比一比

王峻岑著

中国青年出版社

比 一 比

王峻岑著

中国青年出版社

一九五五年·北京

書號44 數理化5

比 一 比

著者 王峻岑

青年·開明聯合組成

出版者 中国青年出版社

北京東四12條老君堂11號

總經售 新華書店

印刷者 北京華豐印刷廠

開本 787×1092 1/32
印張 1 3/4
字數 33,000

一九五〇年六月第一版
一九五四年八月北京第五版
一九五五年一月北京第八次印刷
印數 38,001—45,000

北京市書刊出版業營業許可證出字第036號

定價1,800元

內 容 提 要

本書收集了各種比例的應用問題，依照它們的性質歸納成八類，每類用具體的例子，詳細說明它的算法；在分析問題和演繹推理的時候，順便又談了些對於一般事物的看法。讀了這本書，不但會提高對於數學的興趣，而且在一般的思想方法上，也可以得到一點幫助。

目　次

一 比 一 比

（比的意義和性質）

聽說有這麼一個拗口令：

山前有個崔粗腿，山後有個崔腿粗。

二人山前來比腿：

不知道崔粗腿比崔腿粗的腿粗，

還是崔腿粗比崔粗腿的腿粗？

其實末後這個問題是不成問題的。只要他們兩個來到一塊，併在一起，誰的腿粗，一看就看出來了。

有人問：

兩棵莊稼，哪一棵高呢？

兩把斧頭，哪一把重呢？

兩枝大槍，哪一枝長呢？

兩個標語，哪一個的字大呢？

要想答覆這些問題，乾脆一句話：放在一塊比一比。

不但兩件東西可以比，兩個數目字也可以比一比。把兩個數字放在一起，和把兩件東西放在天秤上一樣，誰重誰輕一看就明白。

當然啦，兩個數字放在一起，首先要規定一種寫法。如果把 3 和 5 放在一起，是 35 呢？還是 53 呢？都不行。因爲這樣就跟記數法相混了。

比較輕重，要放在天秤的兩邊。比較兩個數目字，要在中

間加上兩個點．3：5．這兩個點代表‘比’，3：5就是三比五．

本來比較兩個數字的大小可以用減法．5減3餘2，3減5少2，所以5比3大．同時也可以用除法．6用2除得3，所以6是2的3倍．但是這些手續都麻煩．如果不一定需要知道差數的時候，就不必用減法．如果不一定需要知道一個數是另外一個數的幾倍，也不必用除法．所以‘比’是比較大小的一個最簡單的方法．

但是‘比’在應用上，也要有幾個條件．第一，‘性質’不一樣的東西不能相比．如果有人問：一塊鐵和一畝地，哪一個重？一丈布和兩斤肉，哪一個長？兩個拳頭和一根線，哪一個大？這個人不是傻子便是瘋子．因爲鐵有輕重，地論大小，它倆不能比．布有長短，然而肉卻不能講長短．拳頭論大小，然而線卻沒有大小．它們不能相比的原因，就是因爲它們的性質不同．

第二，有人說：不是一類的東西不能相比．這句話也對也不對，我們必需搞淸楚它的意義！譬如說：人能和狗相比嗎？猛一聽，覺得不像話．人是不能和狗相比的．可是在打獵或是探險的時候，狗幾乎和人一般重要．假如一個探險隊，有十個人，五隻狗，那麼人數和狗數的比就是10：5．人和狗當然不是一類，但是如果論到數量的多少，就能夠相比．一蔴袋食糧和三十四布不是一類的東西，但是如果論到輕重，它們也能夠相比．一蔴袋食糧重二百斤，三十四布重三百二十六斤，這兩個重量的比是200：326．

不過這種比較，對於我們的用處並不大，而且在計算上最

容易使我們犯錯誤。因此在數學裏講到'比'的時候，總是要再加上這一條限制：'種類'不一樣的東西不能相比。

第三，種類雖然一樣，如果'單位'不一樣也不能相比。在這裏，我們也要瞭解這一句話的意義。這句話並不是說它們不能比較，是說我們不能'直接'拉過兩個數來相比。事前必需換成'相同的單位'。例如一丈布和一尺布比較，我們不能直接寫成 1 : 1。如果這樣寫法，那麼它們就變成一般長了。一丈布能夠等於一尺布嗎？假設統統用尺作單位的時候，我們應當寫成 10 : 1；假設統統用丈作單位的時候，我們應當寫成 1 : 0.1。因爲一丈等於十尺，這才沒有錯誤。只有換成相同的單位，然後才能夠和實際的情形完全一致。

