

於宗俦 于正林 编著



测量平差原理

武汉测绘科技大学出版社

序 言

“测量平差”是测绘类专业中一门重要的技术基础课，是用于观测数据处理的一门应用数学。自十九世纪初高斯(Gauss)和勒让德尔(Legendre)创立最小二乘法以来，测量平差经过不断充实已经发展成为一门独立的学科。特别是近二、三十年来，它的理论更加丰富完善，其应用领域越来越广。

每一门学科(学科本身以及在教学传授该学科的课程)都是一个完整的系统。测量平差课的主要内容虽然包括各种经典平差法和近代平差法，但它们都具有共同的根本点，只不过是某些特定的条件下，其具体表现形式不同而已。从总体上看，测量平差课程由两部分内容组成：一部分是函数模型和随机模型，这是本课程的理论基础，它侧重于概念的建立；另一部分是具体公式的推导和应用，它侧重于实践。

长期以来，测量平差教材的编写和讲授，都是沿用逐个平差方法孤立介绍的体系，使得学习者误认为测量平差就是各种不同平差方法的汇集和堆砌。之所以造成这一情况，作者认为主要是由于以下几个原因：

(1) 旧的平差体系只是孤立地讲解各种平差方法本身的一些具体规律，而没有一开始就从函数模型的建立这一基本概念出发，来阐明各种平差方法的共同点和各自的特点。而在孤立介绍各种方法之前，往往只是先举一两个简单的例子，接着就花大量篇幅和时间来推导其公式。事实上，公式推导的本身无法代替基本概念的建立。因此，当学习者学完平差课之后，由于没有真正理解各种平差方法的本质区别究竟何在，它们内在的联系究竟如何，因而总觉得脑子里装了不少零碎的方法，以至造成“只见枝叶，不见根本”的后果。以间接平差法为例，一般只着重于阐明列立观测方程的规则，即先选定与必要观测个数相等的独立参数，然后将每个观测量表达成这些参数的函数。至于为什么一定要选定与必要观测数相等的独立参数；即使选了与必要观测数相等的参数，是否就一定能够保证独立；为什么只有当参数独立时才能将每个观测量表达成这些参数的函数；这种平差方法和其它方法的共同点和根本区别究竟何在，所有这些问题，如果不从函数模型的建立来加以说明，就很难作出圆满的回答。

(2) 旧的平差体系由于着眼于传授一些常用的平差方法，而不是从揭示其本质概念着手，因而在孤立介绍各种方法时，有些问题只得有意识地加以回避。例如，在讲附有参数的条件平差时，只是强调平差时加入的参数是函数独立的，参数的个数不超过必要观测的个数。可是无法再进一步说明：参数的个数即使不超过必要观测数，参数也可能不独立，这时能否进行平差？如何平差？在讲间接平差时，只是指出要选定与必要观测个数相等的独立参数，可是无法再进一步说明：参数的个数虽然等于必要观测数，但参数不独立又该如何处理？同样，在讲附有条件的间接平差时，只是指出加入的参数不独立，且往往只通过实例来代替其实质问题的分析，因而无法再进一步说明：能构成附有条件的间接平差的基本条件是什么？如果不满足这些基本条件又该如何处理？如果这一系列问题得不到解答，学习者就难

以对函数模型建立起完整的概念，因而也就难以抓住其要领，更难以做到灵活运用。

(3) 传统上普遍采用的某些重要的符号具有多义性，从而使具有密切联系的各种平差方法被人为地孤立起来了。例如，同一个符号“ r ”，在条件平差中是表示多余观测数，在附有参数的条件平差中是表示多余观测数和独立参数的总数；在附有条件的间接平差中又是表示不独立参数的个数。相反，具有相同含义的“不符值”，在条件平差中是用“ w ”表示，在间接平差中又用“ l ”表示，等等。其结果，每个平差方法都各自形成一大套公式，学习者只得死记硬背，以至产生了测量平差这门课的方法多、公式多、推导多的“三多”感觉。

