

自适应阵处理进展

黄振兴 等译著
张明友

四川科学技术出版社
中国 成都

自适应阵处理进展

黄振兴 等译著
张明友

四川科学技术出版社

1991年

责任编辑：尧汝英 徐安玉（特约）

封面设计：徐安玉

技术设计：徐安玉

责任校对：徐安玉

自适应阵处理进展
黄操兴 张明友 等 译 著

四川科学技术出版社出版发行 （成都盐道街三号）
电子科技大学学报编辑部编辑 西南冶金地质印刷厂印刷
开本 787×1092mm 1/16 印张 15.75 字数 395 千
1991年4月第一版 1991年4月第一次印刷 印数 1—1000册

ISBN 7-5364-1961-9/TN·63

定价：7.5元

译著者:

黄 振 兴	张 明 友	黄 鑑 忠	王 崇 文
吕 幼 新	吕 明	何 子 述	张 扬
项 勇	张 光 怀	孟 煊	

审校者:

黄 振 兴	张 明 友	严 孔 翌	徐 安 玉
-------	-------	-------	-------

17) 5.1.1.1

序 言

阵信号处理的目的是提取信号场(电磁、声、或光)的有用特征或信息,诸如信息源特征、方向和传播速度等。自从本世纪60年代中期B. Widrow等人提出“自适应天线”概念以来,自适应阵信号处理技术与VLSI技术相结合,为声纳、地震探测、雷达等领域展示了广阔的应用前景。长期以来,自适应阵处理的主要研究对象是对多辐射源的检测与定向,而核心问题是定向。已经提出的各种定向方法大都可归纳为以下两类概念的范畴。

1) 自适应波束形成

天线阵获取的数据是时-空二维的,而辐射源的角谱信息存在于孔径面的空间维。阵波束形成实际上是完成某种算法,它根据数据阵或空间协方差阵,并按某种优化准则自适应地调整孔径面上的权系数,以形成灵活的数字波束输出。它可用于自适应方向图置零以抑制非观察方向强干扰源,形成邻近多波束、阵方向图修正,实现超低副瓣及超角分辨性能等,多副瓣对消MSLC系是其典型的一例。

2) 多辐射源测向

这类方法摒弃了传统的波束概念,形式上不再施行对孔径面权系数估值和调整所体现的波束形成过程,而是直接用孔径面上获取的二维时-空数据或其空间协方差阵估值来定向和检测的。典型者如MUSIC算法,它能够检测辐射源个数、方向、相对辐射功率强度等。由此发展了诸如信号子空间、本征值-本征矢量分解、奇异值分解、结构协方差阵、参量目标模型拟合等测向技术途径。由于不是利用窗孔数据的傅立叶变换而是采取参量法估角谱,所以,这类方法具有超角分辨性能的潜力。

当然,在许多情况下,自适应阵波束形成也是为了测向-扫描探测与跟踪。发展这两类方法时均需考虑精度、分辨力、算法稳定性与稳健性等问题。有时,还必须考虑克服由于干扰辐射源与观察方向目标信号间的相关性(如雷达低仰角跟踪的多径效应)所带来的不良影响,如:对于波束形成来说相关性会造成观察方向上信号的抵消现象;对于测向来说则会恶化检测辐射源个数与定向的条件。此外,当考虑这些因素时,宽带信号比窄带信号阵处理要更为复杂与困难。所有这些问题,都是当前自适应阵处理研究的热门话题。

本书收集和翻译近二三年内国内外有关自适应阵处理的一部分文章,旨在供国内同行了解其近期动态与进展、扩大视野,推动研究工作。全书按五个专题分类。其中第一、二专题属于自适应阵波束形成,第三、四专题论述超分辨测向,第五专题介绍阵处理的处理器技术。应当指出的是,一篇文章可能涉及两个专题的内容,例如第三与第四专题的内容在许多方面可能是大同小异,所以上述分类若能说是合理的话,那也是相对而言。

当前雷达自适应阵处理技术方兴未艾。如西德国的ELRA、英国的MESAR等均为实验雷达,尚未达到实用水平。我们希望,对于从事这些专题研究的国内专业人员,本书所提供的技术文献能具有一定的参考价值。

本书的出版得到了国家高技术信息获取与处理领域专家组、国防科工委测量总体研究所的极大的关心与支持,谨致谢意。

编者谨识

1990年10月于成都

目 录

序 言	(I)
-----	-------

波束干扰置零自适应阵处理

多副瓣对消MSLC系统	(1)
部分自适应线阵中旁瓣对消的一种简单算法	(16)
几种部分自适应波束形成器设计的分析	(19)
零点控制对辐射方向图的影响	(34)
单脉冲天线中的自适应置零	(42)

相关干扰源波束形成

自适应对消相关干扰源的一种解法	(50)
多径环境中一种自适应空间平均技术	(63)
结构相关矩阵波束形成	(74)
利用空间平滑自适应阵列抑制相关干扰	(91)

