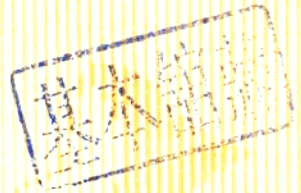


- 916513

高等学校教材

信号检测与估计

向敬成 王意青 毛自灿 张明友



•23

国防工业出版社

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978年至1985年，已编审、出版了两轮教材，正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻“努力提高教材质量，逐步实现教材多样化，增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神，我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会，在总结前两轮教材工作的基础上，结合教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1986~1990年的“七五”（第三轮）教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等有近400种选题。这批教材的评选推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿，是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐、由编审委员会（小组）评选择优产生出来的。广大编者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

29777202

前 言

本教材系按电子工业部制定的工科电子类专业教材 1986~1990 年编审出版规划,由无线电技术与信息系统教材编审委员会电子系统编审小组征稿并推荐出版,责任编辑委林茂庸。

本教材由电子科技大学(成都)向敬成担任主编,北京理工大学黄辉宁和清华大学朱正中担任主审。

本课程的参考学时数为 40~60 学时,其主要内容为信号检测与估计的基本理论,高斯背景下各种信号的检测与非参量检测,信号参量估计及波形估计(维纳滤波与卡尔曼滤波)。本教材适用对象为电子学与通信学科有关专业的研究生,本科高年级学生及科技人员。

本教材由向敬成编写绪论和第一章,王意青编写第二章和第三章第一节,毛自灿编写第四章和第三章第二节,张明友编写第五章和第三章第三节,向敬成统编全稿。参加审阅工作的还有刘隼凡、陈天麒同志,他们为本书提出许多宝贵意见,这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

目 录

绪论	1
第一章 检测与估计的基本理论	5
§ 1.1 引言	6
§ 1.2 简单实例	6
§ 1.3 双择检测及其最佳准则	10
1.3.1 贝叶斯准则	11
1.3.2 最小错误概率准则和最大后验概率准则	13
1.3.3 极大极小化准则	15
1.3.4 纽曼-皮尔孙准则	17
§ 1.4 多元信号检测及其最佳准则	19
§ 1.5 随机参量信号的检测	21
1.5.1 贝叶斯准则	23
1.5.2 纽曼-皮尔孙准则	25
§ 1.6 信号参量估计基本原理	27
1.6.1 经典估计方法	27
1.6.2 贝叶斯估计	30
1.6.3 最大后验估计	32
1.6.4 最大似然估计	33
1.6.5 参量估计实例	33
本章小结	35
习题	35
参考文献	37
第二章 信号检测理论 (I)	38
§ 2.1 引言	38
§ 2.2 高斯白噪声下确知信号的检测	38
2.2.1 二元通信系统	38
2.2.2 最佳系统的检测性能	42
2.2.3 相干雷达系统	46
2.2.4 似然函数	47
§ 2.3 匹配滤波器理论	48
2.3.1 线性滤波器的一种最佳准则——信噪比准则	48
2.3.2 白噪声背景下的匹配滤波器	50
2.3.3 色噪声背景下的广义匹配滤波器	53
§ 2.4 随机参量信号的检测	55
2.4.1 随机相位信号的检测	55
2.4.2 随机相位和振幅信号的检测	61
2.4.3 随机频率信号的检测	63
2.4.4 随机到达时间信号的检测	67
§ 2.5 信号的多脉冲检测	69
2.5.1 确知脉冲串信号的检测	70
2.5.2 随机相位脉冲串 (非相干脉冲串) 信号的检测	72

VI

2.5.3 随机探测和相位脉冲串信号的检测	75
本章小结	77
习题	78
参考文献	80
第三章 信号检测理论 (I)	81
§ 3.1 高斯色噪声下的信号检测	81
3.1.1 卡亨南-洛维展开	81
3.1.2 确知信号的检测	83
3.1.3 检测系统性能	87
3.1.4 相位未知信号的检测	89
§ 3.2 非参量检测	93
3.2.1 引言	93
3.2.2 定义和术语	95
3.2.3 基本非参量检测器	97
3.2.4 在雷达中的应用	105
3.2.5 关于 Robust 检测	108
§ 3.3 序列检测	112
3.3.1 引言	112
3.3.2 瓦尔待序列检测	114
3.3.3 最佳序列检测准则	118
3.3.4 序列检测与固定样本检测的比较	119
本章小结	122
习题	122
参考文献	124
第四章 信号参量估计	125
§ 4.1 引言	125
§ 4.2 信号参量估计量的性质	126
§ 4.3 单个信号参量的估计	135
4.3.1 一般公式	135
4.3.2 振幅估计	138
4.3.3 相位估计	140
4.3.4 时延估计	142
4.3.5 频率估计	147
§ 4.4 多个信号参量的同时估计	148
4.4.1 估计方法	149
4.4.2 估计性能	150
4.4.3 估计实例	152
4.4.4 测不准原理	155
§ 4.5 最佳线性估计	157
4.5.1 线性均方估计	157
4.5.2 白噪声情况下线性均方估计实例	159
4.5.3 白噪声情况	162
4.5.4 正交原理	164
§ 4.6 最小二乘估计	165
本章小结	167
习题	167
参考文献	170

