

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

投影幾何習題集

X. A. APYCTAMOB 著

周凝瑞 尹積成合譯



龍門聯合書局

12 A 11
1961
中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



投 影 幾 何 習 題 集

X. A. 阿 魯 司 塔 莫 夫 著

周 凝 瑞 尹 積 成 合 譯

龍 門 聯 合 書 局

本書係根據蘇聯國立機械製造書籍出版社 (Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы) 出版的阿魯司塔莫夫 (X. A. Арустамов) 著 “投影幾何習題集” (Сборник задач по начертательной геометрии) 1952 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等工業學校教學參考書。

本書由哈爾濱工業大學周凝瑞、尹積成翻譯。

投 影 幾 何 習 題 集

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

X. A. Арустамов 著
周凝瑞 尹積成 合譯

★版權所有★

龍 門 聯 合 書 局 出 版
上海南京東路61號101室

新華書店華東總分店總經售
上海南京西路1號

新 光 明 記 印 刷 所 印 刷
上海康定路162號

1964年3月初版 印數 0001—5000 冊

定價 27,000

上海市書刊出版業營業許可證出 029 號

序

本習題書係供學生按照蘇聯高等教育部所批准之作爲機械製造專業高等技術工業學校之投影幾何教育提綱進行學習所用。

除作爲獨立解決之習題以及旨在介紹解題與投影圖作法而舉之典型例題外，本書每章內均有簡短的理論敘述，在若干章（一、二、四、十九）內並編有測驗題。

根據作者多年觀察同學學習的切身經驗，謹向初學投影幾何者建議下列學習步驟：

- 1) 根據蘇聯高等教育部所推薦的教科本研究有關章節的理論；
- 2) 閱讀本書所引之簡短理論，並答出測驗題；
- 3) 將本章內所解例題之作圖法按習題書原文再親自全部操作一遍；
- 4) 根據教師的指示或自己的選擇進行有系統的解題。

本習題書亦可供自修投影幾何及在函授學校學習者所用。

由於本書內編有大量習題，故在選擇練習題、測驗題、家庭作業或考試題的材料時極爲方便，因此亦特別爲初任教師者所需。

И. Г. 波波夫教授及以巴烏孟命名的莫斯科高等技術學校製圖教研室高級教師 А. В. 勞及莫夫對本書之編輯有寶貴的指示，此外 А. В. 勞及莫夫亦協助製圖，作者謹向他們致謝。

作者將以感激的心情接受今後對本書之所有批評與指正。

中央人民政府高等教育部推薦 高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容為基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：‘蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是真正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解決。’我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將陸續向全國推薦，作為現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認真地提出修正意見，作為該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

目 錄

第 一 編

第 一 章	正投影之基本概念	1
第 二 章	點	2
第 三 章	直線	8
第 四 章	在三投影面體系內之投影	12
第 五 章	直線與點的相互位置	24
第 六 章	直線的跡點	29
第 七 章	空間直線的相互位置	34
第 八 章	線段的長度及直線在投影面上的傾角	44
第 九 章	線段之割分成比率	56
第 十 章	夾角投影的幾種情況	58

第 二 編

第 十 一 章	平面	78
第 十 二 章	用跡線表示平面。平面內的直線與點	87
第 十 三 章	用跡線表示之平面的相交	123
第 十 四 章	直線與平面的相交	139
第 十 五 章	直線與平面的平行。平面的互相平行	160
第 十 六 章	直線與平面的垂直。平面的互相垂直	179

第 三 編

第 十 七 章	迴轉法。平行於投影面之移動	222
第 十 八 章	重合法。繞橫面平行線及縱面平行線的轉動	239
第 十 九 章	投影面的變換	260
第 二 十 章	距離的測定	274
第 二 十 一 章	角的測定	289

第 四 編

第 二 十 二 章	多面體的截斷面。多面體的展開	296
第 二 十 三 章	平面與曲面的相互位置	317
第 二 十 四 章	曲面的展開	356
第 二 十 五 章	直線與面的相交	364
第 二 十 六 章	面的相交	379

