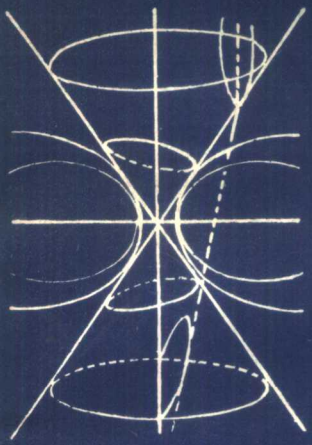




高考 数学试题 (苏联)

[苏] 叶·奥斯特洛夫斯基 等编著

刘 宋 根 译



湖南大学出版社

苏联高考数学试题

增 订 二 版

(苏) 叶·奥斯特洛夫斯基
伊·安吉列伊科
帕·阿特拉舍诺克
拉·科兹洛娃

编 著

明斯克高级火箭工程学校高等数学教研室主任，教育科学侯补博士，副教授叶·古尔斯基

审 校

湖南大学出版社

内 容 提 要

本书收集了苏联高考笔试题1035道、口试题288道,采取成套结构编排,每套题目成一完整体系。试题既注意了知识的全面性,又注意了分析问题和解决问题的能力,试题范围覆盖了中学的全部教学内容。

本书具有逻辑性强、结构严谨的特色。

书后附有答案(较浅的试题)、提示(中等难度的试题)和解答(难度较大的试题)、便于自学。

本书反映了苏联七十年代末、八十年代初应届高考的水平及中等教育的特点和要求。

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

на вступительных экзаменах в вузах

苏联高考数学试题

刘根译

☆

湖南大学出版社出版

☆

湖南大学印刷厂印刷

湖南省新华书店发行

☆

787×1092 毫米

32开本

14.5 印张

340 千字

1985年12月第一版

1985年12月第一次印刷

印数 00001—11000

统一书号: 7212·1

定价: 2.50元

前 言

本书是按新教学大纲（高考考生教学大纲方案A）为学完10年的应届中学毕业生编辑的数学参考书。书中收集了白俄罗斯1978年到1980年各高等工程院校提供的笔试题和口试题。

所有试题均取自本书第一版，重新作了解答，解答部分重新进行了校订，纠正了已被发觉的排印上的错误。与第一版比较，书的结构没有改变。

书中对每个学校的典型试题附了解答，对比较难的试题给出了提示和解题方法的建议。

在各高等学校提供的试题中，经常遇到同一类型的题，甚至同样的试题解答。但编者认为，对有兴趣报考具体院校的读者，这样的参考题更为适宜。

书中各题的条件和答案都是用中学数学教科书上的习惯术语和符号给出的。

全书包含笔试题1035道，口试题288道。其中口试题都是比较常见的，并按教学大纲分别配置。

本书面向中学高年级学生以及大学预备班学生，但不可能是参加高考的唯一备考参考书。着手解题之前，必须仔细研究高考数学教学大纲的理论问题。

明斯克高级火箭工程学校高等数学教研室主任，教育科学候补博士，副教授叶·古尔斯基精心审阅了原稿，并提出了宝贵意见；还有不少同志对书稿提出了意见和建议，使本书更趋完善。作者对他们表示衷心的感谢。

读者对本书的改进意见和要求，请寄明斯克马舍波夫大街11号《高等教育》出版社。邮政编码：220048。

笔 试 题

劳动红旗勋章获得者

白俄罗斯综合技术学院

——1978年——

第一套

1. 化简

$$\frac{(\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n})^2 + (\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2}{2(m-n)}$$
$$: \frac{1}{\sqrt{m^3} - \sqrt{n^3}} - 3\sqrt{mn}, m \neq n, m > 0, n > 0$$

2. 解方程

$$2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 5\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 4 = 0$$

3. 解方程

$$\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$$

4. 曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上那一点处的切线与横坐标轴斜交成 30° 角?