作者通过多年来的教学实践认识到，如果不改变旧的教学体系，就很难进一步提高教学质量，而要改变旧的教学体系，则应从揭示各种平差方法之间的内在联系入手。测量平差中介绍的方法虽然很多，但它们的基本区别却可以简单地用两句话来概括，即“平差时是加入参数还是不加参数，加入的参数是函数独立还是不独立”。显然，不加参数是加入参数的特例，参数函数独立是不独立的特例。在编写本书时，作者就是以这一基本思想为轴线，使全书形成了一个新的体系。

本书编写的主要特点是：

(1) 采用“附有限制条件的条件平差法”作为平差问题的概括函数模型，其它所有平差方法，包括各种经典平差法和近代平差法，则都是这一概括模型的特例。由概括模型推出的公式，包括所有的平差计算和精度评定的公式，可以适用于所有的平差方法，故称之为通用公式。对于其它任一平差方法，只要将其特殊的系数阵，例如 $A = -I$, $B = 0$, $C = 0$ 等等代入通用公式，即可直接写出它们的全部公式。这样，不仅节省了大量重复推导公式的过程，而且更重要的是有助于深入理解各种平差方法之间的共性和各自的特性。

(2) 在本书的§2.10中，对概括模型(附有限制条件的条件平差法)在“最小二乘准则”下所得的估计量进行了统计性质的证明。由于其它所有平差方法只是它的特例，因此，通过这些证明，同样说明了其它所有方法的统计性质。如果将各种方法所具有的特殊系数阵代入这些公式，即可得到它们各自的统计性质的证明公式。

(3) 考虑到当前电子计算机已经普及并得到广泛的应用，为了便于编制程序，书中给出了各种解向量(改正数向量 $\hat{V}$ 和 $\hat{x}$ ，联系数向量 K 和 K_0)以及协因数阵的显表达式。只要线性化的条件方程式一经列出，就可以直接计算出所需要的任何一个解向量，而不一定要通过法方程整体求解，同样也可以直接计算出任一协因数阵。

(4) 第四章(分组平差)和第六章(自由网平差)同样也是采用由一种方法演化出其它方法的编写方式，更易于理解各种方法间的联系与区别。特别是利用第二章(最小二乘平差)中不同函数模型的公式，比较简便地导出了一般文献中未曾给出过的精度评定公式。

(5) 为了加深对各种平差方法的理解，书中列举了较多类型的例题，并采用不同的解算方法，如有的是用约化表求解，有的是用解向量的显表达式求解，等等。

本书既可作为参考书，也可供高等学校测绘类专业用作测量平差课的教材。全书共分八章，在以此书作为教材时，可根据专业的性质和要求取舍其内容。对于本科生而言，有些章节，如第六章(自由网平差)和第八章(最小二乘内插、滤波与配置)等，不一定都放在测量平差课中讲授，而可以安排在后续专业课中讲授，也可以作为选修课的内容。根据某些专业的性质，第八章可以不讲。若已具有概率论及数理统计的基础知识，则第七章(统计假设

检验)可以只选其中部分内容讲授。对于专科生而言,重点应为前三章,其余章节则可根据情况进行取舍。为了使内容的安排具有系统性,本书将各种线性方程组的解法,包括高斯约化法、平方根法等均写入第三章。在讲授第二章例题时,如果需要用到某种解法,则可以将第三章中的有关内容穿插在第二章中讲授。第四、五、六、七诸章的内容前后联系不大,可以根据情况适当调整其顺序。

本书是根据武汉测绘科技大学和香港理工学院的校际协议编写的。初稿完成后,从1987年初到1989年底,已先后在武汉测绘科技大学大地测量专业本科(85~88级),摄影测量与遥感专业本科(86、87级),工测、航测、大地专业本科综合班(87、88级)以及摄影测量专业专科班(87级)等班级作为基本教材。此外,还先后在国家地震局天津测量大队、湖北省测绘学会、中国测绘学会教育委员会以及黑龙江省测绘学会工测委员会主办的测量平差研讨班上作为基本教材。听课的同志对新的平差体系给予了积极的评价,不少同志还提出了宝贵的建设性意见。作者在此谨向这些同志表示衷心的感谢。

