JISUAN

SHUILIXUE JICHU

计算水力学基础

主　编　刘沛清

黄河水利出版社

JISUAN
SHUILIXUE JICHU

计算水力学基础

责任编辑 张思敬 封面设计 袁　璐
责任监制 温红建 责任校对 张晓霞

ISBN 7-80621-514-X

9 787806 215142 >

ISBN 7-80621-514-X/TV·245

定 价: 16.00 元

计算水力学基础

主　编　刘沛清
副主编　刘桂芳　谢维义　李俊义

黄河水利出版社

图书在版编目（CIP）数据

计算水力学基础/刘沛清主编 —郑州：黄河水利出版社，2001.12

ISBN 7-80621-514-X

Ⅰ.计… Ⅱ.刘… Ⅲ.水力计算 Ⅳ.TV131.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 079495 号

出 版 社:黄河水利出版社

地址:河南省郑州市金水路 11 号　　邮政编码 450003

发行单位:黄河水利出版社

发行部电话及传真 0371-6022620

E mail:yrcp@public2. zz ha cn

承印单位:黄河水利委员会印刷厂

开本:850mm×1 168mm　1/32

印张:7.25

字数:181 千字　　印数:1-1 300

版次:2001 年 12 月第 1 版　　印次:2001 年 12 月第 1 次印刷

书号:ISBN 7-80621-514-X/TV·245　　定价:16.00 元

前　　言

在流体力学和水力学中，经常碰到大量的偏微分方程和偏微分方程组，这些偏微分方程包括椭圆型的、双曲型的、抛物型的和混合型的，还有其它一些非线性偏微分方程。而且对于常遇到的实际问题，往往涉及到一些复杂的边界条件，精确分析和求解这些方程是相当困难的，有时甚至是不可能的。为了寻求这些方程的近似解，人们引进了有限差数值解法。应用这一方法求解方程，过去由于工作量太大，因而在水力学中很少用；今天，随着计算机的出现和广泛应用，采用有限差数值解法寻求近似解的过程相当便捷，因此已成为有效途径。

在早期，水力学和流体力学曾被人们分成理论分析和物理实验两大分支，它们在整个学科的发展过程中起着同等重要的作用。近几十年来发展起来的“数值模拟”或“数值试验”，同样对水力学和流体力学的发展起着十分重要的作用，形成该学科的第三个分支，补充了理论分析和物理试验的不足之处。

作为一门学科，计算水力学有它自己独特的分析方法，这一点读者在学习过程中会有所感受的。编写本书的主要目的是：介绍一些比较重要的数值分析法，如有限差分法、特征线法、有限元法等，同时针对具体问题，阐明计算水力学的一般原理。主要内容包括：水力学基本方程、数值计算基础、一元流的数值计算方法等。可供水利科研工作者参考。

因编者水平有限，书中难免有错误之处，恳请读者批评指正。

作　　者

2001 年 10 月于北京

目　　录

第一章　水力学基本方程

本章内，主要讨论流体力学和水力学中几个很重要的典型方程，并给出各方程相应的定解条件。这里主要以控制体上的连续方程和动量方程(Continuity eguation and Momentum eguation)导出微元体上的连续方程和运动方程。

§1-1　连续方程和动量方程

在流场中，任取一控制体(Control－Volume)，其控制面(Control－Surface)为如图1-1所示实线，在 t 时刻该 CV 内所包含的流体质点系统与它重合，在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，该质点系统运动到新的位置如图1-1所示的虚线部分。设流体的质量密度为 ρ，则控制体(CV)内所包含的流体质量为 m：$m=\iiint\limits_{CV}\rho\delta V$