第五章 波形估计	171
§ 5.1 引言	171
§ 5.2 维纳滤波	172
5.2.1 非因果解	174
5.2.2 因果解	176
5.2.3 非平稳问题	179
5.2.4 正文性	181
5.2.5 取样数据滤波器的加权函数法	183
§ 5.3 标量卡尔曼滤波	185
5.3.1 引言	185
5.3.2 标量信号模型和观测模型	187
5.3.3 标量卡尔曼滤波算法	188
§ 5.4 标量卡尔曼预测	192
§ 5.5 矢量信号模型和观测模型	195
§ 5.6 矢量卡尔曼滤波	199
5.6.1 引言	199
5.6.2 矢量卡尔曼滤波算法	200
5.6.3 矢量卡尔曼滤波器的实现	201
§ 5.7 矢量卡尔曼预测	202
§ 5.8 用于雷达跟踪的卡尔曼滤波算法	203
§ 5.9 卡尔曼滤波的发散现象	209
§ 5.10 连续时间的卡尔曼滤波	211
§ 5.11 推广卡尔曼滤波	212
5.11.1 非线性模型的线性化	212
5.11.2 推广卡尔曼滤波公式	213
5.11.3 推广卡尔曼滤波器的性质	214
本章小结	216
习题	216
参考文献	218
附录 积分方程的解	219

绪 论

自然界和人类社会中信息的传输与交换，都是通过信号这一物理实体来完成的。信号是信息的载荷者，传送者。在信号产生和传输的过程中，必然受到各种干扰因素的影响，因而必须加以处理，才能提供给信息接收者使用。由于被传输的信号本身和各种干扰往往具有随机性，信号处理设备必须进行统计分析，而这个统计分析的基本任务是检测信号（即判定某种信号是否存在）和估计携带信息的信号参量，这正是本教材研究的对象。由此可知，信号检测与估计理论就是信号处理的统计理论，所要解决的问题是信息传输系统的基本问题，因而具有广泛的应用。

任何一个信息传输系统（即广义的通信系统），可以用香农（Shannon）提出的模型表示，如图 0.1 所示。在信息发送端，信息或消息通过变换和编码，这包括表示信息的物理量和数学格式的变换、再调制到信号源上，从而形成传输的信号。由于信道常常具有色散性，故调制过程本质上是使所传输的信号具有窄带性质，并与信道相匹配。信道不仅不可避免地要引入干扰，还会对信号产生畸变，因而在接收端输入的是被“污染”了的信号。信号处理设备的任务，是要最大限度地从接收信号中提取信息源的信息，以供信息接收者使用。

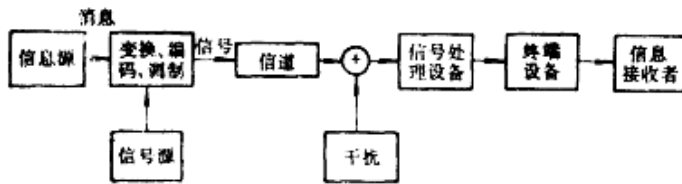


图 0.1 信息传输系统的香农模型

香农模型是一个高度概括的信息传输模型，通信系统、遥测系统、遥感系统、生物信息传输系统都可以看作它的特例。下面将要说明，作为传感器的雷达系统（包括声纳），也可以用香农模型表示，因为任何一个传感器和它的处理系统都可看成一个信息传输与处理系统。

雷达系统模型可以用图 0.2 表示。显然，雷达信息传输系统的信息源是所观测的目标，而信息源对信号源的调制，是发生在目标对发射电磁波进行散射之时。由此可知，雷达信息传输系统模型完全可以归结为香农模型，因而可以认为雷达系统是一个特殊的通信系统。雷达信息传输系统有如下两个明显的特点。第一，产生信号的发射机与信息源（即目标）不在一处，它可能与信息接收者在一处（单基地雷达情况），也可能在远离信息接收者的地方（多基地雷达情况）。第二，人们无法控制信息源对信号源的调制过程，只能控制发射信号的形式和参量，例如，可以控制发射信号的幅度、相位、频率和极化方式，以达到特定效果。可见，雷达系统的优化问题，可以归结为先在特定发射

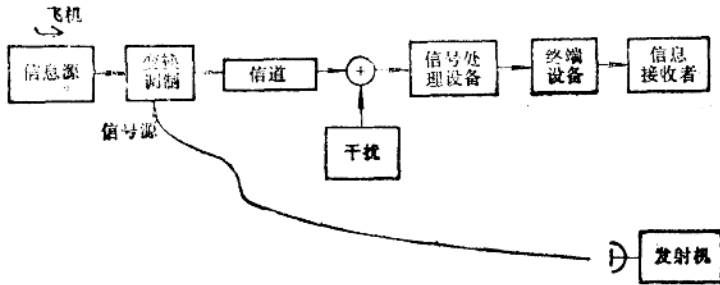


图 0.2 雷达信息传输系统模型

波形情况下寻求最佳接收机，然后选择不同的发射波形以寻求收-发联合最佳。

信号处理设备是信息传输系统的关键部件，也是本教材讨论的重点。通常假定信号处理设备的输入为有用信号与干扰之和，即假定信道引入的干扰为加性干扰。事实上，信道引入的干扰可能是乘积型的（例如衰落效应），也可能是卷积型的（例如多径效应），但在这些非加性干扰背景下研究信号的检测，会遇到更多的数学困难。由于加性干扰是最常见的干扰类型，数学上处理最为方便，因而到目前为止，对加性干扰下信号检测与参量估计问题的研究最为成熟。这也是本教材主要讨论加性干扰下的信号检测与参量估计的原因。