全书插图由冯秦珍同志绘制。

为方便教学和广大测绘科技工作者自学,本书出版后,还将出版与之配套的习题集。

本书得到了测绘教材委员会暨该会大地专业组的关怀和支持,并组织了有关专家进行评审,作者对此表示衷心的感谢。

编 著 者

1989年6月于武汉市

全书共分八章：广义传播律，最小二乘平差，线性方程组的解算，分组平差，误差椭圆，自由网平差，统计假设检验，最小二乘内插、滤波与配置。本书可作为测绘类大专院校研究生、本科生、专科生和函授生的教材和教学参考书，也可供广大测绘工作者自学参考。

为适应教学需要，本书另配有《测量平差原理习题集》。

目 录

第一章 广义传播律.....	(1)
§ 1.1 概述——观测误差.....	(1)
§ 1.2 偶然误差的统计特性.....	(3)
§ 1.3 精度指标.....	(7)
§ 1.4 方差-协方差阵、协因数阵与权阵.....	(15)
§ 1.5 广义传播律.....	(22)
§ 1.6 广义传播律在测量中的应用.....	(30)
第二章 最小二乘平差.....	(36)
§ 2.1 函数模型.....	(36)
§ 2.2 条件式的线性化.....	(55)
§ 2.3 最小二乘估计.....	(64)
§ 2.4 附有限制条件的条件平差法.....	(67)
§ 2.5 附有限制条件的间接平差法.....	(83)
§ 2.6 间接平差法.....	(91)
§ 2.7 附有未知参数的条件平差法.....	(98)
§ 2.8 条件平差法.....	(106)
§ 2.9 混合平差法.....	(111)
§ 2.10 最小二乘估计的统计性质.....	(121)
§ 2.11 各种平差函数模型的比较和选择.....	(127)
§ 2.12 水准网平差.....	(130)
§ 2.13 测角三角网平差.....	(133)
§ 2.14 测边三角网平差.....	(141)
§ 2.15 边角三角网平差.....	(148)
第三章 线性方程组的解算.....	(151)
§ 3.1 线性方程组的一般理论.....	(151)
§ 3.2 最小二乘平差问题中的线性方程组.....	(152)
§ 3.3 法方程的组成和计算的检核.....	(154)
§ 3.4 高斯约化法.....	(161)
§ 3.5 平方根法(乔勒斯基法).....	(169)
§ 3.6 两种简单迭代法.....	(172)
§ 3.7 点松弛法.....	(175)
第四章 分组平差.....	(182)

§ 4.1 引言	(182)
§ 4.2 附有未知参数的条件分组平差	(182)
§ 4.3 附有未知参数的条件分组平差的特殊情况	(198)
§ 4.4 具有分块权逆阵的条件分组平差	(203)
§ 4.5 无参数的条件分组平差	(211)
§ 4.6 序贯平差(间接分组平差)	(214)
§ 4.7 序贯平差的两种特殊情况	(224)
第五章 误差椭圆	(237)
§ 5.1 概述	(237)
§ 5.2 点位误差	(239)
§ 5.3 误差曲线与误差椭圆	(245)
§ 5.4 相对误差椭圆	(249)
第六章 自由网平差	(252)
§ 6.1 引言	(252)
§ 6.2 加权秩亏网平差	(256)
§ 6.3 秩亏网平差	(265)
§ 6.4 拟稳平差	(270)
§ 6.5 附加阵 G 的确定	(274)
§ 6.6 秩亏平面网平差的几个算例	(277)
第七章 统计假设检验	(287)
§ 7.1 数理统计的基本概念	(287)
§ 7.2 正态分布	(289)
§ 7.3 抽样分布	(292)
§ 7.4 假设检验	(296)
§ 7.5 母体分布函数的假设检验	(308)
§ 7.6 参数的区间估计	(310)
§ 7.7 粗差与形变量检验及粗差剔除	(314)
第八章 最小二乘内插、滤波与配置	(326)
§ 8.1 引言	(326)
§ 8.2 随机函数的基本概念	(323)
§ 8.3 平稳函数的线性内插	(340)
§ 8.4 平稳函数的线性滤波	(345)
§ 8.5 最小二乘配置	(319)
附录A 有关矩阵代数的知识	(362)
附录B 有关公式的理论推证	(369)
附录C 有关的统计用表	(371)
参考文献	(381)

第一章 广义传播律

观测误差是测量平差研究的主要对象, 误差理论是测量平差的理论基础。本章假定读者已具有初步的测量实践知识, 并对观测误差有一定程度的理解, 重点阐明观测误差理论中的基本问题——广义传播律。