第 五 編

第 二 十 七 章	雜題(包括各章節)	405
-----------	-----------------	-----

第一編

第一章

正投影之基本概念

問題

取二平面作為正投影之投影平面，在其上寫出平面部位與分角——四分之一空間——之名稱及其符號(圖 1, 2)，並圓滿地回答下列各題。

1. 何謂投影軸?
2. 四個分角各限於二投影面之何部?*
3. 下列四個分角之分界係投影面之何部：1) 第一分角與第二分角之間；2) 第三分

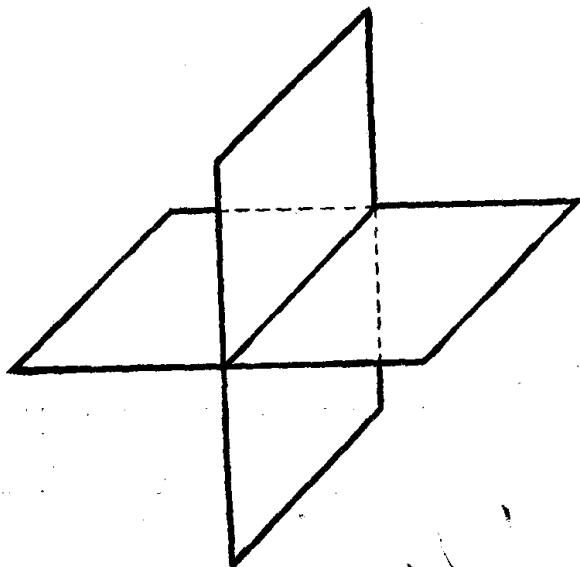


圖 1.

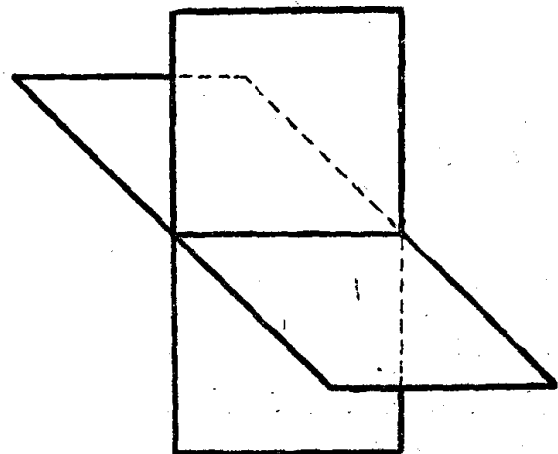


圖 2.

* 橫投影面(橫面)分為前部與後部，縱投影面(縱面)分為上部與下部(參閱圖 2)——譯者註。

- 角與第四分角之間；3) 第一分角與第四分角之間及4) 第二分角與第三分角之間？
4. 說出位於橫面之上、下及縱面之前、後各分角的名稱。
 5. 位於第一、第二、第三與第四分角內之任意點在投影面上佔何位置？
 6. 若點在：1) 第一與第四分角間；2) 第二與第三分角間；3) 第一與第二分角間及4) 第三與第四分角間，則點在何處？
 7. 若點在四個分角的公共交界線上，則點在何處？
 8. 何謂空間一點在任意平面上之正投影？
 9. 何謂點之橫面投影及縱面投影？
 10. 位於第一、第二、第三及第四分角內之任意點，其投影在二投影面之何部？
 11. 若點位於：1) 橫面的前部；2) 橫面的後部；3) 縱面的上部；4) 縱面的下部及5) 在投影軸上，則該點之投影在何處？
 12. 試述橫面及縱面上一切點之特徵。
 13. 若點之橫面投影在橫面之前部或橫面之後部，而其縱面投影在縱面之上部或縱面之下部，則該點將在何處？
 14. 何謂點之投影圖，如何由空間立體圖變為投影圖？
 15. 二投影面重合後，則此二平面之何部在投影軸之上，何部在投影軸之下？
 16. 若投影圖上點之橫面投影在投影軸之上或投影軸之下，而其縱面投影在投影軸之上或投影軸之下，則該點將在何處？

第 二 章

點

空間各點以大寫的拉丁字母 A, B, C, D 等等表示。

點之投影以對應的小寫字母 a, b, c, d 等等表示。為區別點的橫面投影與縱面投影起見，在後者之字母的右上角恆加一符號“'”。例如， A 點之橫面投影以 a 表示，而其縱面投影以 a' 表示。

同一點之二個投影——橫面投影及縱面投影——在投影軸之公共垂線上。

若在空間內

- 1) 點在第一分角內,
- 2) 點在第二分角內,
- 3) 點在第三分角內,
- 4) 點在第四分角內,

則在投影圖上*

點之橫面投影在投影軸之下,縱面投影在投影軸之上;

點之橫面投影及縱面投影均在投影軸之上;

點之橫面投影在投影軸之上,而其縱面投影在投影軸之下;