高分辨测向自适应阵

基于协方差测向的天线阵设计	(101)
自适应结构的本征矢量法	(111)
高性能信号子空间波束形成器	(117)
一种非平稳环境中稳健的和高分辨的自适应本征子空间算法	(127)
ESPRIT——噪声中的复指数参量估计的子空间旋转法	(134)

相关信号源的高分辨测向阵处理

相控阵雷达的角度超分辨(综述)——算法及其适用性	(139)
检测和估计多个宽带源到达角的相关信号子空间处理	(149)
一种阵列处理的新方法	(162)
空间平滑对噪声子空间性能的影响	(167)
一种非本征分析法的高分辨阵列处理法	(175)
一种改进的超分辨阵列处理的 MUSIC 算法	(181)
结构矩阵近似实现超分辨	(187)

阵列处理VLSI

数字自适应波束形成技术处理器结构及实现	(204)
算法专用 SYSTOLIC阵列的系统设计方法	(212)
自适应天线处理的晶片规模 SYSTOLIC阵列	(224)
旁瓣对消的算法、结构和波束方向图	(228)

多副瓣对消 MSLC 系统

黄振兴 吕 明 何子述 张明友

【摘要】 本报告描述了一种多重旁瓣对消(MSLC)系统,用来抑制天线副瓣方向乃至主瓣内的多个点强干扰源。该系统在结构上采用主波差分约束网络以保持主瓣内观察方向上的正常响应;在算法上利用Givens酉变换旋转在数据域上求解最小二乘权矢量——一种所谓的QR分解三角化最小二乘算法(QRD—LS)。由该算法导出一种特殊的流水流运算结构——Systolic阵列算法结构,最后找到一种无需直接求解最佳权矢量的Systolic阵,极适宜于用VLSI实现。

1 MSLC系统功能

多重旁瓣对消系统MSLC(Multiple Side Lobe Cancellation)系自适应数字波束形成(ADBF)的技术途径之一,是一种适用于相控阵雷达的数字信号处理技术。它能自适应地调整接收阵各通道的复加权系数,使之在保留正常的主瓣回波响应的情况下,最大限度地抑制来自不同副瓣方向的非相关强干扰。

在今后的描述与分析中,我们采用等间隔线阵。由于雷达信号与接收系统通常是窄带的,干扰信号因而也是窄带的,因此信号与干扰均可用复量(因不考虑距离分辨,复包进描述是不必要的)表示。通过零中频变换后,每个通道的复信号(包括干扰)可用 I 、 Q 两个实分量来表示。具有角空间选择性的波束抵消输出在ADBF微处理器中形成。

2 MSLC系统描述

图1是待研究的线性主瓣约束窄带自适应阵的MSLC系统原理图,它包括一个正常的线阵(右边),形成高增益窄方向性的主波束信号支路,但不可避免地干扰信号也从副瓣矢入此主通道,还包括实现主瓣线性约束的矩阵网络 C 和一个自适应多重副瓣抵消器——MSLC。

在形成主通道的正常阵中,由一组移相器控制波束扫描,经移相后的 $M+1$ 维信号络量为

$$X_n = S_n + Q_n$$

S_n 为来自主瓣方向的目标信号矢量,经移相器校正后, S_n 的诸分量 $S_0, S_1, \dots, S_n$ 通常是等幅同相的。 Q_n 是来自其它副瓣方向进入主通道的各干扰信号合成矢量,并假定与 S_n 不相关。 X_n 经固定加权矢量 W_0 (以满足副瓣电平的设计要求)后,获得正常输出

$$d_n = W_0^T X_n = W_0^T S_n + W_0^T Q_n$$

式中 τ 为转置, $W_0^T S_n$ 为主瓣轴线附近目标信号输出(若是有目标的话), $W_0^T Q_n$ 为副瓣干扰合成分量,需要抑制。

MSLC的作用是最终产生一个只与干扰 Q_n 相关的输出 y_n ,使相减输出剩余 e_n

$$\begin{aligned} e_n &= d_n - y_n \\ &= W_0^T S_n + (W_0^T Q_n - y_n) \end{aligned} \quad (1)$$