§ 1.1 概述——观测误差

1.1.1 观测条件与观测误差

什么是“测量平差”, 为什么要进行测量平差, 这得从测量工作本身谈起。众所周知, 构成测量工作的要素主要是: 观测者、测量仪器和观测时的外界环境。通常, 将构成测量工作的要素称之为观测条件。由于观测条件的限制, 测量工作不可能完美无缺。因此, 在一定的观测条件下, 所得到的观测结果(在统计学中称为子样观测值, 在测量学中简称为观测值)不可能是绝对理想的, 即其数值不可能恰好等于被观测值的真值。也就是说, 观测值中必然包含有观测误差。本书总是以 $\tilde{L}$ 表示被观测量的真值(或称为观测值的真值), 以 L 表示观测值, 它们之间的差数即为观测真误差, 简称为真误差。即有:

$$L + \Delta = \tilde{L}, \quad (1-1-1)a^*$$

或

$$\Delta = \tilde{L} - L. \quad (1-1-1)b$$

为了加深对上述问题的理解, 我们不妨先举几个简单易懂的例子。对一个确定的量进行多次重复观测, 每次得到的观测值往往互有差异。例如, 同一个人用同一架经纬仪对某一角度(具有确定的角度值)观测 9 个测回, 各测回的观测值之间往往互不相等。又例如, 同一组人, 用同一架测距仪, 对 A、B 两点之距离(具有确定的长度值)观测 6 个测回, 各测回的观测值也经常是互不相等。

对多个量进行观测, 即使已知这些量之间应满足某一理论值, 即它们之间存在确定的数量关系, 观测所得到的观测值也往往难以满足, 即不等于应有的理论值。例如, 一个平面三角形的三个内角和的理论值应等于 180° , 但这三个内角的观测值之和往往不等于 180° 。又例如, 一水准闭合环中各测段高差之和的理论值应等于零, 但事实上, 各测段高差的观测值之和一般不等于零。

上述现象在测量实践中是经常发生的, 究其原因, 是由于观测值中不可避免地包含有观测误差的缘故。

* 在有些文献中也常定义 $L - \Delta = \tilde{L}$, 即 Δ 前取负号。无论是采用这一定义, 还是采用 (1-1-1)a 式中的定义, 都不会影响问题的实质。

1.1.2 观测误差的分类及其处理方法

测量误差产生的原因, 主要分仪器误差、观测者以及外界条件的影响三大类。仪器误差是指观测仪器构造上的缺陷和仪器本身精密度的限制, 使观测值含有误差。人的误差是由于观测者的技术水平和感官能力的局限, 致使观测值产生误差。不断变化着的外界条件, 如大气温度、湿度、风力、透明度、大气折光等, 也会给观测值带来误差。

按测量误差对观测结果的影响, 即按测量误差的性质可分为粗差、系统误差和偶然误差三种, 即

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \quad (1-1-2)$$

式中, Δ_1 为粗差, Δ_2 为系统误差, Δ_3 为偶然误差。

A、粗差

粗差是一种大量级的观测误差, 它是测量上的失误。在测量成果中, 是不允许粗差存在的。

粗差产生的原因较多, 主要是作业员的疏忽大意、失职而引起的, 如大数被读错、读数被记录员记错、照准了错误的目标、在航测象片上选错了控制点的影象等。

在观测数据中应尽可能设法避免出现粗差。行之有效的发现粗差的方法有: 进行必要的重复观测; 通过多余观测, 采用必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗差。国家的测绘机构制定的各类测量规范和细则, 一般也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此, 一旦发现粗差, 该观测值必须舍弃或重测。尽管我们十分小心谨慎, 粗差有时仍然在所难免。因此, 如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差, 或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差计算成果的影响, 乃是测绘界十分关注的课题之一。

B、系统误差

在一定的观测条件下作一系列观测时, 符号和大小均保持不变, 或按一定规律变化着的误差, 均称为系统误差。这种误差在测量学和其它专业测量学中已有详细介绍。例如, 测距仪的工作频率与标准频率不一致, 水准尺的1m刻划与1m真长不等, 水准仪的视准轴与水准轴不平行, 大气折光对测角的影响, 观测人员的不良观测习惯对观测成果的影响等等, 均属系统误差。