點之二投影——橫面投影及縱面投影——均在投影軸之下。

橫面上之各點,其縱面投影均在投影軸上。

縱面上之各點,其橫面投影均在投影軸上。

若點之二投影在投影軸上重合,則此點必在投影軸上。

點之橫面投影至投影軸之距離 y 等於該點至縱面之距離。

點之縱面投影至投影軸之距離 z 等於該點至橫面之距離。

若點在橫面之上,則其座標 z 為正;若點在橫面之下,則其座標 z 為負。

若點在縱面之前,則其座標 y 為正;若點在縱面之後,則其座標 y 為負。

問 題

圓滿地回答下列各題:

1. 如何表示空間一點?
2. 如何表示空間一點之投影?以何種符號區別此二投影?
3. 空間一點在投影圖上之二投影與投影軸成何關係?
4. 當從點之二投影作投影軸之垂線,而此二垂線重合時,則該投影圖有無意義?
5. 如何理解:《已知空間一點》?
6. 若點在第一、第二、第三、第四分角內時,則其投影在投影圖上何處?
7. 點在空間處於何種位置時,其橫面投影與縱面投影能在投影軸之外重合?
8. 如何根據投影圖上點之投影回復其空間位置?
9. 點之投影在投影圖上何處,若點在: 1) 橫面之前部; 2) 橫面之後部; 3) 縱面之上

* 反之言之,若投影圖上點的橫面投影在投影軸之下,而縱面投影在投影軸之上,則點必在第一分角內。若投影圖上點之二投影——橫面投影與縱面投影——均在投影軸之上,則點必在第二分角內;以此類推。上述關係(空間與投影圖之關係)不但在任何情形下均保持不變,且有互逆性(投影圖與空間之關係)。

部及4)縱面之下部。

10. 空間一點至橫面與縱面之距離以何種符號表示?

11. 空間一點至橫面與縱面之距離在投影圖上如何測定?

12. 在那些分角內,點之座標 z 為正,在那些分角內 z 為負?

13. 在那些分角內,點之座標 y 為正,在那些分角內 y 為負?

14. 點在第一、第二、第三及第四分角內時,其座標 y, z 之正負如何?

15. 投影圖上點之橫面投影決定何種座標(y 抑 z),又縱面投影決定何種座標?

16. 若座標 z 為正時,則如何在投影圖上截取相應的線段(投影軸之上抑下), z 為負時,則又如何截取;若座標 y 為正時,如何在投影圖上截取相應線段, y 為負時,則又應如何截取?

例 題

例 1. 第二分角內之任意點 A , 與橫面相距 32mm , 與縱面相距 18mm , 作此點之投影圖(圖 3)。

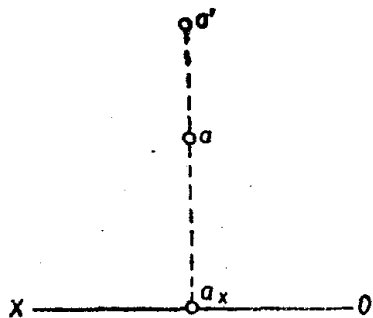


圖 3.

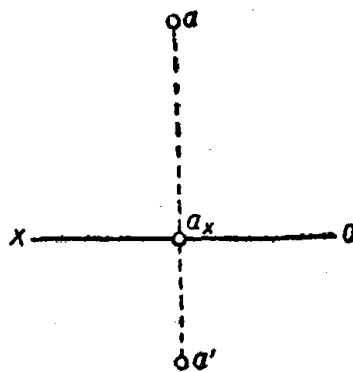


圖 4.

解 在投影軸上任取一點 a_x , 過此點作投影軸之垂線。所求點 A 之二投影(a, a')將在此垂線上, 並位於投影軸之上。為表示點與二投影面之已知距離, 應使點之橫面投影至投影軸之距離等於 18mm (點至縱面之距離), 點之縱面投影至投影軸之距離等於 32mm (點至橫面之距離)。現僅需在垂線上自 a_x 向上量取長 18mm 之線段, 即得點之橫面投影(a), 再向上量取長 32mm 之線段, 即得點之縱面投影(a')。

例 2. 作任意點 $A(-24, -13)$ 之投影圖(圖 4)。

解 因該點之座標(a, a')為負, 故點在縱面之後、橫面之下, 即在第三分角內。在投影軸上任取一點 a_x , 過此點作投影軸之垂線, 並在垂線上向上量取長 24mm 之線段 $a_x a(y)$

及向下量取長 13mm 之線段 $a_a a'(z)$ 。所得之投影必相當於此點在第三分角內之位置。

例 3. 已知位於第三分角內 A 點之橫面投影(a)，根據條件： $z=y+15\text{mm}$ (圖 5)，作此點之縱面投影(a')。

解 該點之縱面投影位於投影軸之下，同時又在通過已知橫面投影(a)且與投影軸垂直的直線上。點之橫面投影至投影軸的距離等於 A 點至縱面的距離(y)。因此，欲得點之縱面投影(a')，僅需過該點之橫面投影(a)作一直線垂直於投影軸，並在此垂線上自 a_a 點向下量取 $a_a a + 15\text{mm}$ 長之線段 $a_a a'$ 。

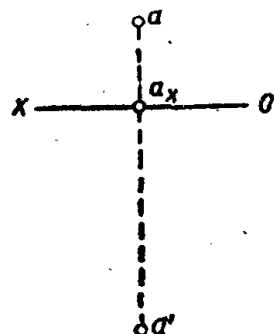


圖 5.