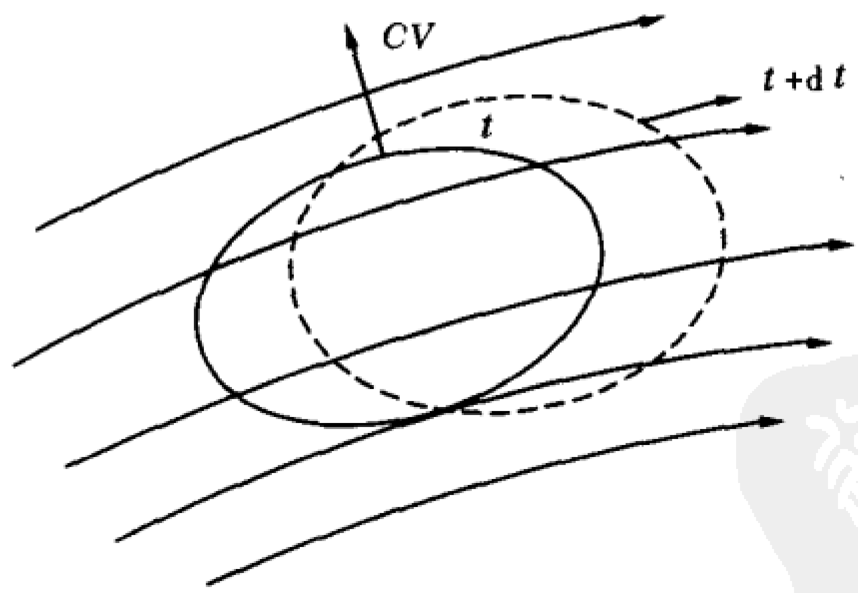

图1-1

由质量守恒原理可知，该质量在运动过程中保持不变。即

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$$

由流体力学可知 $\frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V = \nabla \cdot \vec{v}$

则 $$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{CV}\rho\delta V$$

$$= \iiint_{CV}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\delta V + \iiint_{CV}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta V$$

$$= \iiint_{CV}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\delta V + \iiint_{CV}\rho\vec{\nabla}\cdot v\delta V = 0$$

即 $$\iiint_{CV}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\vec{v}\right)\delta V = 0 \tag{1-1}$$

或 $$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}\rho\delta V + \oint\!\!\oint_{CS}(\vec{v}\cdot\vec{n})\rho\delta A = 0 \tag{1-2}$$

由 CV 的任意性，假定被积函数连续，则式(1-1)内的被积函数必为零，于是有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad \left(\text{或}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0\right) \tag{1-3}$$

与 $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \quad \left(\text{或}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0\right) \tag{1-4}$$

在直角坐标系中，表达式为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{1-5}$$

其中，$\vec{v} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$

对于不可压流体，$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$，则由式(1-3)可知

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

及 $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1-6}$$

同样，我们对 CV 建立动量方程，设质量力为 $\vec{F}$，表面力为

$\vec{p}_n$,由动量定理可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{CV}\rho\vec{v}\,\delta V=\iiint\limits_{CV}\rho\vec{F}\,\delta V+\oint\limits_{CS}\vec{p}_n\delta A \tag{1-7}$$

而 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{CV}\rho\vec{v}\,\delta V=\iiint\limits_{CV}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\rho\delta V+\iiint\limits_{CV}\vec{v}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\delta V)$$

由连续方程可知,上式第二项为零。即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{CV}\rho\vec{v}\,\delta V=\iiint\limits_{CV}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\rho\delta V$$

由应力分析可知,$\vec{p}_n=n_x\vec{p}_x+n_y\vec{p}_y+n_z\vec{p}_z$

设,$P=\vec{p}_x\vec{i}+\vec{p}_y\vec{j}+\vec{p}_z\vec{k}$,(叫做应力张量)

$$P=\begin{bmatrix}p_{xx} & p_{xy} & p_{xz}\\ p_{yx} & p_{zy} & p_{zz}\\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz}\end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_n=\vec{n}\cdot P$$

由高斯定理,可知

$$\oint\limits_{CS}\vec{p}_n\delta A=\oint\limits_{CS}\vec{n}\cdot P\delta A=\iiint\limits_{CV}\nabla\cdot P\delta V$$

将上述结果代入式(1-7)中,得

$$\iiint\limits_{CV}\left(\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}-\rho\vec{F}-\nabla\cdot P\right)\delta V=0$$

因 CV 的任意性,假定被积函数为连续函数,被积函数恒为零。

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{F}+\nabla\cdot P \tag{1-8}$$