系统误差对观测成果具有累积作用, 因此, 在测量工作中, 应尽量设法消除系统误差。方法有两种, 一是在观测方法和观测程序上采取必要的措施, 限制或削弱系统误差的影响。如三角测量中的正、倒镜观测, 盘左、盘右读数, 分不同时间段观测; 三角高程测量中的对向观测; 水准测量中的前后视距应保持相等, 分上、下午进行往返观测等。另一种处理系统误差的方法是: 分别找出产生系统误差的原因, 并在平差计算前进行必要的预处理, 即利用已有公式, 对观测值进行系统误差的改正。如对距离观测值进行必要的尺长改正、温度改正、频率改正等; 对高差观测值进行必要的尺长改正、重力异常改正、正高改正等。还有一种方法是在平差计算中考虑到系统误差的存在, 并将其当作未知参数纳入平差函数模型中, 一并解算。

C、偶然误差

在相同的观测条件下, 作一系列观测, 如果观测误差的大小和符号均呈现出偶然性, 即

从表面现象看, 该列误差的大小和符号没有规律性, 但统计分析的结果却具有一定的统计规律性, 则称这样的误差为偶然误差。

产生偶然误差的原因较多, 而且往往是不固定的和难以控制的, 如仪器本身构造不完善而引起的误差、观测者的估读误差、照准目标时的照准误差等。不断变化着的外界环境, 温度、湿度的忽高忽低, 风力的忽大忽小等, 也会使观测数据有时大于被观测量的真值, 有时小于被观测量的真值。

粗差、系统误差和偶然误差是观测误差的三个方面, 但它们又是在测量过程中同时产生的。本书研究的主要对象是偶然误差, 即总是假定: 含粗差的观测值已被剔除, 含系统误差的观测值已经过适当的改正。因此, 在观测误差中, 仅含偶然误差, 或是偶然误差占主导地位。

在(1-1-2)式中, 当 $\Delta_1 = 0$, $\Delta_1 \rightarrow 0$ 时, 则有:

$$\Delta \approx \Delta_{\text{偶}} \quad (1-1-3)$$

为了书写方便, 在本书中, 将以 Δ 表示偶然误差 $\Delta_{\text{偶}}$ 。

1.1.3 测量平差的两大任务

既然观测值中必然包含偶然误差, 那么, 如何处理这些带有偶然误差的观测值, 以寻求被观测量的最佳估值, 则是本书所要解决的一个重要问题。

观测值中含有偶然误差, 是产生测量平差的一个重要原因, 但仅有这一原因还不够。例如, 对A、B两点间的未知距离只丈量一次, 尽管这一次的观测值含有误差, 但会不会产生平差问题呢? 不会的。这是因为, 对两点间的距离而言, 待定量的个数为1。因此, 必要观测数是1。如果实际观测数也是1, 即观测数等于必要观测数, 此时将不会产生平差问题。在实际测量工作中, 为了提高观测成果的质量, 同时也为了发现和消除错误(粗差), 通常要进行多余观测, 即观测数大于必要观测数。有了多余观测, 加之观测值中必然包含有观测误差, 这就产生了观测值之间的矛盾。为了消除这种矛盾, 就必须依据一定的数据处理准则, 采用适当的计算方法, 对有矛盾的观测值加以必要而又合理的调整, 即分别给以适当的改正, 从而消除矛盾、求得被观测量的最佳估值。以后我们还会知道, 在算得观测量的最佳估值的同时, 还要对这些估值进行质量评估, 即它们的可靠程度。人们把这一数据处理的整个过程叫做“测量平差”。概括起来讲, 测量平差有两大任务: 一是通过数据处理求待定量的最佳估值; 二是评估观测成果的质量。

§ 1.2 偶然误差的统计特性

由于测量平差的研究对象是含有偶然误差的观测值, 因此, 有必要对偶然误差的性质作进一步的分析。

就单个的偶然误差而言, 其数值的大小和符号均是偶然的、随机的、无规律的, 但就大量的偶然误差而言, 则又具有一定的规律性, 故称统计规律性。在数理统计学中, 将具有上述特性的变量称为“随机变量”, 而偶然误差就是一个随机变量的典型例子。