在接收端，输入矢量或观测矢量用 x 表示，有用信号矢量和干扰矢量用 s 和 n 表示。在加性干扰条件下，我们有 $x = s + n$ 。输入矢量可能是模拟信号 $x(t)$ ， $0 \leq t \leq T$ ，也可能是取样信号 $\{x_i\} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ，式中 T 表示转置。取样信号可以看作 n 维空间中的一个点或一个矢量，如图 0.3(a) 所示。而模拟信号 $x(t)$ 一般不能看

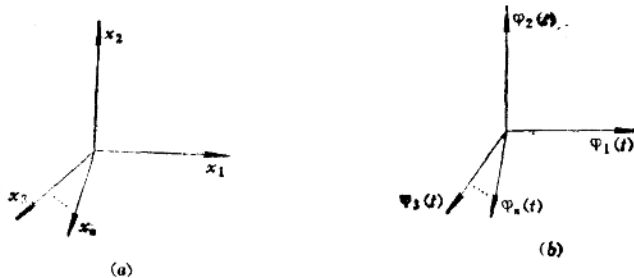


图 0.3 取样信号 $\{x_i\}$ 与模拟信号 $x(t)$ 的空间表示法
(a) 取样信号 n 维表示；(b) $x(t)$ 的 n 维近似表示。

作有限维空间中的矢量，但可看作广义的函数空间中的一个点或矢量。但如果模拟信号 $x(t)$ 限于 $[0, B]$ ，而取样信号 $\{x_i\}$ 是 $x(t)$ 的等间隔时域取样，即 $x_i = x(t)|_{t=i\Delta}$ ， $\Delta t \leq 1/(2B)$ 为取样周期，则根据有名的取样定理，可以建立两者之间的关系如下：

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_i \phi_i(t) \quad (0.1)$$

式中, $\{\phi_i(t)\}$ 是一个正交函数集, 表示为

$$\begin{aligned}\phi_i(t) &= \sin_c[(t - i\Delta t)/\Delta t] \\ &= \sin\left[\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)(t - i\Delta t)\right] / \left[\left(\frac{\pi}{\Delta t}\right)(t - i\Delta t)\right]\end{aligned}\quad (0.2)$$

由于式 (0.1) 中 $x(t)$ 完全由可数个标量 $\{x_i\}$ 确定, 如果 $x(t)$ 还是时限的, 则 $\{x_i\}$ 中仅有 n 个标量 (x_1, x_2, \dots, x_n) 明显地不为零, 则可将 $x(t)$ 看作 n 维空间中的一个点或一个矢量, 而 $\{\phi_i(t)\}$ 是该空间的基函数集, 如图 0.3(b) 所示。由于一个信号不可能既是带宽有限又是时宽有限的, 因而对带限信号而言, 取样信号 $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 只能是 $x(t)$ 的近似表示法, 它实质上是函数空间 $\{x(t)\}$ 向 n 维空间的正交投影。综上所述, 输入矢量 x 的集合称为输入空间, 记为 X , 我们有 $x \in X$ 。由于 $x = s + n$, 我们同样可以定义信号空间 S 和干扰空间 N , 且有 $s \in S, n \in N$, 因而有 $X = S + N$ 。

信号处理系统的输出用输出矢量 y 表示, 它是输出空间 Y 中的一个点, 记为 $y \in Y$ 。类似地, 输出空间可以是一个函数空间, 也可以是一个有限维空间。信号处理设备的设计, 就是规定由输入空间 X 到输出空间 Y 的变换或映射, 记为 $Y = f(x)$, 以便“最佳”地从干扰背景中发现信号和提取信号所携带的信息, 这也就是设计各种条件下的最佳接收机。最后, 信号处理系统要根据其输出作出有无信号或信号参量取值的决策, 其每一种决策便是判决空间 D 的一个元素。总之, 信号处理系统可以用图 0.4 所示的信号空间模型表示。应当指出, 最佳接收理论不仅能评价各种信息传输系统的潜在性能, 而且为评价现有各种实际系统提供了理论依据, 并为改进现有系统提出了明确的方向, 因而具有重要的理论和实践意义。

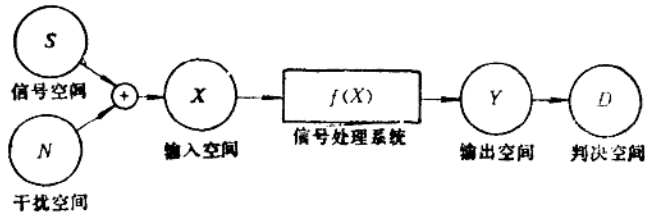


图 0.4 信号处理系统的空间表示法

本教材是关于“信号检测与参量估计”的一学期课程, 适用于电子工程有关学科的研究生和本科高年级学生。在内容上, 着重基本概念和基本方法的阐述, 并尽力结合通信与雷达方面的实例, 以便加深对问题的理解。当然, 信号检测与估计的基本方法, 可以同样用于语音处理、图像处理、模式识别、生物工程及气象、天文信号处理等, 因此本教材对这些专业的学生也有参考价值。