或 $$\rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=\rho F_i+\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}$$

这就是微分形式的动量方程。

在直角坐标系中,表达式为

$$
\begin{cases}
\rho \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \rho F_x + \dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zx}}{\partial z} \\
\rho \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho F_y + \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\
\rho \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \rho F_z + \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}
\end{cases}
\tag{1-9}
$$

方程(1-5)、(1-9)适应于理想流体和粘性流体,恒定流,非恒定流。它们是流体力学、水力学中最基本的方程式。

下面我们分别对理想流体和粘性流体加以讨论。

§1-2 理想流体运动的基本方程

对于理想流体,由于 $\mu=0$,则切应力为零。这时,应力张量 P 中只有法向应力。

$$
P = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -[\,\mathrm{I}\,]p
$$

将上式代入式(1-9)中得到 Euler 方程。

$$
\begin{cases}
\rho \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \rho F_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} \\
\rho \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho F_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} \\
\rho \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \rho F_z - \dfrac{\partial p}{\partial z}
\end{cases}
\tag{1-10}
$$

或
$$
\rho \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \vec{F} - \nabla p
$$

$$
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p
$$

$$
\rho \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \rho F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}
$$

方程(1-10)及式(1-5)就构成了理想流体运动的基本方程组。

对不可压无粘性流体(理想流体)的方程为:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \rho\vec{F} - \nabla p \end{cases} \tag{1-11}$$

我们从式(1-11)可以看出,这是一组封闭方程组,理论上当给定初始条件和边界条件时,就可以唯一地确定未知量 p 和 $\vec{v}$。

1. 初始条件

所谓初始条件,是指初始时刻 $t = t_0$ 时,流体运动应该满足的初始状态。

即

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r},t)\big|_{t=t_0} = \vec{v}_0 \\ p(\vec{r},t)\big|_{t=t_0} = p_0 \end{cases}$$

2. 边界条件

所谓边界条件,是指流体运动边界上方程组的解应满足的条件。

(1)无穷远处:$\vec{r}\to\infty$时

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_\infty \\ p = p_\infty \end{cases}$$

(2)固壁处:流体在固壁处,对理想流体应满足不穿透条件,对粘性流体应满足不滑移条件。

对理想流体:不穿透条件为

$$(v_n)_{流} = (v_n)_{固}$$

或

$$(v_n)_f = (v_n)_s$$

对于静止的固壁:$(v_n)_{固} = 0$,则有

$$\vec{v}\cdot\vec{n}\big|_s = 0$$

对于粘性流体:在固壁处的不滑移条件为

$$\begin{cases}(v_n)_f=(v_n)_s\\(v_\tau)_f=(v_\tau)_s\end{cases}$$

其中，$(v_\tau)_f$ 表示流体在固壁面的切向速度。

如果固壁为静止的，则有：$(\vec{v})_s=0$。这时在固壁处，紧贴固壁的那层流体，由于粘性的作用，和固壁无相对运动，则也为静止的。

即
$$(\vec{v})_f|_s=0\quad\begin{cases}(v_n)_f=0\\(v_\tau)_f=0\end{cases}$$

(3)自由面：在自由水面处

$$p=p_a$$

式中，p_a 为大气压强。

对于理想有势流动：$\vec{\omega}=\nabla\cdot\vec{v}$

由不可压条件
$$\nabla\cdot\vec{v}=0$$

由此可知，存在速度势函数 φ，$\vec{v}=\nabla\varphi$

即
$$\vec{v}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

代入连续方程可知：

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=0$$

或
$$\nabla^2\varphi=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\tag{1-12}$$

为 Laplace 方程。

对于理想不可压缩无旋流动，在质量力有势的条件下，由运动方程可得到拉格朗日积分。即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\pi+\frac{p}{\rho}=c(t)\tag{1-13}$$

其中，
$$\pi=-\int F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

$$\vec{F}=-\nabla\pi\quad(\text{力势函数})$$

(1-12)、(1-13)两式为理想不可压缩无旋流动的基本方程式。

初始条件：

$$\begin{cases} \nabla\varphi(\vec{r}\cdot t)|_{t=t_0}=\vec{v}_0 \\ p=p_0 \end{cases}$$