5. 点 $A(1, 0, 2)$; $B(2, 1, 0)$ 和 $C(1, 2, 0)$ 是平行四边形的三个连续顶点, 求它的第四个顶点以及对角线所成的角。

第 二 套

6. 化简

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{1 - \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab}}{1 + \sqrt[4]{a^3b^3}} - \frac{1 - \sqrt[4]{ab} - \sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}, \quad ab > 0, ab \neq 1$$

7. 解方程 $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$

8. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin x}$

9. 利用导数研究函数 $y = \frac{x^4}{4} - 8x$, 并作出它的图象。

10. 经过立方体的每一个顶点出发的三条棱的中点引截面, 如果立方体的边长为 a , 求所截得的十四面体的体积。

第 三 套

11. 化简

$$\left(\frac{(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \quad a > 0, b > 0, a \neq b$$

12. 解方程 $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$ 。

13. 解不等式 $|2x - 1| + 5x \geq 2$

14. 计算由曲线 $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 2$ 所围成的图形的面积。

15. 求函数 $y = \cos 2x - x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上的最大值和最小值。

第 四 套

16. 化简

$$\left(\left(\frac{\sqrt[4]{bx^3} + \sqrt[4]{a^2bx}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} + \sqrt[4]{bx} \right)^2 + bx + 3 \right)$$

$$: (\sqrt{bx} + 3), a > 0, b > 0, x > 0$$

17. 解方程 $4\sin(3x - \frac{\pi}{2}) + 7\cos^2(3x - \frac{\pi}{2}) = 7\frac{1}{4}$

18. 解不等式 $\log_3(35 - x^3) > 3\log_3(5 - x)$

19. 已知 $F'(x) = -\sin x + \frac{1}{4\sqrt{(x+1)^3}} + \frac{2}{e^{-x}}$,

$F(0) = 2$, 求函数 $F(x)$ 。

20. 如果 $\vec{a} = (0, -4, 3)$, $\vec{b} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, 求向量 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 的长。

第 五 套

21. 化简

$$\frac{a-5}{6-3a} + \frac{4(a+1)}{a^2+4a} : \left(\frac{9a}{a^2-16} - \frac{a+4}{a^2-4a} \right),$$

$$a > 4.$$

22. 解方程 $\sin x + \sin 2x - \sin 3x = 0$ 。

23. 写出函数 $y = \cos x + 1$ 的图象在横坐标 $x_0 = 0$ 的点处的切线方程。

24. 求外切于半径为 r 的半球, 体积最小的圆锥的高。

圆锥的底面中心在球心上。

25. 求曲线 $y = \sin 2x$, $y = 0$ 所围成的图形的面积。
 $x \in (0, 2\pi)$

第六套

26. 证明恒等式

$$\frac{1 - \cos 2\alpha - \sin(2\alpha + \pi)}{1 - \cos(2\alpha - \pi) + \sin(2\alpha + 4\pi)} = \operatorname{tg} \alpha$$

27. 解不等式

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{1-x}} > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

28. 解方程组

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50 \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5 \end{cases}$$

29. 求函数 $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ 在区间 $(0, 3)$ 上的最小值和最大值。

30. 向量 $\vec{c}$ 垂直于向量 $\vec{a} = (2, 2, -1)$ 和 $\vec{b} = (3, -1, 1)$ 并与 oz 轴成钝角, $|\vec{c}| = \sqrt{30}$, 求向量 $\vec{c}$ 的坐标。

第七套

31. 证明恒等式

$$\frac{\sin 2\alpha - 2\sin \alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin \alpha} = -\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

32. 利用导数研究函数

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4, \text{ 并作出它的图象。}$$

33. 解方程 $3\sin 3x + 4\cos 3x = -5$

34. 向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 成 30° 角, $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 10$.
求 $|\vec{a} + \vec{b}|$

35. 正三棱锥的体积等于 V , 经过一条侧棱的中点作平行于对边且垂直于底平面的平面, 求所截的棱锥的体积。

第八套

36. 证明恒等式

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha)$$

$$= 4\cos 2\alpha \cos 4\alpha \sin 6\alpha$$

37. 解不等式

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+5)^2 > \log_{\frac{1}{2}}(3x-1)^2$$

38. 对函数 $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} + \frac{2}{\cos^2 x} + e^x$, 求

图象经过点 $A(0, 3)$ 的原函数。

39. 如果 $\vec{a} = (0, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, 求向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 和 $\vec{a} - \vec{b}$ 所成的角。

40. 棱锥的底面是面积为 Q 、一个锐角为 α 的直角三角形, 经过这个锐角的邻边的侧面垂直于底平面, 另两个侧面与底平面斜交成 β 角, 求这个棱锥的体积。

第九套

41. 证明恒等式

$$\frac{1 + \cos(2\alpha + 630^\circ) + \sin(2\alpha + 810^\circ)}{1 - \cos(2\alpha - 630^\circ) + \sin(2\alpha + 630^\circ)} = \operatorname{ctg} \alpha$$