中的干扰分量 $W_0^T Q_n - y_n$ 大大地受到抑制。为使 y_n 中不包含信号矢量 S_n 的影响,以免对

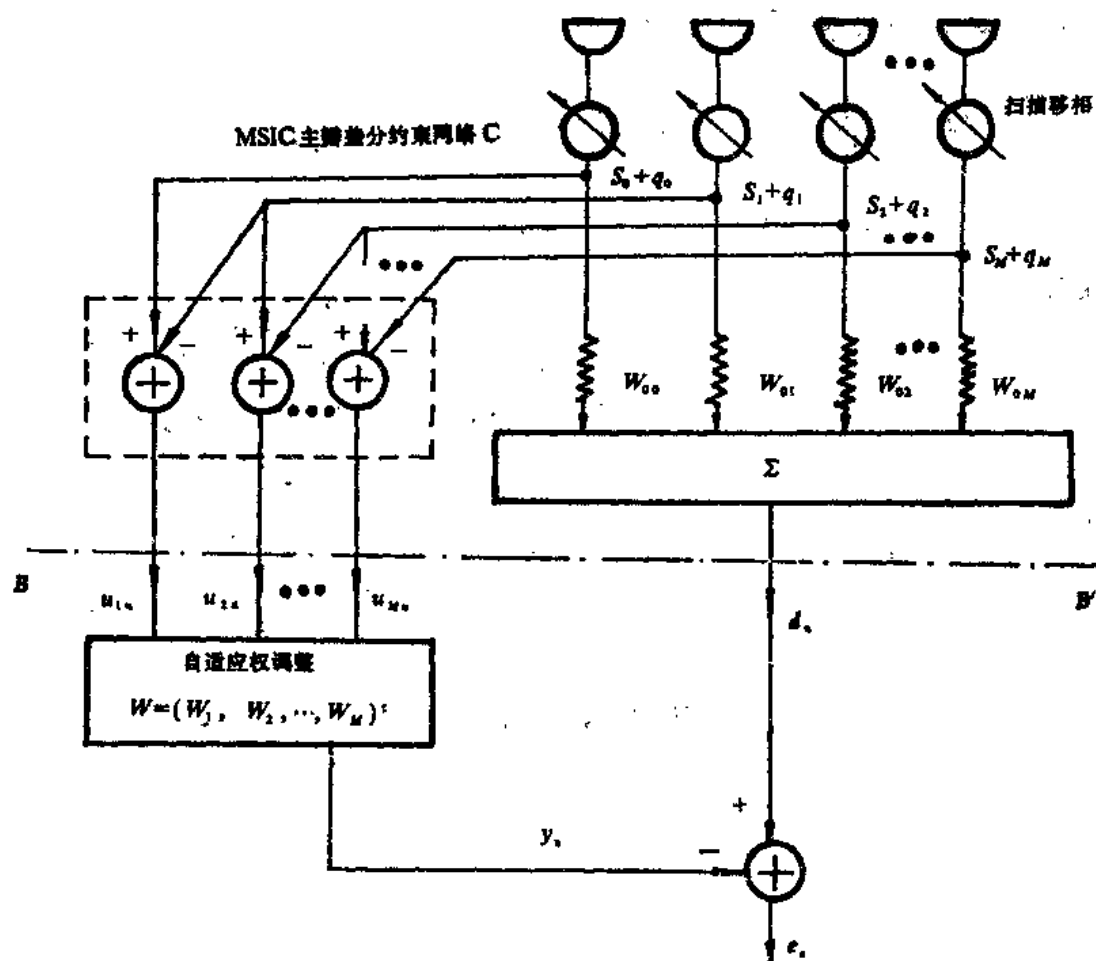


图1 MSLC系统描述

主瓣响应输出 $W_0^T S_n$ 产生不必要的抵消作用，在MSLC之前预先使 $X_n = S_n + Q_n$ 通过目标信号阻塞网络C，使得

$$CS_n = 0 \quad (2)$$

图1中示出一种可能的阻塞网络，既然对目标信号，有 $S_{i+1} = S_i$ ，相邻两单元两数相减，将目标信号分量抵消殆尽，这对应于

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ 0 & & & 1 & -1 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow M \\ \downarrow \end{matrix}$$

$\leftarrow M+1 \rightarrow$

于是，输出 M 维矢量

$$U_n = CX_n = C(S_n + Q_n) = CQ_n$$

只与干扰 Q_n 有关。从式(2)看到，这等效于施加了一个主瓣差分约束条件，其代价是减小了一维自由度，由 $M+1$ 维降为 M 维。

M 维干扰矢量 $\hat{u}_n$ 进入MSLC后，受到 M 维自适应调整权矢量 $W = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$ 作用，完成线性加权组合，这正是一个 M 点FIR自适应滤波器，其输出为

$$y_n = W^T \bar{u}_n = W^T C Q_n$$

MSLC系统抵消剩余输出为

$$e_n = d_n - y_n = W_0^T X_n - W^T C Q_n = W_0^T S_n + (W_0^T Q_n - W^T C Q_n)$$

$W_0^T S_n$ 为信号分量, 与 W 的选择无关, $W_0^T Q_n - W^T C Q_n$ 为干扰分量。为使输出 e_n 逼近 $W_0^T S_n$, 应选择 W 使输出干扰平均功率为最小

$$E[|W_0^T Q_n - W^T C Q_n|^2] = \min$$

即应使

$$\begin{aligned} & E[(W_0^H Q_n^* - W^H C^* Q_n^*)(Q_n^T W_0 - Q_n^T C^T W)] \\ &= W_0^H R_{qq} W_0 - W^H C^* R_{qq} W_0 - W_0^H R_{qq} C^T W + W^H C^* R_{qq} C^T W \end{aligned}$$

的 M 维梯度矢量

$$\begin{aligned} \nabla E[|e_n|^2] &= \frac{d}{dW} E[|e_n|^2] = \frac{d}{dW} [W_0^T Q_n - W^T C Q_n]^2 \\ &= -2C^* R_{qq} W_0 + 2C^* R_{qq} C^T W \end{aligned}$$