例 4. 已知點 $A(12, 20)$ ，求作 A 點的對稱點 B 的投影圖，若：

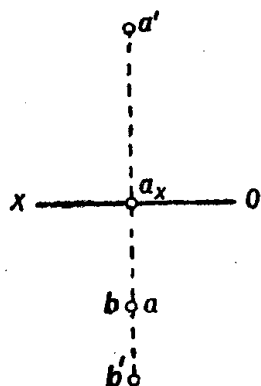


圖 6.

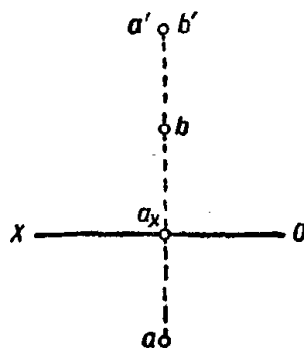


圖 7.

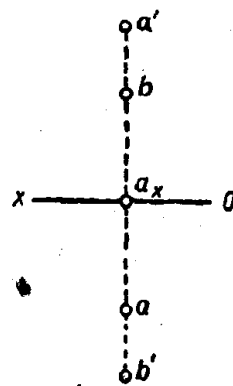


圖 8.

1) 以橫面為準(圖 6); 2) 以縱面為準(圖 7); 3) 以投影軸為準(圖 8)。

解 已知點(a, a')在第一分角內。

1) 若以橫面為準，則與該點對稱之點必在第四分角內，即 $B(12, -20)$ 。先作點(a, a')之投影圖；再在公垂線上向下量取 12mm 長之線段 $a_a b(y)$ 及 20mm 長之線段 $a_a b'(z)$ 。

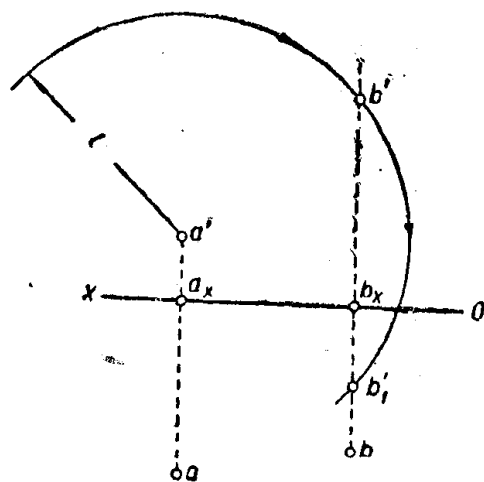


圖 9.

2) 若以縱面為準，則與該點對稱之點必在第二分角內，即 $B(-12, 20)$ 。與前相同，先作點(a, a')之投影圖，再在公垂線上向上量取 12mm 長之線段 $a_a b(y)$ 及 20mm 長之線段 $a_a b'(z)$ 。

3) 若以投影軸為準，則與該點對稱之點必在第三分角內，即 $B(-12, -20)$ 。與前相同，先作點(a, a')之投影圖，再在公垂線上向上量取 12mm 長之線段 $a_a b(y)$ ，向下量取 20mm 長之線段 $a_a b'(z)$ 。

例 5. 已知 A 點以及 B 點的橫面投影, 若此二點之縱面投影間的距離 l 為 25 mm , 試問 B 點應在第幾分角內(圖 9)?