本教材共分五章。第一章讨论检测与估计的基本概念。例如对雷达和通信而言, 首先要从被干扰污染的输入信号中判定有无雷达回波或通信中的某种码元信号, 即判定某种特定信号存在与否, 这就是信号检测问题, 在统计学上可归结为统计假设的检验。其次, 我们希望测量信号参量以估计它所携带的信息, 例如, 测量雷达回波的多卜勒频移以估计目标速度等, 这就是统计学上的参量估计问题。由于检测与估计两个问题是密切相关的, 所以我们把其基本概念放在一章中进行讨论。第二章研究高斯白噪声背景下的

检测问题。由于这一领域的研究最为完善，其推导比较简单，便于由此掌握检测理论的基本方法，从这里入手是理所当然的。第三章从几个方面拓广第二章所研究问题的范围。首先研究高斯色噪声背景下的检测问题，其次研究噪声分布规律未知或不确知情况下的检测问题，这就是非参量检测和Robust检测，最后研究取样数可变的序列检测方法。第四章讨论信号参量估计的基本方法，包括单参量估计和多参量同时估计。第五章讨论的波形估计问题，是参量估计问题的进一步深入和发展，此时，待估计量不再是单个或数个参量，而是一个或多个时间函数。例如，模拟通信系统的目的，是要在干扰背景下最佳地估计发送端的波形，而雷达数据处理系统，是要根据带有测量误差的目标点迹数据来估计目标的航迹，因而都属于波形估计问题。功率谱估计是参量估计理论应用的一个重要而典型的方面，本来应当是本教材的一个重要内容，但考虑到大多数作者把这一内容纳入“数字信号处理”中，因而本教材不再涉及。

采用本教材进行教学时，有两种方案可供选择。其一，作为研究生课程，可用60学时左右讲完本书全部内容；其二，作为本科生选修课程，可用40学时左右讲授前两章以及第四章的前三节和第五章的前两节即可。编写过程中，我们已作了适当安排，使得这样取舍不致于产生任何衔接问题。

学习本教材的读者，需要有“概率论”、“信号与系统”和“随机信号分析”等课程的基础。如果读者学过“数理统计”，将会更有助于本教材的学习。为了使理论较紧密地联系实际，在各章末都附有习题。

第一章 检测与估计的基本理论

§ 1.1 引言

如绪论中所述, 通信与测量系统(包括雷达系统)的基本任务, 是在噪音背景下检测信号的存在并估计信号的参量。在统计学上, 都是属于统计决策问题, 我们希望所作出的判决, 平均看来引起的损失最小。本节中先研究统计判决的一般情况。下节讨论检测与估计的简单实例。在本章的其余各节中再一步步讨论检测与估计的基本问题。

首先, 用 s 表示信息传输系统发送端的真实状态, 即信号空间的元素。例如, 它可能表示信号的存在与否, 数字通信系统中一个特殊的码元, 雷达目标的距离或电话的波形等。对于检测问题, s 可能有 n 个状态, 用 s_1, s_2, \dots, s_n 表示。对于参量估计问题, s 一般有无限多个状态, 例如, 一个实数区间 $[a, b]$ 。为了讨论方便起见, 我们先假定 s 仅有 n 个状态, 且每个状态发生的概率为 $P(s_i)$, 称为先验概率。

类似地, 用 x 表示观测结果, 即输入空间的元素。例如, s_i 表示所传输的特定二进制码序列 $s_i(k)$, x_i 则表示观测到的接收序列 $x_i(k)$ 。由于信道存在噪声干扰, $x_i(k)$ 与 $s_i(k)$ 一般是不同的。设 x 有 m 种状态, 表示为 x_1, x_2, \dots, x_m 。由于噪声的随机性, m 应为无限大, 但为方便计, 暂时假定 m 是有限的。定义 $P_{ij} = P(x_i | s_j)$, 它表示发送端状态为 s_j 条件下观测结果为 x_i 的概率。于是得到如下条件概率矩阵:

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{m1} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \dots & P_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.1)$$

为了完整描述判决过程, 还需了解由于判决错误所引入的损失。我们用 d_k 表示认定发送端为 s_k 的判决, 即判决空间 D 的元素, 用 C_{ki} 表示当 s_i 为真而判决为 d_k 引入的损失或代价。于是得到如下损失矩阵(或称为代价矩阵):

$$\begin{matrix} & d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1.2)$$

统计判决的实质, 是寻求一种判决规则 $\{d_k\}$, 使决策引入的平均代价达到极小, 这种决策过程称为贝叶斯(Bayes)判决。以后还会讨论到其他最佳判决准则, 但所得到的平均代价可能会升高。

§ 1.2 简单实例

〔例 1〕当发送端真实状态仅有两种时, 即 s_{11} : $s(t) = s_1(t)$ 和 s_{01} : $s(t) = s_0(t)$, 则统计判决问题变为双择检测问题。例如, 二元数字通信中码元的检测, 雷达中对特定距离单元判定信号的存在与否, 都是双择检测的实例, 此时, 最佳接收机的任务, 是根据输入信号 $x(t)$, 判定 $s_1(t)$ 或 $s_0(t)$ 哪一个存在。在统计学上, 这相当于判决两个假设 H_1 和 H_0 之一为真的问题, 这两个假设表示为

$$\left. \begin{aligned} H_{01}: & x(t) = s_0(t) + n(t) \\ H_{11}: & x(t) = s_1(t) + n(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