为零, 式中 H 为共轭转置。为此得到 W 的最佳解等于

$$W = (C^* R_{qq} C)^{-1} C^* R_{qq} W_0 \quad (3)$$

其中 $R_{qq} = E[Q_n^* Q_n^T]$ 为干扰 Q_n 的协方差矩阵, 应当指出, 在实际情况下, $W_0^T Q_n$ 中应包括主波束通道噪声, $W^T C Q_n$ 的 Q_n 中应包含各通道内部噪声。

3 最小二乘方问题

在图 1 中我们遮盖正常的主波束形成网络及差分约束网络 C , 从断面 $B-B'$ 向下看, 发现这正是一个典型的 Wiener 滤波问题, 如图 2 所示。取空间阵信号矢量为

$$\bar{u}_n = (u_{1n}, u_{2n}, \dots, u_{Mn})^T$$

M 为空间阵元数。离散时刻 $n = 1, 2, \dots$, 也表示对空间信号 $\bar{u}_n$ 的快拍 (Snapshot) 数。在第 n 次快拍时, 主波束通道输出 d_n 提供基准的希望信号, 自适应线性滤波输出 $W^T \bar{u}_n$ 与 d_n 相减, 产生抵消剩余输出 e_n (标量),

$$e_n = d_n - W^T \bar{u}_n = d_n - \bar{u}_n^T W \quad (4)$$

其中, $W = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$,

于是

$$e_n = d_n - \sum_{i=1}^M u_{in} w_i \quad (5)$$

$$n = 1, 2, \dots, n$$

令

$$E_n = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \quad \hat{D}_n = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (6)$$

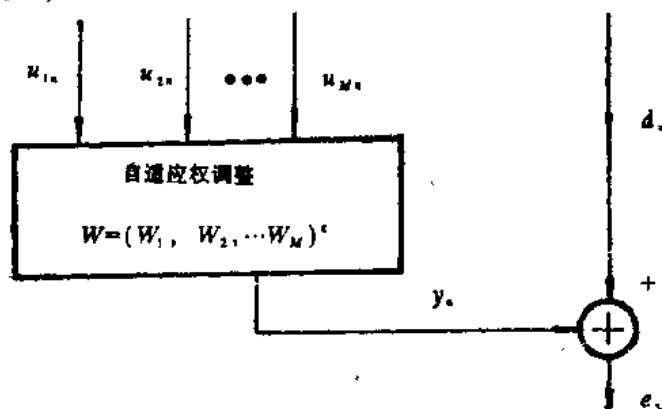


图2 MSLC系统化成 Wiener 滤波问题

$$A_n = \begin{pmatrix} \bar{u}_1^T \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{M1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{M2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{Mn} \end{pmatrix} \quad (7)$$

则式(5)可写成矢量矩阵形式

$$e_n = \delta_n - A_n W \quad (8)$$

抵消剩余平方和为 $e_n^H e_n = \sum_{i=1}^n |e_i|^2$ 。为改善对数据的适应性,引入遗忘因子 $\gamma = \beta^2$, β 为不大于1的正实数。为此,定义加权的剩余平方和

$$\xi_n(W) = \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} |e_i|^2 = e_n^H B_n^{-1} e_n = \|B_n e_n\|^2 \quad (9)$$

B_n^{-1} 为遗忘加权对角阵

$$B_n = \text{Diag}(\beta^{n-1}, \beta^{n-2}, \dots, 1) = \begin{bmatrix} \beta^{n-1} & & 0 \\ & \beta^{n-2} & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

我们的目的是要寻求最优权矢量,使剩余平方和 $\xi_n(W)$ 为最小。观察式(8)右边,对于 $n \leq M$, 线性方程组

$$A_n W = \delta_n \quad (11)$$

有解,因此 $e_n = 0$; 对于 $n \geq M$, 方程组数目往往多于未知数数目,式(11)是超定的矛盾方程组,但是按式(8)使 e_n 的加权平方和 $\xi_n(W)$ 为最小的解却是唯一的,这便是熟知的最小二乘方问题。现在求 W 的最小二乘方(LS)解。将式(8)代入式(9),展开成(暂取消下标 n)二次型

$$\begin{aligned} \xi_A(W) &= (\delta^H - W^H A^H) B^2 (\delta - AW) \\ &= \delta^H B^2 \delta - \delta^H B^2 AW - W^H A^H B^2 \delta + W^H A^H B^2 AW \end{aligned}$$

对此二次型实函数求梯度,

$$\frac{d\xi_n(W)}{dW} = -2A^H B^2 \delta + 2A^H B^2 AW \quad (12)$$

令梯度为零,求得确定性法方程

$$A^H B^2 AW = A^H B^2 \delta \quad (13)$$

W 的最小二乘解满足式(13)。该式左边 $A^H B^2 A$ 是 $M \times M$ 观测数据协方差阵,当 $n \geq M$ 时,通常是非奇异阵,于是 W 的形式求解是

$$W = (A^H B^2 A)^{-1} A^H B^2 \delta \quad (14)$$

4 QRD—LS算法

Reed等人用一种快速收敛的采样矩阵逆(SMI)的算法直接求解式(13),该算法有两大缺点:

- 1) 运算复杂:包括计算协方差阵 $A^H B^2 A$ 、解方程(13)、计算内积 $W^H u_n$ 等。
- 2) 数值稳定性差,即方程(13)可能是病态的,这可用条件数来表示。

4.1 条件数

线性方程式组的病态程度取决于系数矩阵 A 的条件数 $Cn(A)$, 定义为

$$Cn(A) = \sigma_{\max} / \sigma_{\min} \quad (15)$$

$\sigma_{\max}$ 与 $\sigma_{\min}$ 分别是 A 的最大与最小奇异值, $Cn(A)$ 愈大, 则系统愈病态, 数值稳定性愈差。而 $A^H B^2 A$ 的条件数是

$$Cn(A^H B^2 A) = Cn^2(BA)$$

所以 $A^H B A$ 的条件数远大于 A 的条件数, 因此宜避免解系数矩阵为 $A^H B A$ 的线性方程组, 而直接对数据阵 A 进行运算以求解 W 为好。

4.2 籍数据阵 A_n 求解

在数据域上求解 LS 的最佳 W 值是一种较好的方法, 因为:

- 1) 条件数是 $Cn(A_n)$ 而不是 $Cn(A_n^H B_n^2 A_n)$
- 2) 可利用 Givens 旋转——一种酉变换以实现系数矩阵的三角化, 这种变换适合于一种特殊的并行流水线结构——Systolic 阵列结构硬件实现。

由式(9)我们看到, 剩余输出平方和为

$$\xi_n(W) = \|B_n e_n\|^2$$

设 Q_n 为一 $n \times n$ 酉阵 (unitary matrix), 即有

$$Q_n^H Q_n = Q_n Q_n^H = I_n$$

显然有

$$\xi_n(W) = \|B_n e_n\|^2 = \|Q_n B_n e_n\|^2$$

这意味着, 使

$$\|Q_n B_n e_n\| = \min$$

与使

$$\|B_n e_n\| = \min$$

是完全等价的。这样求解式(13)的 LS 问题便转化成使在酉空间的矢量

$$Q_n B_n e_n = Q_n B_n \delta_n - Q_n B_n A_n W \quad (16)$$

的欧氏范数 $\|Q_n B_n e_n\|$ 为最小的 LS 问题。

对于 $n \geq M$, $n \times M$ 数据矩阵 A_n 的秩通常为 M , 因此, 可按某特定方式(如后述的 Givens 旋转)来寻求 $n \times n$ 酉阵 Q_n , 完成对 $B_n A_n W$ 的三角化的 $Q-R$ 分解, 使其具有如下形式

$$Q_n B_n A_n = \begin{bmatrix} R_n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中 R_n 是 $M \times M$ 上三角阵, 0 是 $(n-M) \times M$ 零矩阵。这样, 式(16)的右边第二项可写成

$$Q_n B_n A_n W = \begin{bmatrix} R_n W \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中 $R_n W$ 为 $M \times 1$ 列矢量, 0 为 $(n-M) \times 1$ 零矢量。

与此同时, 将 Q_n 分块为 $M \times n$ 矩阵 F_n 与 $(n-M) \times n$ 矩阵 S_n ,

$$Q_n = \begin{bmatrix} F_n \\ S_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

则相应地可将式(16)右边第一项写成

$$Q_n B_n \delta_n = \begin{bmatrix} F_n \\ S_n \end{bmatrix} \delta_n, \quad B_n \delta_n = \begin{bmatrix} \bar{p}_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中,

$$\bar{p}_n = F_n B_n \delta_n \quad (21)$$

$$\bar{v}_n = S_n B_n \delta_n \quad (22)$$

分别为 $M \times 1$ 及 $(n-M) \times 1$ 列矢量。这样, 式(16)则演变成一种极其简明的形式[将式(18)、式(20)代入该式]

$$Q_n B_n e_n = \begin{bmatrix} \bar{p}_n \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_n W \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}_n - R_n W \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

显然, 影响 $\|B_n e_n\| = \|Q_n B_n e_n\|$ 的矢量分量是 $\bar{p}_n - R_n W$ 。为使其达到最小, 应选择 W , 使之满足

$$R_n W = \bar{p}_n \quad (24)$$

此时

$$\|B_n e_n\|^2 = \|Q_n B_n e_n\|^2 = \|\bar{v}_n\|^2 = \min \quad (25)$$

对式(24)可利用回代法解出最优权矢量 W 。

4.3 Q-R分解递推算法

取 $n = M, M+1, \dots$ 。设在 $n-1$ 时已对 $(n-1) \times M$ 数据阵 B_{n-1} 、 A_{n-1} 实现了 $Q-R$ 三角化分解, 即有

$$Q_{n-1} B_{n-1} A_{n-1} = \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

