$，那么

$$\overline{A}=\{\text{正奇数}\}.$$

例 12. 如果 $I=\{$多边形$\}$，$A=\{$等腰三角形$\}$，那么 $\overline{A}=\{$不等腰的三角形和不是三角形的多边形$\}$.

关于补集有以下性质:

(1) $A\cup\overline{A}=I$; (2) $A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(3) $\overline{I}=\varnothing$; (4) $\overline{\varnothing}=I$;

(5) $\overline{\overline{A}}=A$ ($\overline{\overline{A}}$ 为 $\overline{A}$ 的补集);

(6) 如果 $A\subseteq B$，那么 $\overline{A}\supseteq\overline{B}$.

下面我们证明 (6).

设 $x\in\overline{B}$，那么 $x\notin B$，这时如果 $x\in A$，由 $A\subseteq B$，必有 $x\in B$，与 $x\notin B$ 矛盾，所以 $x\notin A$，即 $x\in\overline{A}$. 所以 $\overline{A}\supseteq\overline{B}$.