由此可知, 在双择检测问题中, s 的两种状态可理解为两种假设, 假设 H_1 对应于发送端状态为 s_1 , 假设 H_0 对应于发送端状态为 s_0 。于是, 双择检测问题实质上就是二元假设检验问题。与一般决策问题的符号相同, d_1 表示作出假设 H_1 为真的判决, d_0 表示作出假设 H_0 为真的判决。

如果已知接收端输入为 x_i ($i = 1, 2, \dots$), 而作出的判决为 d_1 , 则平均损失显然为

$$r(d_1 | x_i) = C_{11}P(H_1 | x_i) + C_{10}P(H_0 | x_i) \quad (1.4)$$

式中, 根据贝叶斯定理有

$$P(H_j | x_i) = P(x_i | H_j)P(H_j) / \left[\sum_k P(H_k)P(x_i | H_k) \right] \quad (1.5)$$

注意, 式 (1.5) 中 $P(H_j)$ 为假设 H_j 发生的先验概率, $P(H_j | x_i)$ 称为 x_i 已知条件下 H_j 发生的后验概率。同样, 如果作出的判决为 d_0 , 则平均损失为

$$r(d_0 | x_i) = C_{01}P(H_1 | x_i) + C_{00}P(H_0 | x_i) \quad (1.6)$$

上面两式中, $r(d_0 | x_i)$ 与 $r(d_1 | x_i)$ 表示已知输入 x_i 条件下, 判决为 d_0 与 d_1 的平均代价 (也称为条件代价), 贝叶斯准则要求总平均代价即平均风险达到最小, 总平均代价定义为上述条件代价对所有 x_i 再平均。显然, 只要每次判决都根据低的条件代价给出, 即对于特定输入 x_i , 如 $r(d_1 | x_i) \leq r(d_0 | x_i)$, 判为 d_1 , 如 $r(d_1 | x_i) > r(d_0 | x_i)$, 判为 d_0 , 则总能保证平均风险为最小。

应用式 (1.4)~式 (1.6) 可以证明, $r(d_1 | x_i) \leq r(d_0 | x_i)$ 等效于

$$\Lambda \triangleq \frac{P(x_i | H_1)}{P(x_i | H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \cdot \frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}} \triangleq \Lambda_0 \quad (1.7)$$

式中, Λ 为假设 H_1 和 H_0 成立的条件下, 接收端为 x_i 的条件概率之比, 简称似然比。于是, 判决过程变为求出特定输入的似然比, 然后与一门限 Λ_0 比较。如果 Λ 大于或等于 Λ_0 , 判决假设 H_1 为真, 反之, 则判假设 H_0 为真。 Λ_0 值由代价矩阵式 (1.2) 及两种假设的先验概率决定。对于 x_i 仅有 m 种可能值的情况, Λ 由条件概率矩阵式 (1.1) 决定。

〔例 2〕作为双择检测问题的特例, 现在研究在加性噪声背景下测量只能为 1 伏或 0 伏的直流电压。这类似于二进制信号通过有噪声的信道后的检测问题。假定加性噪声服从均值为零、方差为 σ^2 的正态分布。

如果我们仅根据 x 的一次测量值作出判决, 这意味着输入空间是一维的。即使这样, x 的可能取值也是无限多个, 不能简单应用例 1 的结果。此时, 式 (1.1) 的条件概率矩阵应改为条件概率密度函数如下:

$$\begin{matrix} s & x \\ H_1 & \left[\begin{matrix} p(x|H_1) \end{matrix} \right] \\ H_0 & \left[\begin{matrix} p(x|H_0) \end{matrix} \right] \end{matrix} \quad (1.8)$$

假设 H_1 (1 伏或“信号存在”) 出现的先验概率为 $P(H_1) = P$, H_0 (0 伏或“信号不存在”) 的先验概率为 $P(H_0) = Q$ 。由于噪声统计特性已知为高斯分布, 因而式 (1.8) 中两种条件概率密度函数易于求出, 并示于图 1.1。图中

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-1)^2/(2\sigma^2)}$$

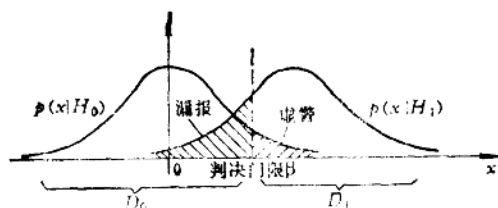


图 1.1 (例 2) 中的条件概率密度函数及虚警和漏报概率图示

当假设 H_0 为真而判决为 d_1 , 即本来无信号而判为有信号, 称为虚警。虚警发生的概率表示为 $P(d_1|H_0)$, 虚警引入的损失称为虚警代价, 记为 C_f 。当假设 H_1 为真而判决为 d_0 , 即当有信号时判为无信号, 称为漏报。漏报概率表示为 $P(d_0|H_1)$, 漏报引入的损失称为漏报代价, 记为 C_m 。如果认为正确的判决没有损失, 则代价矩阵式 (1.2) 可写为

$$\begin{matrix} & d_1 & d_0 \\ H_1 & \left[\begin{matrix} 0 & C_m \end{matrix} \right] \\ H_0 & \left[\begin{matrix} C_f & 0 \end{matrix} \right] \end{matrix} \quad (1.9)$$