R_{n-1} 是 $M \times M$ 上三角阵, 0 是 $(n-M-1) \times M$ 零矩阵。在新时刻 n , 新数据矩阵 A_n 由老矩阵 A_{n-1} 增加一行

$$A_n = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{M1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{1,n-1} & u_{2,n-1} & \cdots & u_{M,n-1} \\ u_{1,n} & u_{2,n} & \cdots & u_{M,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ u_n^T \end{pmatrix} \quad (26)$$

同时, B_n 可用 B_{n-1} 递推表示

$$B_n = \begin{pmatrix} \beta^{n-1} & & 0 \\ & \beta^{n-2} & \\ & & \ddots \\ & & & \beta \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \beta B_{n-1} & 0_{n-1} \\ \hline 0_{n-1}^T & 1 \end{array} \right) \quad (27)$$

0_{n-1} 为 $n-1$ 维零矢量。为了给 $B_n A_n$ 创造 $Q-R$ 递推分解的条件, 预先用 $\bar{Q}_{n-1}$ 矩阵对 $B_n A_n$ 施以酉变换, $\bar{Q}_{n-1}$ 定义为下面所示的 $n \times M$ 酉阵

$$\bar{Q}_{n-1} = \begin{bmatrix} Q_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

由此得到

$$\bar{Q}_{n-1} B_n A_n = \begin{bmatrix} Q_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta B_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ \bar{u}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta Q_{n-1} B_{n-1} A_{n-1} \\ \bar{u}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{Q}_{n-1} B_n A_n = \begin{bmatrix} \beta R_{n-1} & \\ & 0 \\ & & \bar{u}_n^T \end{bmatrix} \quad (29)$$

其中 βR_n 仍为 $M \times M$ 上三角阵, 0 为 $(n-1-M) \times M$ 零矩阵, $\bar{u}_n^T$ 为 $1 \times M$ 行矢量。为了重新施行 $Q-R$ 分解三角化, 需对式(29)顺序进行 M 次 Givens 旋转。后面紧跟着即将描述的 Givens 旋转乃是根据待变换阵的有关阵元计算得到的一种 $n \times n$ 酉变换阵, 通过这一系列线性酉变换的结果, 可将 $\bar{Q}_{n-1} B_n A_n$ 底行矢量 $\bar{u}_n^T$ 的 M 个元素从左至右依次变换为零, 同时保持原来的 $M \times M$ 上三角及 $(n-1-M) \times M$ 的矩阵形式, 这样加在一起, 形成了最后 $n-M$ 行零阵, 从而完成了 $Q-R$ 三角化分解。令 $G_{1,n}, G_{2,n}, \dots, G_{M,n}$ 为上述 M 次 Givens 旋转酉矩阵, 并取

$$T_n = G_{M,n} \cdots G_{2,n} G_{1,n}$$

上述一系列 Givens 变换的结果可写成

$$T_n \bar{Q}_{n-1} B_n A_n = T_n \begin{bmatrix} \beta R_{n-1} & & R_n \\ - & - & - \\ 0 & & 0 \\ - & - & - \\ \bar{u}_n^T & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \\ - & - & - \\ 0 \\ - & - & - \\ 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

应当指出, 在每一次 Givens 旋转时, 相应的行与底行的右侧非零元素要作适当的线性修正, 原左侧的或全行的零元素保持为零。

至此, 我们已经完成了式(16)右边第二项的 $Q-R$ 分解, 其合成的酉变换是[对照式(30)]

$$Q_n = T_n \bar{Q}_{n-1} = G_{M,n} \cdots G_{2,n} G_{1,n} \bar{Q}_{n-1} \quad (31)$$

在式(16)右边, 还需对 $B_n \delta_n$ 作相同的酉变换。设在 $n-1$ 时刻已完成了对 $B_{n-1} \delta_{n-1}$ 的酉变换, 而有

$$Q_{n-1} B_{n-1} \delta_{n-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{n-1} \\ \bar{V}_{n-1} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$\bar{P}_{n-1}$ 及 $\bar{V}_{n-1}$ 分别为 $M \times 1$ 及 $(n-1-M) \times 1$ 列矢量, 则在 n 时刻, δ_n 由 δ_{n-1} 增加一维, 写成

$$\delta_n = \begin{bmatrix} \delta_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (33)$$

相应地, 矢量 $B_n \delta_n$ 通过酉变换变成

$$\begin{aligned} Q_n B_n \delta_n &= T_n \begin{bmatrix} Q_{n-1} & Q_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta B_{n-1} & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \\ &= T_n \begin{bmatrix} \beta Q_{n-1} B_{n-1} \delta_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \\ &= T_n \begin{bmatrix} \beta \bar{P}_{n-1} \\ \beta \bar{V}_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_n \\ \bar{v}_n \\ d_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} \beta \bar{p}_{n-1} \\ \beta \bar{v}_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} = G_{M_n} \cdots G_{1_n} \begin{pmatrix} \beta \bar{p}_{n-1} \\ \beta \bar{v}_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \quad (34)$$