边界条件：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\Gamma_1}=v_n \\ \varphi|_{\Gamma_2}=\varphi_2 \end{cases}$$

或，在 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ 上给定 φ 和流量 Q。

求解(1-12)、(1-13)方程的过程是，先由(1-12)方程确定 φ，然后代入式(1-13)确定 p。

对于二元不可压缩理想液体无旋流动，不但存在流函数 ψ，也存在势函数 φ。即

$$\begin{cases} u=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi}{\partial y} \\ v=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=-\dfrac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

在质量力只有重力的情况下，基本方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \quad (\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2})=0 \\ \dfrac{p}{\rho}+gz+\dfrac{v^2}{2}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=c(t) \end{cases} \tag{1-14}$$

§1-3 粘性流体运动的基本方程

对于粘性流体，由于 $\mu\neq0$，则切应力不为零，这时应力张量 P 中存在六个独立分量，由广义牛顿内摩擦定理，可得应力与速度变形率之间的关系(不可压缩流体)为

$$P=-pI+2\mu S \tag{1-15}$$

式中，S 为速度变形率。

$$S=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z})\\ \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$

将式(1-15)代入式(1-9)中,考虑到$\nabla\cdot\vec{v}=0$,得出水力学与流体力学中著名的 Navier－Stokes 方程。

$$\begin{cases}\rho\frac{\partial u}{\mathrm{d}t}=\rho F_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u\\ \rho\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\rho F_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 v\\ \rho\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\rho F_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 w\end{cases}\tag{1-16}$$

或

$$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{F}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}$$

式(1-16)连同连续方程

$$\nabla\cdot\vec{v}=0\tag{1-17}$$

构成了粘性流体运动的基本方程。理论上讲,式(1-16)和式(1-17)是一组封闭方程。给定适当的边界条件和初始条件,就可以唯一地确定未知函数 p 和 $\vec{v}$。

其边界条件和初始条件与理想流体的情况一样,只是固壁处的不穿透条件要变为无滑移条件,即由粘性的影响紧靠壁处的一层流体与固壁无相对滑移。即

$$\vec{v}|_{S_b}=0\tag{1-18}$$

式中,S_b 为固壁表面。

§1-4　一元有压非恒定流基本方程

众所周知,一元流分析在水力学中被称为总流分析法,即把水

力要素看做是沿流程的空间坐标和时间的函数。用 s(有些书上 x)表示流程坐标,t 表示时间。即

$$\vec{V}=\vec{V}(s,t) \qquad p=p(s,t)$$

或

$$\vec{V}=\vec{V}(x,t) \qquad p=p(x,t)$$

这里为了推导方便,用 x 表示流程坐标。所谓流程坐标,就是沿着流线方向取做 x 坐标,按一元总流分析的原理,把垂直于流线方向的速度和加速度忽略不计。其数学表达式为

$$v\approx 0 \qquad w\approx 0 \qquad u=u(x,y,z,t) \tag{1-19}$$

这里,

$$V(x,t)=\frac{1}{A}\int_A u(\vec{r},t)\delta A$$

式中,A 为总流的过水断面面积。

一、连续方程式

以图 1-2 所示的管流为例,设 α 为 x 与水平方向的夹角,H 为水头。有

$$H=z+\frac{p}{\gamma}$$

由式(1-3)可知,单位时间、单位体积的连续方程为

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0$$

展开为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}+\rho(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})=0$$