根据与[例 1]相同的思路, 如果已接收到 x , 选择假设 H_1 的条件代价为

$$r(d_1|x) = 0 \cdot P(H_1|x) + C_f P(H_0|x) \quad (1.10)$$

显然, 上式是 x 的函数。同样, 选择假设 H_0 的条件代价为

$$r(d_0|x) = C_m P(H_1|x) + 0 \cdot P(H_0|x) \quad (1.11)$$

判决的平均风险, 应当等于上述条件代价对所有 x 再平均。自然, 如果对每个 x 值都选择 $r(d_1|x)$ 和 $r(d_0|x)$ 中之较小值作为判决标准, 就能保证平均风险达到最小。

由于 x 不是离散的随机变量, 贝叶斯定理式 (1.5) 可写为

$$P(H_0|x) = \frac{P(H_0) p(x|H_0)}{\sum_k P(H_k) p(x|H_k)} \quad (1.12)$$

式中, $p(x|H_i)dx$ 为假设 H_i 条件下, x 处于区间 $[x, x+dx]$ 内的概率。显然, 如果 $p(x|H_i)$ 为有限值且连续 (后一项并不是必要条件), 上式中分子分母的 dx 可以消去。

应用与[例 1]相似的步骤, 可以证明: $r(d_1|x) \leq r(d_0|x)$ 等效于

$$\Lambda(x) \triangleq \frac{p(x|H_1)}{p(x|H_0)} \geq \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \frac{C_{10} - C_{00}}{C_{01} - C_{11}} = \frac{QC_1}{PC_m} \triangleq \Lambda_0 \quad (1.13)$$

式中, $\Lambda(x)$ 为似然比, Λ_0 为似然比门限。

对于本例的情况, $\Lambda(x)$ 极易计算。因为

$$p(x|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

$$p(x|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-1)^2/(2\sigma^2)}$$

则根据式 (1.13) 有

$$\Lambda(x) = e^{(2x-1)/(2\sigma^2)} \quad (1.14)$$

于是, 判决规则变为: 如果

$$e^{(2x-1)/(2\sigma^2)} \geq \Lambda_0$$

则判为有信号, 否则判为无信号。这一判决规则可写为下列常见形式:

$$\frac{H_1}{H_0} \geq \Lambda_0 \quad (1.15)$$

上式经简单运算得

$$x \geq \frac{1}{2} + \ln \Lambda_0 \triangleq \beta \quad (1.16)$$

式 (1.14)~式 (1.16) 画成图形示于图 1.2。

该图表明, 对于这个例子, 贝叶斯判决变成将测量值 x 本身直接与门限 β 比较。如 $x \geq \beta$, 即在区域 D_1 判决有信号; 反之, 如果 $x < \beta$,

即在区域 D_0 判决无信号。从本例可以看出, 双择检测的实质是对输入空间进行对分, 即划分成 D_1 和 D_0 两个区域。贝叶斯准则给出了这种划分的原则, 使平均风险达到极小。

根据图 1.1 和图 1.2, 极易计算虚警概率和漏报概率,

$$\left. \begin{aligned} P(d_1|H_0) &= \int_{D_1} p(x|H_0) dx \\ P(d_0|H_1) &= \int_{D_0} p(x|H_1) dx \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

在假设 H_0 和 H_1 条件下判决为 d_1 和 d_0 所引入的平均代价也可称为条件代价, 用 r_0 和

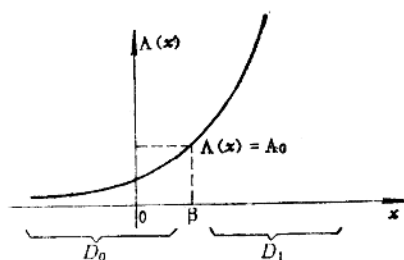


图 1.2 式 (1.14) 的似然比图形

r_1 表示:

$$r_0 = C_l P(d_1 | H_0) \quad (1.18 a)$$

$$r_1 = C_m P(d_0 | H_1) \quad (1.18 b)$$

但它们不同于式 (1.4) 和 (1.6) 所定义的条件代价 $r(d_1 | x_i)$ 和 $r(d_0 | x_i)$, 后者以已知 x_i 为条件, 而 r_0 和 r_1 以已知 H_0 和 H_1 是真为条件。为了区别起见, 今后称 r_0 和 r_1 为条件风险。于是, 平均风险也可表示为条件风险对先验概率再平均:

$$R = P r_1 + Q r_0 \quad (1.19)$$

贝叶斯准则就是使上式的平均风险 R 达到极小的检测准则。

〔例 3〕在上例中, 虽然式 (1.1) 矩阵中的观测状态 x_i 有无限多个, 但发送端真实状态 s_i 的数目为 2, 因而是双择检测问题。但在很多情况下, s_i 可能有 m 个状态, 例如, 发送端可能发送 m 个不同的字母, 或者 m 个可能的码字, 这相当于信号空间有 m 个元素。这样的问题便属于多择一检测或称为多元假设检验问题。