解 首先必須求出 B 點的縱面投影(b')。因二點之縱面投影間的距離為 25 mm , 故 b' 點應在以 a' 點為圓心、 25 mm 之長為半徑所作之圓周上。同時, b' 點又應在通過 b 點而與投影軸正交之直線上。因此, b' 點在此垂線與圓周的交點上。 b' 與 b_1' 即為此二交點。 B 點可在第一或第四分角內。

在特殊情況下僅有一解(何時?), 或無解(何時?)。

習 題

1. 作 A 點在: 1) 第一分角內; 2) 第二分角內; 3) 第三分角內及 4) 第四分角內之投影, 並作其投影圖(圖 10—13)。

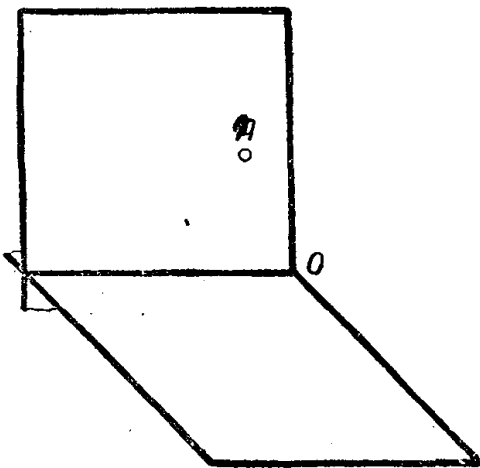


圖 10.

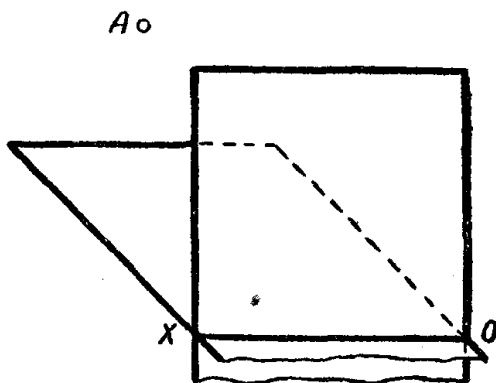


圖 11.

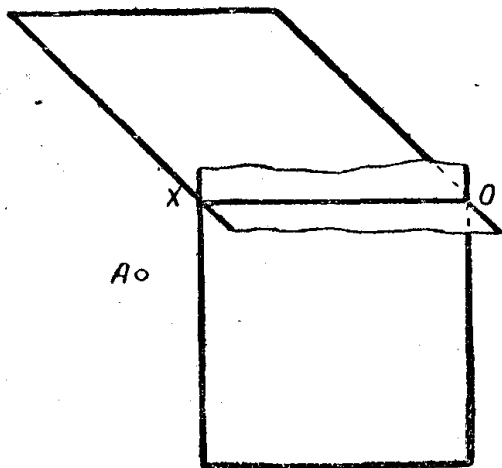


圖 12.

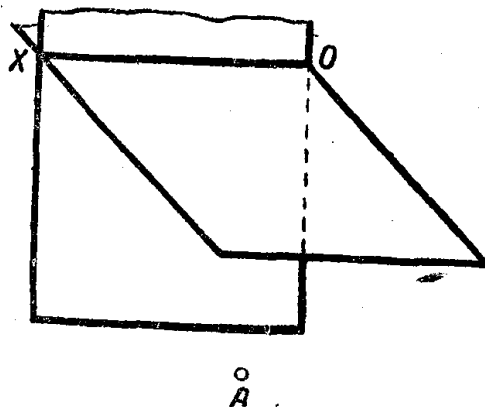


圖 13.

2. 作 A 點之投影及其投影圖: 1) 已知 $z=0$ (圖 10, 12); 2) 已知 $y=0$ (圖 11, 13)。

3. 由下列已知座標, 作任意點 A 的投影圖:

y	15	25	25	-25	-20	-30	30	0	-30	0
z	25	-40	-25	-15	35	30	0	-30	0	30

4. 已知 A 點投影之一及其座標間之關係 ($y=z+n$), 求作此點在所示分角內之投影圖 (圖 14—17)。

第一分角 $n=15$

x ————— 0

$\circ a$
圖 14.

第四分角 $n=20$

x ————— 0

$\circ a'$
圖 15.

$\circ a$

x ————— 0

第二分角 $n=10$

圖 16.

第三分角 $n=25$

x ————— 0

$\circ a$
圖 17.

$\circ a'$

x ————— 0

第一分角 $m=2$

圖 18.

第四分角 $m=1.5$

x ————— 0

$\circ a$
圖 19.

$\circ a'$

x ————— 0

第二分角 $m=1$

圖 20.

x ————— 0

第三分角 $m=\frac{3}{2}$

圖 21.

x ————— 0

$\circ a$

$\circ a'$

圖 22.

5. 已知 A 點投影之一及此點至二投影面的距離之比 ($\frac{z}{y}=m$), 求作此點在所示分角內之投影圖 (圖 18—21)。

6. 作與 A 點 $(-25, 30)$ 相對稱之點 B 的投影圖: 1) 以橫面為準; 2) 以縱面為準; 3) 以投影軸為準。

7. 已知 A 點以及 B 點之縱面投影, 若二者之橫面投影相距 25 mm , 試問 B 點在第幾分角內 (圖 22)?