把上面三個條件歸納成一句話，就是'名數相比，必須是相同的名數'。——同時，在這裏我們又順便看出'比'的一個性質。10 : 1 和 1 : 0.1 表示的是一回事，寫成算式就是：

$$10 : 1 = 1 : 0.1.$$

兩個數相比，前邊的叫前項，後邊的叫後項。等號的左邊，10 是前項，1 是後項。等號的右邊，1 是前項，0.1 是後項。從等號的右邊往左看，左邊的前項跟後項都比右邊的大了十倍；從等號的左邊往右看，右邊的前項跟後項都比左邊的小了十倍。這就告訴我們，前項後項用同一個數去乘，或是用同一個數去除，這兩個數量的比並不變更。這是'比'的一個重要的性質。

從這個性質，使我們想到了分數。比有前項跟後項，分數有分子跟分母。分子分母也可以用同一個數去乘或者去除，

結果還是和原來的分數相等.

一個分數所表示的數量是什麼呢? 那是分數的值. 兩個分數相等,就是說它們的值相等. 同樣的,兩個數的比也表示一個數量,我們把它叫做'比值'. 所謂兩個比相等,就是說它們的比值相等.

求一個分數的值,是用分母去除分子. 求兩個數的比值,是用後項去除前項. 就算法上說,比跟分數也是非常相似的. 現在把它們對照一下,可以幫助我們的瞭解:

前項 : 後項 = 比值,

分子/分母 = 分數的值.

前項相當於分子,是被除數. 後項相當於分母,是除數. 比值相當於分數的值,那是商數. 因此,兩個數的比值,是表示前項是後項的幾倍,或者是幾分之幾.

正因爲這樣,有時候比的寫法也可以採用分數的寫法. 例如:

$$1:2=\frac{1}{2},\qquad 3:6=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$1:2=3:6,\qquad \text{或}\qquad \frac{1}{2}=\frac{3}{6}.$$

而且分數的性質是:分子分母同用一數乘除,其值不變. 比的性質是:前項後項同用一數乘除,其值不變. 這樣一來,使我們對於比的認識會更清楚些.

同時,研究比還有一個方便的地方. 因爲不但兩個數量可以比,無論多少數量都可以一塊比. 譬如三個生產小組,第一組五個人,第二組七個人,第三組八個人. 那麼這三組人數

的比就是5：7：8. 這叫做'連比'. 它表示：第一組與第二組人數的比是5：7，第二組與第三組人數的比是7：8. 同樣的，假設第一組工作了十二天，第二組工作了十四天，第三組工作了十八天. 第一組與第二組工作天數的比是6：7，第二組與第三組工作天數的比是7：9，那麼這三組工作天數的連比就是6：7：9. 再多，還是一樣.

減法或是除法，一次只能研究兩個數量；比呢，它卻能夠同時研究許多數量. 這樣看起來，比的用處就比較大得多了.

二 推 一 推

（正比例式的算法）

一道算題，不見得只有一種算法．譬如用筆算，打算盤，或是用心算，思路就不一樣．在學校裏念過書的人，最熟悉的當然是筆算；然而實際生活裏用得最多的卻是珠算和心算．比方一種貨物，五千塊錢一斤，那麼二斤三兩應該是多少錢呢？

用筆算： $5{,}000\times 2\frac{3}{16}=5{,}000\times\frac{35}{16}=10{,}937.5$ 元．

用珠算，按照由兩化斤的口訣：‘三，一八七五．’三兩合小數點一八七五斤．所以：

$$5{,}000\times 2.1875=10{,}937.5\text{ 元．}$$

用心算：一斤五千，二斤一萬．這是一萬．

一斤五千，半斤二千五，四兩一千二百五，

二兩六百二十五，一兩是三百一十二塊五．

三兩，是九百三十七塊五．

一共一萬零九百三十七塊五！

筆算，不容易錯；珠算，打的快；心算，用不着工具．各有各的好處．

最值得讓我們注意的是心算的思路．要點是先求‘單價’．從一斤的單價可以求出二斤的價錢；知道一兩的單價可以求出三兩的價錢．這種思想方法是推理，根據已經知道的條件，推出要求的結果．