由式(30), 式(34)分别计算得到 $R_n, \bar{p}_n$ 之后, 便可由式(24) $R_n W = \bar{p}_n$ 回代求解最优权矢量 W 。

4.4 Givens 旋转

设在第 $n-1$ 次快拍结束时, 系统执行完毕对 $B_{n-1} A_{n-1}$ 的 $Q-R$ 分解, 将其结果展开成显式

$$Q_{n-1} B_{n-1} A_{n-1} = \begin{pmatrix} R_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2M} \\ & 0 & & \\ & & \gamma_{MM} & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

在第 n 次快拍开始, 从阵面获取新数据矢量

$$\bar{u}_n^T = (u_1, u_2, \cdots, u_M)$$

及主通道数据 d_n 之后, 首先对数据阵 $B_n A_n$ 进行酉变换 $\bar{Q}_{n-1}$ 的预处理, 具体地, 由式(29)有

$$\bar{Q}_{n-1} B_n A_n = \begin{pmatrix} \beta R_{n-1} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{u}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2M} \\ & 0 & & \\ & & \gamma_{MM} & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{pmatrix} \quad (36)$$

定义第一次 Givens $n \times n$ 矩阵 G_{1_n}

$$G_{1_n} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & S_1^* \\ & 1 & \\ 0 & & 1 & 0 \\ -S_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

在阵 G_{1_n} 内, 主对角除第 1 和第 n 个元素是绝对值不大于 1 的实数 C_1 外, 其它主对角元素均为 1, 左下角与右上角元素为 S_1 及 S_1^* , 其它诸元素皆为零, S_1 为模不超过 1 的复数, 并有

$$|S_1|^2 + |C_1|^2 = 1 \quad (38)$$

从而使 G_{1_n} 是酉变换:

$$G_{1_n}^H G_{1_n} = G_{1_n} G_{1_n}^H = I_n$$

变换后的 $\bar{Q}_{n-1} B_n A_n$ 是

$$G_{1n} \bar{Q}_{n-1} B_n A_n = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 & S_1^* & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1M} \\ 0 & 1 & & & 0 & & & & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & & & & & y_{MM} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & & & 0 & & \\ -S_1 & 0 & \cdots & 0 & C_1 & u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$y_{1m} = \beta y_{1m}$$

我们这样来选择 C_1, S_1 , 它使得 $n \times M$ 阵 $G_{1n} \bar{Q}_{n-1} B_n A_n$ 中的左下角即第 n 行第 1 列元素为零, 则

$$-S_1 y_{11} + C_1 u_1 = 0 \quad (40)$$

令

$$g_1 = \sqrt{|u_1|^2 + |y_{11}|^2} \quad (41)$$

则可选择

$$C_1 = y_{11}/g_1 \quad (42)$$

$$S_1 = \frac{u_1}{y_{11}} - C_1 = u_1/g_1 \quad (43)$$

作为满足式(38)和式(40)的一组解。在这种情况下, 酉变换结果的形式是

$$G_{1n} \bar{Q}_{n-1} B_n A_n = \begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1M} \\ & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ & & & y_{MM} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & u'_2 & \cdots & u'_M \end{pmatrix} \quad (44)$$

和式(36)比较, 仅仅第一行和第 n 行元素发生了变化, 其它行元素均保持不变, 第一行元素的修正公式是

$$y'_{1m} = C_1 y_{1m} + S_1^* u_m \quad m = 1, 2, \cdots, M \quad (45)$$

底行(第 n 行)元素的修正转换公式则是

$$u'_m = -S_1 y_{1m} + C_1 u_m \quad m = 1, 2, \cdots, M \quad (46)$$

其中, $m=1$ 对应着式(40)而有 $u'_1 = 0$, 这是预料中的、修正计算可予以免去。

应该强调指出的是: 对于 $m=1$, 将式(42)、式(43)代入式(45), 看到

$$y'_{11} = (|y_{11}|^2 + |u_1|^2)/g_1$$

当 y_{11} 是(正)实数时, 则 y'_{11}

$$y'_{11} = (|y_{11}|^2 + |u_1|^2)/g_1 = g_1 \quad (47)$$

也是(正)实数, 同时, C_1 也是(正)实数, 这种情况对于后随的 $M-1$ 次 Givens 旋转的数据 $C_2, y'_{22}, C_3, y'_{33}, \cdots, C_M, y'_{MM}$ 均适用。因此可以得到结论: 一旦 R_{n-1} 因而 βR_{n-1} 的主对角元素是正实数, 则 n 以后的 $R_n, R_{n+1}, \cdots$ 等主对角元素也都是正实数, 同

时 $C_n, C_{n+1}, \dots$ 也都是实数。

现在定义第二次Givens $n \times n$ 矩阵 G_{2n}

$$G_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & C_2 & \cdots & S_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & 1 \\ 0 & -S_2 & \cdots & C_2 \end{pmatrix} \quad (48)$$