42. 解方程

$$\log_2(x+1)^2 - \log_4(x-1) = 9$$

43. 求函数 $y = x^2 e^{-x}$ 在区间 $(-1, 4)$ 上的最大值和最小值。

44. 以 b 为底, α 为底角的等腰三角形, 绕轴旋转, 其轴位于三角形平面内并平行于底且到底的距离等于三角形底边上高的一半的直线。求旋转体的体积。

45. 计算由曲线 $y = e^x - 1$, $x - 2 = 0$, $y = 0$ 所围成的图形的面积。

第十套

46. 化简

$$\frac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}}$$

47. 如果 $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$, 解不等式 $f'(x) + \varphi'(x) \leq 0$ 。

48. 解方程

$$2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$$

49. 锐角是 α 和 β , 最小高等于 h 的钝角三角形绕着角 β 的对边旋转。求旋转体的侧面积。

50. 计算由曲线 $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$, $y = 3.5$ 所围成的图形的面积。

——1979年——

第 一 套

51. 证明恒等式

$$\frac{\sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha - 4 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}$$

52. 解方程

$$\sqrt{2} \cdot 0.5^{\frac{1}{4\sqrt{x+10}}} - 16^{\frac{1}{2(\sqrt{x+1})}} = 0$$

53. 解不等式

$$\log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2$$

54. 计算由曲线 $y = \sin \frac{x}{2}$, $y = \sqrt{x}$, $x = \pi$ 所围成的

图形的面积。作出图象。

55. 正三棱柱的体积等于 V , 应该怎样确定它的底边, 才能使棱柱的表面积最小?

第 二 套

56. 化简

$$\left(\frac{1}{a + \sqrt{2}} - \frac{a^2 + 4}{a^3 + 2\sqrt{2}} \right) \\ : \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{a} \right)^{-1}, \quad a \neq 0, a \neq -\sqrt{2}$$

57. 解方程 $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$

58. 解不等式 $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2$

59. 计算由曲线 $y=5+4x-x^2$; $2x-y-3=0$ 所围成的图形的面积。

60. 已知三角形的三个顶点 $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ 和 $C(3, -2, 1)$ 。确定它以 B 为顶点的内角。

第三套

61. 化简

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}}}{x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{2}}}{x - y} \right) \times \frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad x \neq y, \quad x > 0, \quad y > 0$$

62. 解方程

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

63. 解不等式

$$(x-2)x^2 - 6x + 8 > 1$$

64. 内接于底为 a 高为 h 的三角形的矩形，它的两个顶点在底上。求具有最大面积的矩形。

65. 如果 $\vec{AB} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{BC} = \vec{i} - 3\vec{j}$, 确定平行四边形 $ABCD$ 的对角线的长

第四套

66. 计算

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{18+x^2} - 3\sqrt{2x+9}}{x+3}$$

67. 解方程

$$\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$$

68. 用图解法解不等式组

$$\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ x - 4y + 6 \geq 0 \end{cases}$$

69. 若 $\sin(\pi - x) - \cos(\pi + x) = \frac{1}{5}$, 求 $\lg \frac{x}{2}$

70. 求由纵轴, 抛物线 $y = 3x - \frac{1}{2}x^2$ 和这条抛物线顶点的切线所围成的图形的面积。

第五套

71. 化简

$$\frac{3}{a-3} (3^{-2})^{-0.5} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{(a-1)^{\frac{2}{5}}} \right)^{-1} \\ \left(\frac{(a^{\frac{1}{2}} + 1)(a-3)}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-2} (a-1)^{\frac{2}{5}}} \right)^{-1}, a > 3$$

72. 圆锥的体积等于 V 。一个底是等腰三角形（顶角为 α ）的棱锥内接于这个圆锥，求棱锥的体积。

73. 解不等式

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2.5} \leq \frac{0.5^{x(x+3)}}{\sqrt{2}}$$

74. 如果 $F'(x) = 3\cos x + \sin 2x$, $F(0) = \frac{1}{2}$, 解方程

$$F(x) = -\frac{3}{2}$$

75. 写出函数 $y = 2(e^x + \frac{1}{5}e^{-3x})$ 的图象在横坐标 $x_0 = 0$ 的点处的切线方程

——1980年——

第一套

76. 已知 $\log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2(\sqrt{6}-2) = A$, 求 $\log_2(\sqrt{3}-1) + \log_2(\sqrt{6}+2)$ 的值