第 三 章

直 線

若在空間內

- 1) 直線平行於橫面,
- 2) 直線平行於縱面,
- 3) 直線平行於投影軸,
- 4) 直線在垂直於投影軸之平面上(側面平行線),
- 5) 直線垂直於橫面(橫面投射線),
- 6) 直線垂直於縱面(縱面投射線)。

則在投影圖上*

直線之縱面投影與投影軸平行,而其橫面投影與投影軸成任意角;

直線之橫面投影與投影軸平行,而其縱面投影與投影軸成任意角;

直線之二投影——橫面投影及縱面投影——平行於投影軸;

直線之二投影——橫面投影及縱面投影——同在一垂直於投影軸之直線上;

直線之橫面投影為點,縱面投影係一垂直於投影軸之直線;

直線之縱面投影為點,橫面投影係一垂直於投影軸之直線。

習 題

8. 作直線 AB 之投影及其投影圖,若該線:

- 1) 平行於橫面(圖 23);
- 2) 平行於縱面(圖 24);
- 3) 平行於投影軸(圖 25);
- 4) 垂直於橫面(圖 26);
- 5) 垂直於縱面(圖 27)。

9. 根據所示線段 AB 之投影圖,作填充題:

1. 線段 AB 在(?)分角內,其端點 A 在(?)投影面之(?)部(圖 28)。
2. 線段 AB 在(?)分角內,其端點 A 在(?) (圖 29)。

* 參閱第三頁之註解。

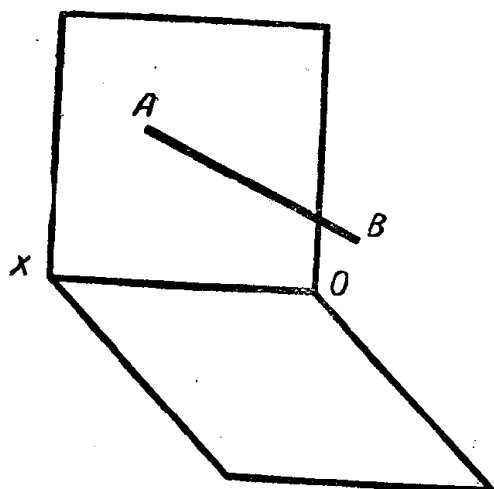


圖 23.

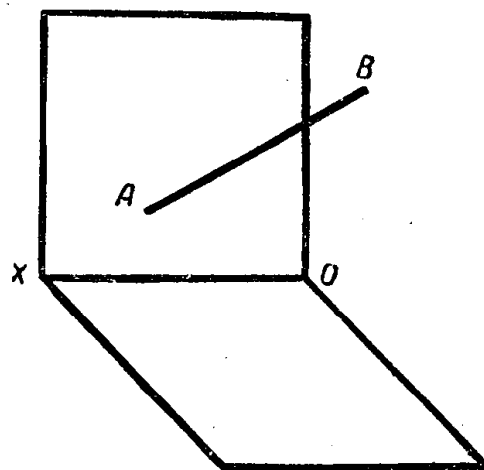


圖 24.

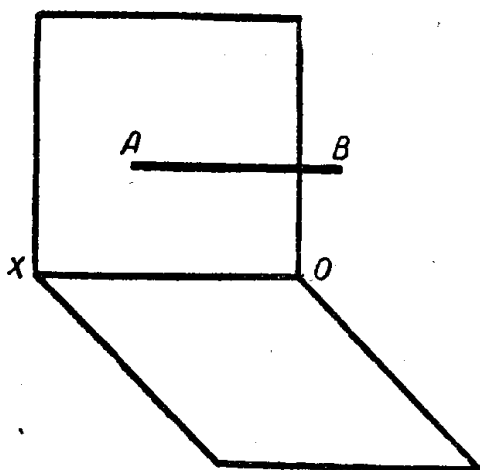


圖 25.

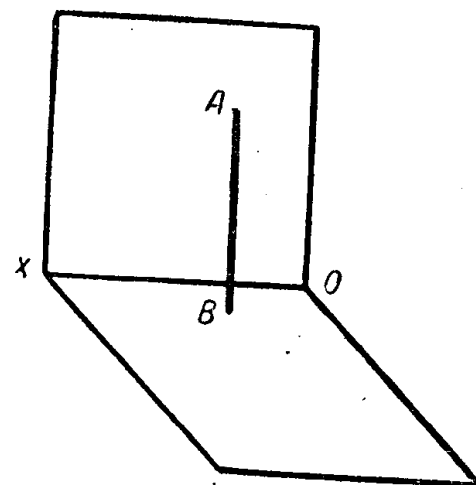


圖 26.