其作用是将式(44)矩阵 $G_{1n} \bar{Q}_{n-1} B_n A_n$ 中的底行第二列元素变换为零。因此, 通过酉变换 G_{2n} 后, 该式应演变成如下的形式:

$$G_{1n} G_{1n} \bar{Q}_{n-1} B_n A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & S_2^* \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 1 \\ 0 & -S_2 & \cdots & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1M} \\ & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & y_{MM} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & u'_2 & \cdots & u'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_{11} & y'_{12} & \cdots & y'_{1M} \\ & y'_{22} & \cdots & y'_{2M} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & y_{MM} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & u''_2 & \cdots u''_M \end{pmatrix} \quad (49)$$

应根据 $|S_2|^2 + |C_2|^2 = 1$ (50)

$$u''_2 = -S_2 y_{22} + C_2 u'_2 = 0 \quad (51)$$

找出 S_2, C_2 , 得到类似于式(41)~式(43)的结果

$$g_2 = \sqrt{|u'_2|^2 + |y_{22}|^2} \quad (52)$$

$$C_2 = \frac{y_{22}}{g_2} \quad (53)$$

$$S_2 = \frac{u'_2}{y_{22}} \quad C_1 = \frac{u'_2}{g_2} \quad (54)$$

同样地, C_{2n} 的引入只改变矩阵中的第二行与第 n 行非零元素。类似于式(45)、式(46), 我们不难写出

$$y'_{2m} = C_2 y_{2m} + S_2^* u'_m \quad m = 2, \dots, M \quad (55)$$

$$u''_m = -S_2 y_{2m} + C_2 u'_m \quad m = 2, \dots, M \quad (56)$$

特别是当 $m = 2$ 时, $u''_2 = 0$ 以及类似于式(47)有

$$y'_{22} = g_2 \quad (57)$$

照此依次进行, 直至第 M 次Givens旋转 G_{Mn} , 使得式(36)中的最底行 $\bar{u}_n'$ 的元素全部变换为零, 最终获得数据矩阵形如式(30), 从而实现了第 n 次快拍数据矩阵 $B_n A_n$ 的一个 $Q-R$ 分解。

在每次Givens旋转的同时, 还应对矢量 $Q_n B_n \delta_n$ 的中间结果进行相同的酉变换, 直至

到第 M 次获得形如式(34)的结果为止。由于历次Givens旋转只对待变换的矩阵或矢量的前 M 行和最后一行元素起变换作用,故从式(34)可知

$$\bar{v}_n = \begin{bmatrix} \beta \bar{v}_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (58)$$

$\bar{v}_n$ 的维数比 $\bar{v}_{n-1}$ 多1,但 $\bar{p}_n$ 的维数不变。

4.5 Q-R初始化

当 $n=1,2,\dots,M-1$ 时, A_n 的秩小于 M ,线性方程组 $\delta = W^T A_n$ 是欠定的, W 有无穷解但无最佳意义,且剩余为零,因而目标信号将被抵消。然而,可取 $R_0=0$, $\bar{p}_0=0$ 从 $n=1$ 开始,置

$$\bar{Q}_0 B_1 A_1 = \begin{bmatrix} \beta R_0 \\ \dots \\ \bar{u}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \bar{u}_1^T \end{bmatrix}$$

按前述三角化过程递推计算,直至 $n=M$,此后求解 W 及 e_n 才有意义。

4.6 直接提取剩余输出

在许多场合下,对最佳权矢量 W 的求解不是直接感兴趣的,从雷达检测目标的观点,关心的是抵消副瓣干扰的主通道剩余输出,在最佳权 W 满足 $R_n W = \bar{p}_n$ 的条件下获得抵消剩余输出 e_n 。不难证明

$$e_n = \alpha_n \prod_{i=1}^M C_i = \alpha_n \eta_M \quad (59)$$

证明 在最佳权矢量满足式(24)的情况下, v_n 具有式(58)的形式,此时式(23)变成

$$T_n \bar{Q}_{n-1} B_n e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \bar{v}_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

两边左乘以 T_n^H ,考虑到 $T_n^H T_n = I_n$,有

$$\bar{Q}_{n-1} B_n X \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = T_n^H \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \bar{v}_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

展开上式

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{n-1} & 0_{n-1} \\ \vdots & \vdots \\ 0_{n-1}^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{n-1} e_1 \\ \vdots \\ \beta e_{n-1} \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & C_M & \vdots & -S_M \\ 0 & S_M^* & 0 & C_M \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} C_1 & 0 & -S_1 \\ \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ S_1^* & 0 & C_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \bar{v}_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

两边取最后一行元素,仔细观察右边连乘的中间列矢量,不难得到式(59)如下

$$e_n = \alpha_n C_1 C_2 \cdots C_M = \alpha_n \eta_M \quad (60)$$

这就是说,LS抵消剩余输出是 M 次Givens酉变换 C 参量及 v_n 矢量最末元素的连乘积,式中

$$\eta_1 = \prod_{K=1}^M C_K = \eta_{1-1} C_1 \quad (61)$$