由一元流假定,把上式中包含 v、w 项忽略,有

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

应该指出:这里 $u\neq V(x,t)$,也就是 $u=u(x,y,z,t)$。

所以,我们需要对上式求断面平均值。在过水断面 A 上积分时,因为是对横向积分,可暂时把 x,t 看做常数,并且设被积函数

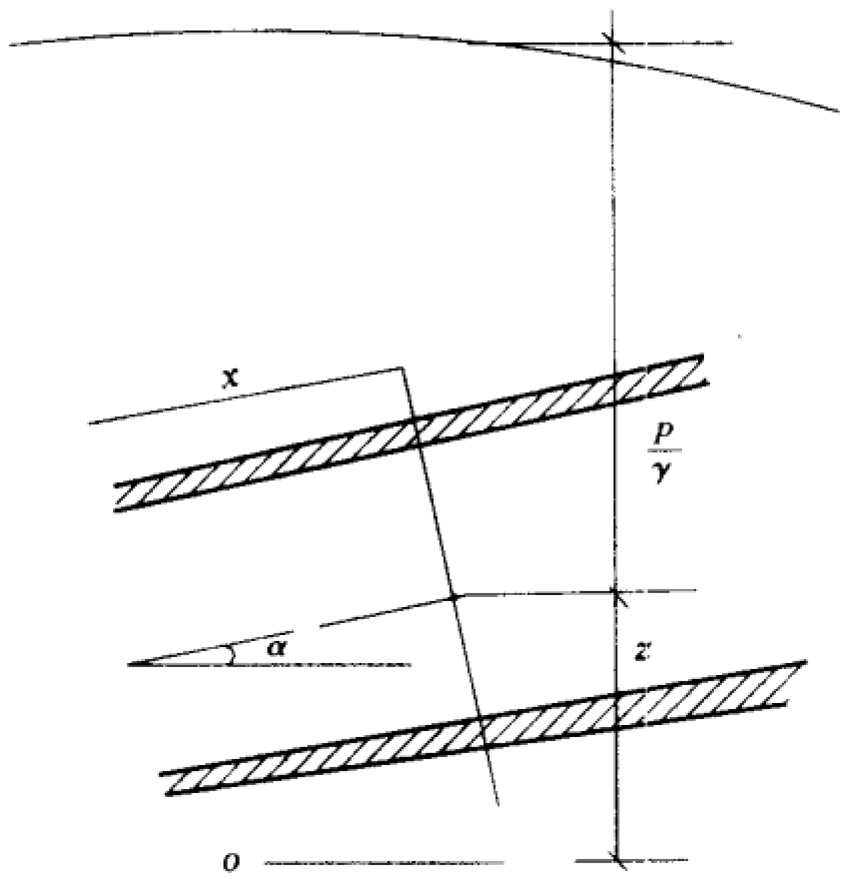

图 1-2

连续且有连续的偏导数,可以把积分号内的求导变成积分号外的求导。又由于 $\rho=\rho(x,t)$不是断面 A 上点的函数,则

$$\int_A \frac{\partial\rho}{\partial t}\delta A+\int_A\rho\frac{\partial u}{\partial x}\delta A+\int_A u\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta A=0$$

改成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\int_A\delta A\right)+\rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_A u\delta A\right)+\frac{\partial\rho}{\partial x}\int_A u\delta A=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+\rho\frac{\partial}{\partial x}(VA)+VA\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho AV)=0 \tag{1-20}$$

重新整理后,可写成更一般的形式

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{1-21}$$

因为 ρ、A 的增量,都是由 p 的增量引起,所以

$$\begin{cases} \mathrm{d}A = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p \\ \mathrm{d}\rho = \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p \end{cases}$$

代入上式得

$$\left(\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

令
$$\frac{1}{\rho a^2} = \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$$

则连续方程为
$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + a^2\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \tag{1-22}$$

其中，
$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} + \dfrac{1}{A}\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}\right)}} \tag{1-23}$$

式中，a 叫做水击波速。

由流体弹性模量的定义可知

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{K} \tag{a}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}A}{A} = \frac{1}{\mathrm{d}p}\frac{\frac{\pi}{2}D\mathrm{d}D}{\frac{\pi}{4}D^2} = 2\frac{\mathrm{d}D}{D}\frac{1}{\mathrm{d}p}$$

由材料力学可知
$$\frac{\mathrm{d}D}{D} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{E}$$

对于均质薄壁圆管

$$\sigma = \frac{pD}{2e},\quad \mathrm{d}\sigma = \frac{D}{2e}\mathrm{d}p$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}D}{D} = \frac{D\mathrm{d}p}{2eE}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = \frac{D}{E\cdot e} \tag{b}$$

将(a)、(b)两式代入式(1-23)中，得