1.2.1 一个打靶的例子

在叙述偶然误差的统计特性之前, 让我们先举一个打靶的例子, 来说明统计规律性。

一个射手如果只打靶一次, 这时的中靶点是难以事先预计的。该点可能离靶心较远, 也可能离靶心较近; 可能位于靶轴线的上方, 也可能位于靶轴线的下方。但是如果打靶的次数多了, 大量的中靶点则具有统计规律。对于具有一定技术状态的射手, 在一定的条件下, 连续打靶多次, 我们就可以看到, 越靠近靶心的点越密, 越远离靶心的点越稀, 且以过靶心的轴线上下、左右对称。打靶的次数越多, 这种规律性就越明显。测量中的偶然误差的统计规律性与此类似。

1.2.2 三角形闭合差的例子

在相同的观测条件下, 独立地观测了182个三角形的全部内角。由于观测值中含有偶然误差, 因此, 每一个三角形的内角之和 $(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_i$ 一般不会等于其真值 180° 。由公式 $(1-1-1)b$, 即由

$$\Delta_i = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)_i, \quad (i=1, 2, \dots, 182)$$

可算出182个三角形内角和的真误差。测量学中, 常称三角形内角和的真误差为三角形闭合差。在数理统计学中, 为了客观、形象地表示在相同观测条件下的观测误差出现的规律性, 常采用以下几种方法:

A、表格法

现以误差区间 $d\Delta = 0.2''$ 将该组真误差按其绝对值的大小排列, 统计出误差落入各个误差区间内的个数 γ_i , 并求出误差出现于各个区间的频率。计算公式为:

$$f_i = \frac{\gamma_i}{n}, \quad (1-2-1)$$

式中, n 为误差的总个数, γ_i 为落入第 i 个区间内的误差个数。现将计算结果列于表1-2-1。

表 1-2-1

误差区间 $d\Delta$	Δ 为 负 值		Δ 为 正 值	
	个数 γ_i	频率 f_i	个数 γ_i	频率 f_i
$0'' \sim 0.2''$	22	0.121	22	0.121
$0.2'' \sim 0.4''$	20	0.110	20	0.110
$0.4'' \sim 0.6''$	16	0.088	14	0.077
$0.6'' \sim 0.8''$	11	0.060	12	0.066
$0.8'' \sim 1.0''$	10	0.055	9	0.049
$1.0'' \sim 1.2''$	6	0.033	7	0.038
$1.2'' \sim 1.4''$	2	0.011	4	0.022
$1.4'' \sim 1.6''$	2	0.011	3	0.016
$1.6'' \sim 1.8''$	1	0.006	1	0.006
$1.8''$ 以上	0	0	0	0
Σ	90	0.495	92	0.505

从上表可以看出, 该组误差分布表现出如下规律: 绝对值最大的闭合差不超过 $1.8''$, 绝

对值小的闭合差出现的次数比绝对值大的闭合差出现的多；绝对值相等的正、负闭合差出现的个数大致相等。

大量的测量实践告诉我们，在其它测量结果中，也都显示出上述同样的规律。因此，上述闭合差的分布规律实际上就是偶然误差都具有的统计规律性。

B、直方图法

为表示偶然误差的分布情况，除采用表1-2-1所示的误差分布表外，还可利用图形来描述。图1-2-1就是按表1-2-1的数据绘制而成的直方图。

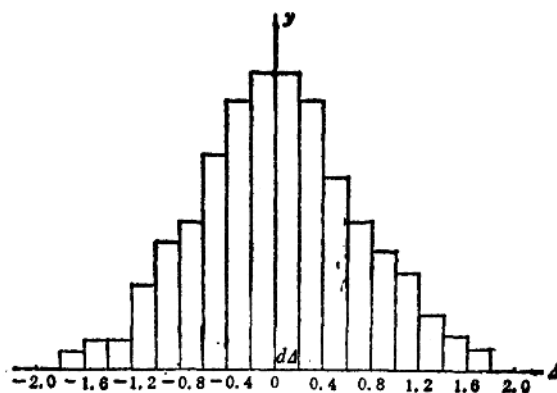


图 1-2-1

绘直方图时，横坐标取误差 Δ ，纵坐标 y 取 $\frac{\nu_i/n}{d\Delta}$ ，即取误差出现于各区间的频率 ν_i/n 除以区间的间隔值 $d\Delta$ 。