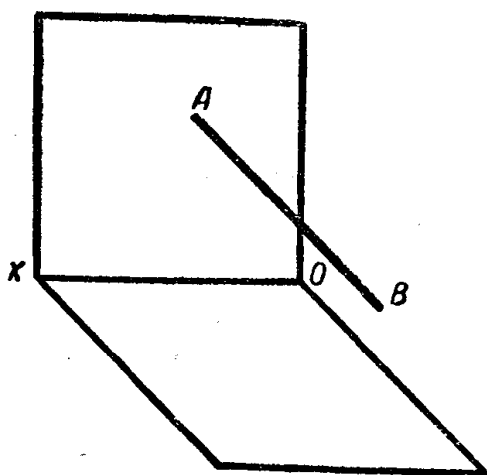


圖 27.

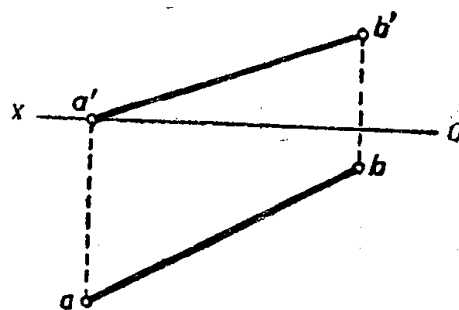


圖 28.

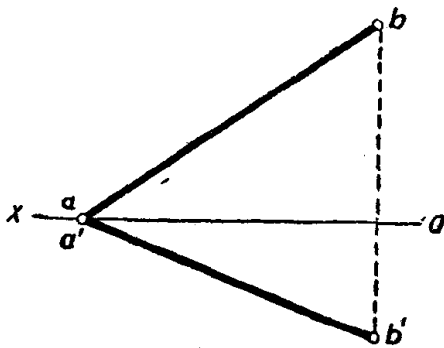


圖 29.

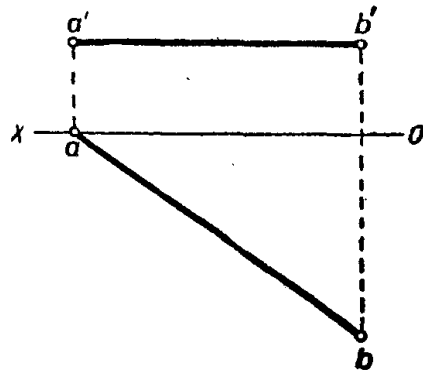


圖 30.

3. 線段 AB 在(?)分角內, 與(?)投影面平行, 其端點 A 在(?)投影面內(圖 30)。
4. 線段 AB 在(?)分角內, 垂直於(?)投影面, 其端點 B 在(?)投影面之(?)部(圖 31)。
5. 線段 AB 在(?)分角內, 其端點 A 在(?)投影面之(?)部(圖 32)。

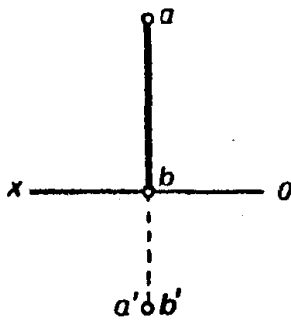


圖 31.

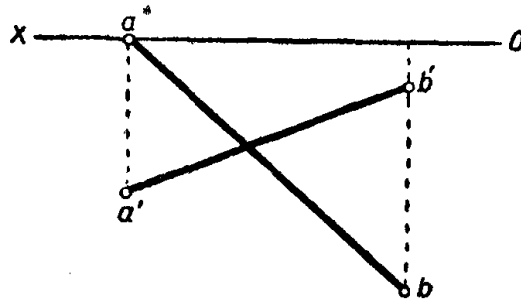


圖 32.

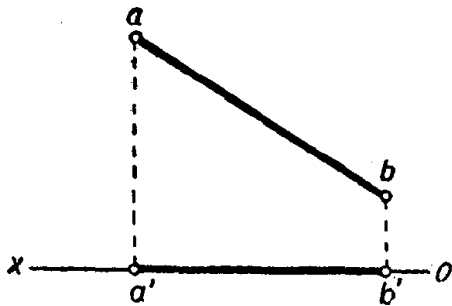


圖 33.