在作預算的時候,每一個項目下邊,都是根據單價求出總值。譬如工資,每人每天五斤米。一個月按三十天計算,一個人一個月的工資是一百五十斤。五十個人一個月的工資是七千五百斤,全年工資九萬斤。這個,不說也明白。

但是在日常所碰到的,卻往往是不知道單價。例如:根據以前的實際開支,估計以後的預算開支,這就多了一層先求平均單價的手續。

比方說:上半個月,十個人吃了三百七十五斤米;下半個月少了兩個人,估計着應當預備多少米?我們怎樣計算呢?

$$375 \div 10 \div 15 = 2.5 \text{ 斤},$$

$$2.5 \times 8 \times 15 = 300 \text{ 斤}.$$

平均每人每天吃二斤半,下半個月的總數是三百斤。在四則裏邊,這種算法叫做'歸一法'。

但是知道了比,我們就可以把這個方法化簡。因爲上半個月跟下半個月的天數作爲相等,這個算題就變成:同樣的天數,如果十個人吃三百七十五斤米,問八個人應當吃多少米?

第一次的人數是 10,第二次的人數是 8,兩個人數的比是 10 : 8。第一次的米數是 375,第二次的米數不知道,可以用個問號去代表。這兩個米數的比是 375 : ?。因爲人越多吃的米越多,人越少吃的米越少,人數增加幾倍,米數也要增加幾倍。所以這兩個比值應當相等。我們可以列成一個算式:

$$10 \text{ 人} : 8 \text{ 人} = 375 \text{ 斤} : ? \text{ 斤}.$$

像這樣一個算式,表示兩個比值相等的,叫做比例式。這裏邊包括了四個數字,每一個叫做一項,一共是四項。自左而

右，10 是第一項，8 是第二項，375 是第三項，? 是第四項．第一、第四兩項又叫做外項，第二、第三兩項又叫做內項．

無論哪一個比例式都有一個重要的性質，就是'兩內項相乘的積，等於兩外項相乘的積'．怎麼知道的呢？利用分數的寫法可以馬上看出來：

$$10:8=375:?,$$

$$\frac{10}{8}=\frac{375}{?},$$

$$\frac{10}{8}\times 8\times ?=\frac{375}{?}\times 8\times ?;$$

$$10\times ?=375\times 8.$$

利用這個性質，馬上就得到了答數：

$$?=\frac{375\times 8}{10}=300\text{ 斤}.$$

根據一定的道理寫成比例式，再按照一定的辦法推一推，立刻解決問題．這個算法的好處就是推理的步驟是一定的．好比使用機器，怎樣裝，怎樣卸，都有一定的手續．好記好用，一學就會．

在這裏，我們只須注意以下這幾點：

第一，首先要瞭解，比例式的意義是表示兩個比值相等．因爲比值的求法是用後項除前項，這是相同的名數相除．所以比值（就是那個除法的商）應該是不名數．我們不能單就表面的看法，把這個比例式——

10 人 : 8 人 = 375 斤 : ? 斤

看做人等於米（這當然是講不通的）．因爲比值是不名數，所以人的比值可以跟米的比值相等．其次，必須兩個比值眞等，

比例式才能成立；不然就不能畫等號了。

第二，千萬不要按照我們說話的次序把它寫成算式！例如：10 個人吃 375 斤米，8 個人吃多少斤米；

10 人：375 斤＝8 人：?斤.

算出答數來雖然也對，然而這種寫法絕對不許可。因爲按照我們的規定，'種類'不一樣的不能相比，這是應該切實遵守的一點。

第三，比例式的算法是固定的：把兩個內項乘起來，再用另外一個外項去除，結果就得出答數來了。

第四，一道算題可以列出種種不同的算式。就說上面那一道題吧，我們可以寫成：

10 人：8 人＝375 斤：?斤，

375 斤：?斤＝10 人：8 人，

8 人：10 人＝?斤：375 斤，

?斤：375 斤＝8 人：10 人.