如果发送端真实状态 s_i 和对它的判决 d_i 都是无限多个, 即信号空间与判决空间都有无限多个元素, 则问题变为参量估计问题。此时, 发送端的信号可能取决于在一个区间内取值的参量 α , 因而信号可表示为 $s(t, \alpha)$ 。例如, α 可表示雷达目标的距离, 它可以取雷达威力区内的任意值。关于参量估计问题, 将在本章最后一节详细讨论。现仅用本例说明参量估计与检测问题之间的紧密关系。

本例仍然讨论〔例 2〕中在噪声背景下测量直流电压的问题, 但被测电压 α 不再只取两个数值, 而是具有某一概率密度函数 $p(\alpha)$ 的随机变量, 因而可以在某个区间上取任意数值。为简单起见, 本例中假定 $p(\alpha)$ 为零均值, 方差为 σ_a^2 的高斯分布。与〔例 2〕一样, 设背景噪声的分布仍是零均值, 方差为 σ_n^2 的高斯分布, 则 α 已知条件下 x 的条件概率密度函数 $p(x | \alpha)$ 可写为

$$p(x | \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} e^{-(x-\alpha)^2 / (2\sigma_n^2)} \quad (1.20)$$

关于代价, 由于 α 不再仅取离散值, 因而用式 (1.2) 的代价矩阵来指定代价不再适用。此时, 不仅 α 可取无限多个数值, 而且 d_i 也可能取无限多个数值。为方便计, 用 $\hat{\alpha}$ 表示对 α 的估计值, $\hat{\alpha}$ 实际上是对 α 作出的判决, 相当于检测情况下的 d_i 。于是, 代价只能用 α 和 $\hat{\alpha}$ 的一个函数来表示。这个问题将在本章最后一节详细讨论。现在我们暂时选用误差 $(\alpha - \hat{\alpha})$ 的平方来表示代价函数, 即 $C(\alpha, \hat{\alpha}) = (\alpha - \hat{\alpha})^2$ 。这样作的合理性在于, 估计误差越大, 代价越大, 而且是以平方关系随误差增大。

根据条件概率乘法公式, 在已得到观测值 x 的条件下, α 的后验概率密度函数为

$$p(\alpha | x) = \frac{p(\alpha) p(x | \alpha)}{p(x)} = \frac{1}{2\pi \sigma_a \sigma_n p(x)} e^{-\alpha^2 / (2\sigma_a^2)} e^{-(x-\alpha)^2 / (2\sigma_n^2)} \quad (1.21)$$

式中, $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x | \alpha) p(\alpha) d\alpha$, 它与 α 无关。式 (1.21) 经过简单运算, 可得

$$p(\alpha | x) = \text{常数} \cdot e^{-(\alpha - c)^2 / (2\sigma_c^2)} \quad (1.22)$$

式中 $c = \sigma_a^2 / (\sigma_a^2 + \sigma_n^2)$

于是, 在观测值 x 已知条件下, 将 α 判决为 $\hat{\alpha}$ 的平均代价, 即风险为

$$\begin{aligned}
 R &= E_{\alpha}(\alpha - \hat{\alpha})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 p(\alpha | x) d\alpha \\
 &= \text{常数} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha - \hat{\alpha})^2 e^{-(\alpha - cx)^2 / (2\sigma_n^2)} d\alpha
 \end{aligned} \quad (1.23)$$

显然，只有当 $\hat{\alpha} = cx$ 时，式 (1.23) 式达到极小。由此可见，为了得到 α 真实数值的最佳估计值，应当用一个小于 1 的常数 c 乘上测量值，如图 1.3 所示。

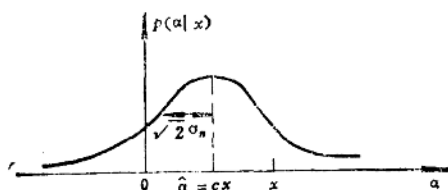


图 1.3 [例 3] 的后验概率密度 $p(\alpha|x)$ 图形及 α 的最佳估计值 $\hat{\alpha}$

当 $\hat{\alpha} = cx$ 时，该最佳估计值的风险 R_0 ，也就是 $\hat{\alpha}$ 对 α 的最小均方误差为

$$R_0 = E_{\alpha}\{(\alpha - \hat{\alpha})^2\} = E_{\alpha}\{(\alpha - cx)^2\} = c\sigma_n^2 \quad (1.24)$$

为了对比，如果取 $\hat{\alpha} = x$ ，即直接用测量值 x 作为估计值，则风险变大，且等于

$$R = E_{\alpha}\{(\alpha - \hat{\alpha})^2\} = E_{\alpha}\{(\alpha - x)^2\} = \sigma_n^2 \quad (1.25)$$