77. 解方程 $2\cos 2x + 2\lg^2 x = 5$

78. 解不等式组

$$\begin{cases} \frac{5x-4}{2x-3} > 2 \\ |5x-3| \leq 7 \end{cases}$$

79. 求一个数。这个数与自己的平方的和具有最小值。

80. 正三棱锥内接于半径为 R 的球。如果它的高与侧棱所成的角等于 α , 求棱锥的体积。

第二套

81. 化简

$$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} \times \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} \right), a > 0, b > 0,$$

$$a \neq b^2.$$

82. 解方程 $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$

83. 解不等式 $\frac{\lg x^4 - 2\lg(2x+3)}{\lg(2-\sqrt{3})} \geq 0$

84. 写出函数 $y = -\cos x + 1$ 的图象在点 $M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 处的切线方程。

85. 确定正三棱锥的全面积，这个三棱锥的侧面的底角等于 α ，内切于侧面的圆的半径等于 r 。

第 三 套

86. 化简

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y} \right) \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x+y} - \frac{2y}{x-y},$$

$$x > 0, y > 0, x \neq y$$

87. 若 $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$, 求 $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$,

88. 解不等式 $\log_5 \frac{x^2 - 4x + 6}{x} < 0$

89. 求由曲线 $y = x^2 - 5x + 7$, $y = -2x^2 + 10x - 5$ 所围成的图形的面积，作出图象。

90. 函数由公式 $y = 2x + \frac{32}{x}$ 给出，求这个函数的极值和它的图象在横坐标等于 2 的点处的切线的斜率。

第 四 套

91. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x-4)}{(\sqrt{2x+3} - \sqrt{7x^4+3})(\sqrt{2x+2})}$

92. 解方程

$$4\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x) \cos x + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos(\pi + x) = 1$$

93. 解不等式 $1 < \frac{f'(x)}{g'(x)} < 2$, 这里, $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 8x + 15$, $g(x) = \frac{x^3}{3} + x + 4$

94. 计算由曲线 $y = \sin x$; $y = \frac{2}{\pi}x$, $x \geq 0$ 所围成的图形的面积。

95. 底角等于 60° 的等腰梯形外切于圆。两腰上的圆的切点的连线按什么样的比例分梯形的面积。

第五套

96. 化简

$$\left(\frac{49}{c+27} - \frac{c^{\frac{1}{3}}+3}{c^{\frac{2}{3}}-3c^{\frac{1}{3}}+9} \right) \frac{c^{\frac{4}{3}}+27c^{\frac{1}{3}}}{16-c^{\frac{2}{3}}} + \frac{40-c^{\frac{2}{3}}}{4+c^{\frac{1}{3}}}, \quad c > 0$$

$c \neq 64$.

97. 解方程 $2\sin^2 x - 2\cos x = 3$

98. 解不等式 $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$

99. 利用导数研究函数 $y = x^4 - 8x^2 + 16$, 并作出图象。

100. 向量 $\vec{b}$ 与向量 $\vec{a} = (1, -2, 2)$ 共线, 并与 oy 轴成钝角, 已知 $|\vec{b}| = 9$, 求向量 $\vec{b}$ 的坐标。

白 俄 罗 斯 工 学 院

——1978年——

第 一 套

101. $a=b=10\text{cm}$, $c=12\text{cm}$ 的三角形的三边与半径为 5cm 的球面相切, 求球到三角形所在平面的距离。

102. 几何级数前三项的和等于 21, 而它们的平方和等于 189, 求这个级数的第三项和公比。

103. 验证等式 $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

104. a 为何值时不等式 $\frac{ax}{x^2+4} < 1.5$ 对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立?

105. 已知 $F'(x) = 2x^2 - 3x$ 和 $F(2) = 2$ 求函数 $F(x)$

第 二 套

106. 在 xoy 平面上求出一个垂直于向量 $\vec{b} = (5, -3, 4)$ 并与它等长的向量 $\vec{a}$ 。

107. 解方程组
$$\begin{cases} 9^{2\lg x + \cos y} = 3 \\ 9^{\cos y} - 81^{\lg x} = 2 \end{cases}$$

108. 化简 $(81^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}) 49^{\log_7 2}$

109. 证明函数 $y = -0.2x^5 + 0.5x^4 - x^3 + x^2 - x$ 在整个定义域上递减。