然而無論哪一個算式，根據比例式的性質，找到的答數只有上面那一個。

第五，記住！這樣的比例式叫做正比例式。凡是能夠列成正比例式的那兩種數量，便叫做正比例量。

三 翻 一 翻

（反比例式的算法）

一個分數可以翻觔斗，分子分母上下顛倒過來。倒過來的分數叫做原來那個分數的倒數。例如：$\frac{2}{3}$ 的倒數是 $\frac{3}{2}$。一個比也可以翻一翻，把前項跟後項交換過來。翻過來的這個比叫做原來那個比的反比。例如：3：5 的反比是 5：3。

讓我們先想想這樣一個題目：大家找到了一塊荒地，如果十個人去開荒，需要二十四天；假設去三十個人，需要幾天？

按照上面講過的算法，——

10 人：30 人＝24 天：？天，　　$? = \frac{24\times 30}{10} = 72$ 天。

結果是完全錯了！爲什麼呢？因爲工作是一定的，人數既然增多了，天數不就應該減少嗎？

讓我們用分數算一下：假設全部開荒的工作是 1，每人每天所作的是全部工作的 $\frac{1}{24\times 10}$。現在有 30 人，每天能作全部工作的 $\frac{30}{24\times 10}$，所以一共需要的天數是

$$1 \div \frac{30}{24\times 10} = \frac{24\times 10}{30} = 8 \text{ 天}.$$

如果用比例能不能算呢？能。不過現在是人數越多天數越少，人數越少天數越多。這和上面成正比例的算題完全不一樣了。人數的比是 10：30，天數的比是 24：？。假設它們成正比例的時候，才能直接畫等號。現在的情形既然不同，那麼應該怎樣去計算呢？

很簡單！只要把這兩個比，隨便指定一個翻一翻，正比變

成反比，然後就可以畫等號，列成比例式。

人數的比是 10 : 30，天數的比是 24 : ?；如果人數的比翻一翻，是 30人 : 10 人 = 24 天 : ? 天，如果天數的比翻一翻，是 10 人 : 30 人 = ?天 : 24 天； 結果答數相同，都是

$$? = \frac{24 \times 10}{30} = 8 \text{ 天}.$$

在一個比例式裏，包含兩個正比或是兩個反比的叫做正比例式；包含一個正比跟一個反比的叫做反比例式。現在這個算式顯然就是一個反比例式。作工的人數跟完成工作的天數是成反比例的。凡是能夠列成反比例式的那兩種數量，叫做反比例量。

整個世界上，無論什麼都是變的。而且往往是一個跟着一個變。但是變化的情況卻不一定一模一樣。有的，這個變大了，那個也變大；這個變小了，那個也變小。變大的時候，一塊兒變大；變小的時候，一塊兒變小。這叫做同變。有的，這個變大了，那個反而變小；這個變小了，那個反而變大。它們兩個的變化恰好相反，這叫做異變。人吃食糧，人越多吃的越多，是同變。人做工作，人越多用的天數越少，這是異變。

同變或是異變，變化的快慢未必一致。假如快慢一致的話——例如人增加一倍，吃的食糧也增加一倍；人增加兩倍，吃的食糧也增加兩倍；這時候，同變就變成正比例了。反過來說，人增加一倍的時候，天數減少一半；人再增加一倍的時候，天數又要減少一半。這時候，異變就變成反比例了。

成正比例的算式是正比例式，成反比例的算式是反比例式。無論正比例式或是反比例式，只要列出算式來，以後的演

算方法完全一致。

因此，我們應當注意的是：

第一，先想好問題裏的變化，是同變呢，還是異變？然後再想一下，同變的是不是成正比例，異變的是不是成反比例？成正比例的，直接把兩個比用等號聯起來。成反比例的，先把其中的一個比翻一翻，改成反比，然後再畫等號。不過要記住，只可翻一個，而且只能翻一次。一個比，假設連翻兩次，結果和不翻一樣。一個比例式，假設同時翻兩個比，結果反比例式又變成正比例式了。

第二，正是因爲這個原因，所以寫比的時候，一定要注意到實際的先後次序。在正比例式裏是：

第一次人數：第二次人數＝第一次米數：第二次米數，
（正比） （正比）

或者

第二次人數：第一次人數＝第二次米數：第一次米數。
（反比） （反比）

在反比例式裏是：

第二次人數：第一次人數＝第一次天數：第二次天數，
（反比） （正比）

或者

第一次人數：第二次人數＝第二次天數：第一次天數。
（正比） （反比）

末後這兩個比例式，一個是把人數的比翻一下，變成反比；一個是把天數的比翻一下，變成反比。但是，翻了這一個就不能同時再翻那一個。

假如一下手把比的次序寫錯了，那麼就會越想越糊塗了。