对比式 (1.24) 和式 (1.25) 可见，应用 α 的估计 $\hat{\alpha} = cx$ 能得到最小的风险。

§ 1.3 双择检测及其最佳准则

现在回头集中研究判决理论的最简单情况——双择检测问题。此时，信息发送端只有两种状态，即对应于两种假设 H_1 和 H_0 ，如式 (1.3) 所示。在数字通信中， $s_1(t)$ 可能代表“1”码的波形， $s_0(t)$ 代表“0”码的波形。在雷达中， $s_1(t)$ 代表雷达回波信号波形， $s_0(t) = 0$ 表示无回波信号。设 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$ 分别表示 H_0 和 H_1 的先验概率。由于在双择检测问题中，两个假设只能有一个为真，且必有其中之一为真，因而有

$$P(H_1) = 1 - P(H_0) \quad (1.26)$$

应当指出，[例 1] 和 [例 2] 仅讨论了双择检测较简单的情况，即根据接收波形的一次取样值 x 作出判决。此时，输入空间是一维的。为了提高判决的质量，减小噪声干扰随机性的影响，一般需要对接收波形进行多次测量或多次取样，例如， n 次取样。此时，输入空间为 n 维空间，接收样本矢量表示为 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。下面在这种更广泛的意义下来讨论双择检测问题。

如前所述，双择检测问题实质上是对输入空间 X （一般为 n 维空间）进行对分，即划分为区域 D_1 和 D_0 。如果 $\mathbf{x} \in D_1$ ，则判决 H_1 为真；如 $\mathbf{x} \in D_0$ ，则判决 H_0 为真。这可用图 1.4 示意地表示^①。双择检测的基本问题是，如何决定区域 D_1 和 D_0 的划分，使

① 考虑到图 1.4，在本教材下面的叙述中，将虚警概率改记为 $P(D_1|H_0)$ ，漏报概率记为 $P(D_0|H_1)$ ，等等，即将前两节符号中的 d_0 改为 D_0 ， d_1 改为 D_1 即可。

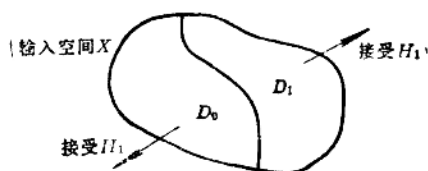


图1.4 双择检测示意图

判决在某种意义上为最佳。贝叶斯准则就是规定 D_1 和 D_0 的划分, 应使平均风险为最小。下面详细研究贝叶斯准则和其他最佳准则。

1.3.1 贝叶斯准则

首先定义 C_{ij} 表示假设 H_j 为真, 却选择了假设 H_i 的代价。在双择检测情况下, i 和 j 只能为 0 或 1。例如在雷达中 C_{10} 表示本来无信号而判为有信号的代价, 即虚警代价。例如, 这可能代表动用我方手段去对付一个不存在的目标所付出的代价。 C_{01} 表示漏报代价。例如, 它可能代表由于未及时发现目标, 让敌方完成了特定任务而付出的代价。 C_{00} 和 C_{11} 表示正确判断的代价, 通常假定它们为零。

已知 H_1 为真的条件下, 作出判决的平均代价称为假设 H_1 下的条件风险, 记为 r_1 , 且有

$$r_1 = P(D_0|H_1)C_{01} + P(D_1|H_1)C_{11} \quad (1.27)$$

显然, [例 2] 中式 (1.18 b) 是 (1.27) 的特例 ($C_{11} = 0$)。同样, 已知 H_0 为真的条件下, 作出判决的平均代价称为假设 H_0 下的条件风险, 记为 r_0 , 类似式 (1.27) 有

$$r_0 = P(D_0|H_0)C_{00} + P(D_1|H_0)C_{10} \quad (1.28)$$

同样, 式 (1.18 a) 是式 (1.28) 的特例 ($C_{00} = 0$)。

由于事先并不知道 H_1 或 H_0 为真, 因而总平均代价, 即平均风险应等于各条件风险按其先验概率进行平均, 即

$$R = P(H_0)r_0 + P(H_1)r_1 = P(H_0)[P(D_0|H_0)C_{00} + P(D_1|H_0)C_{10}] + P(H_1)[P(D_0|H_1)C_{01} + P(D_1|H_1)C_{11}] \quad (1.29)$$

这与 [例 2] 中的式 (1.19) 一致。于是, 贝叶斯准则要求这样地确定判决区域 D_0 和 D_1 , 使式 (1.29) 中平均风险 R 达到极小。这个极小化的风险又称为贝叶斯风险。

下面将要说明, 贝叶斯准则可以化为似然比准则, 因而它是似然比准则的特例。由于这里仅研究双择假设检验, 有 $P(D_0|H_1) = 1 - P(D_1|H_1)$ 和 $P(D_0|H_0) = 1 - P(D_1|H_0)$ 。将这些关系式代入式 (1.29), 则有

$$R = P(H_1)C_{01} + P(H_0)C_{00} + P(H_0)(C_{10} - C_{00})P(D_1|H_0) - P(H_1)(C_{01} - C_{11})P(D_1|H_1) \quad (1.30)$$

显然, 检测概率 $\ominus P(D_1|H_1)$ 和虚警概率 $P(D_1|H_0)$ 可表示为

$$\left. \begin{aligned} P(D_1|H_0) &= \int_{D_1} p(\mathbf{x}|H_0)d\mathbf{x} \\ P(D_1|H_1) &= \int_{D_1} p(\mathbf{x}|H_1)d\mathbf{x} \end{aligned} \right\} \quad (1.31)$$

⊖ 在统计学上, 检测概率称为检验的势, 虚警概率称为检验的尺度。