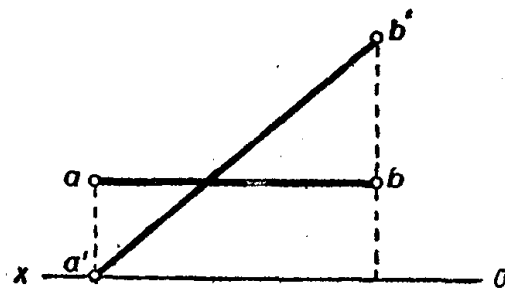


圖 34.

6. 線段 AB 位於(?)投影面之(?)部(圖 33)。
7. 線段 AB 在(?)分角內, 與(?)投影面平行, 其端點 A 在(?)投影面之(?)部(圖 34)。
8. 線段 AB 在(?)分角內, 垂直於(?)投影面, 其端點 A 在(?)投影面之(?)部(圖 35)。
9. 線段 AB 在(?)分角內, 平行於(?) (圖 36)。
10. 線段 AB 位於(?)投影面之(?)部(圖 37)。

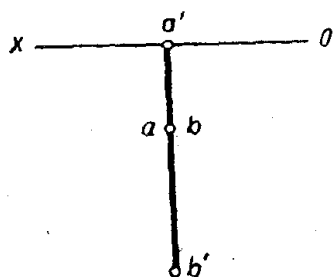


圖 35.

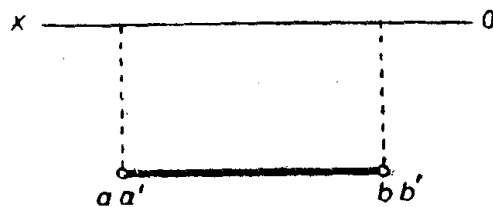


圖 36.

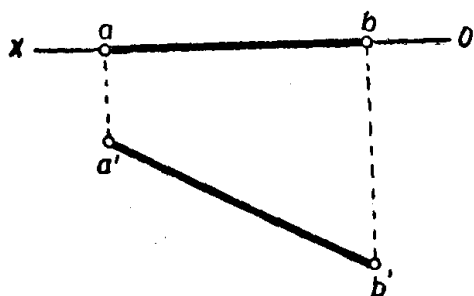


圖 37.

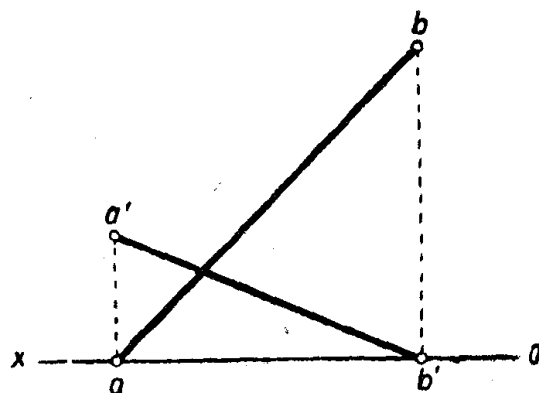


圖 38.

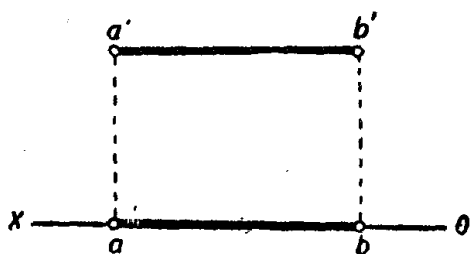


圖 39.

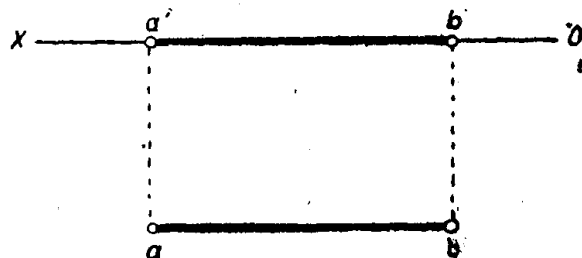


圖 40.

11. 線段 AB 在(?)分角內,其端點 A 在(?)投影面之(?)部,而端點 B 在(?)投影面之(?)部(圖 38)。

12. 線段 AB 位於(?)投影面之(?)部,並平行於(?) (圖 39)。

13. 線段 AB 位於(?)投影面之(?)部,並平行於(?) (圖 40)。

10. 作線段 AB 之投影圖,若該線段:

1. 在第二分角內,且其端點 A 在縱面內。
2. 在第一分角內,與縱面平行,且與橫面相交於其端點 A 。
3. 位於橫面之前部。
4. 在第四分角內,且垂直於橫面,而其端點 A 至二投影面之距離相等。
5. 在第三分角內,與橫面平行,且與縱面相交於其端點 A 。