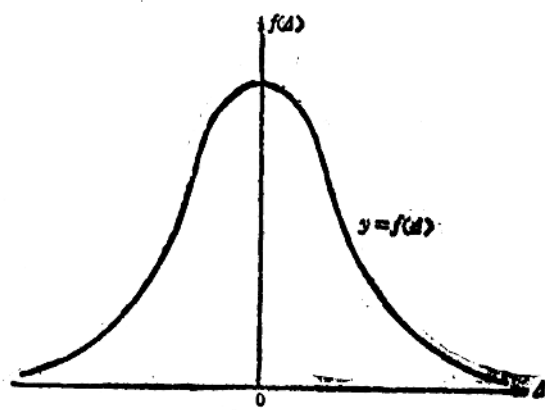


图 1-2-2

以区间的间隔值 $d\Delta$ 。在统计学中，常把这种图称为频率直方图，它形象地表示了该组闭合差的误差分布情况。图中每个长方条的面积为：

$$\frac{y_i}{n} d\Delta = y_i/n = f_i, \quad (1-2-2)$$

即误差出现在该区间内的频率。所以，在直方图中，长方条的总面积为1。

当误差个数 $n \rightarrow \infty$ ，而且误差区间的间隔无限缩小时，则图1-2-1中各个长方条的顶边折线将变成一条光滑的曲线。该曲线称为误差的概率分布曲线，简称误差曲线，而曲线包含的面积恒为1。如图1-2-2所示，误差曲线上任一点的纵坐标 y 均为横坐标 Δ 的函数，即

$$y = f(\Delta). \quad (1-2-3)$$

$f(\Delta)$ 通常称为 Δ 的分布密度函数。

由概率的统计定义知，当 $n \rightarrow \infty$ 时，图1-2-1中每个长方条的面积即为误差 Δ 出现于该区间 $d\Delta$ 内的概率 $p(\Delta)$ 。即当 n 逐渐增多时，实际频率 f_i 将逐渐趋于理论概率 p_i 。对照(1-2-2)式，即可写出：

$$p(\Delta) = f(\Delta) d\Delta. \quad (1-2-4)$$

根据高斯的推证，偶然误差 Δ 是服从均值为零的正态分布的随机变量，其分布密度函数为：

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (1-2-5)$$

式中 $\exp\{\cdot\}$ 表示 e 的指数函数。

1.2.3 偶然误差的统计特性

依据正态分布的特点，我们即可用概率的术语来描述偶然误差所具有的统计特性：

A、在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值大于某个值 Δ_M 的概率为零，即

$$p(|\Delta_i| > \Delta_M) = 0. \quad (1-2-6)$$

或表述为：观测误差的绝对值小于某个值的概率恒等于1，即

$$p(|\Delta_i| \leq \Delta_M) = \int_{-\Delta_M}^{+\Delta_M} f(\Delta) d\Delta = 1. \quad (1-2-7)$$

B、绝对值较小的偶然误差比绝对值较大的偶然误差出现的概率要大。

C、绝对值相等的正负偶然误差出现的概率相等。

应当指出，测量误差是连续型的随机变量。由概率论可知，连续型随机变量出现于个别点处的概率为零。因此，我们所讲的偶然误差出现的概率是指误差出现于该点处的一个微小区间内的概率。

由偶然误差的三个特性可以引出以下两个极为重要的概念：

A、由偶然误差的界限性即可得到：在一定的观测条件下，既然 $\max |\Delta_i| < \Delta_M$ ，那么，我们就可能依据观测条件来确定一个误差限值，这对我们的测量工作是很有益的。在实际工作中，如发现 $\Delta_i > \Delta_M$ ，就可认为 Δ_i 所对应的观测值 L_i 不合格，应予删去或重测。这些，在下一节中还将详细讨论。

B、由偶然误差的对称性和抵消性不难理解， Δ 的理论平均值应为零，即有：

$$E(\Delta) = 0. \quad (1-2-8)$$

若对(1-1-1)b式的两边取期望，则得：

$$E(\Delta) = \tilde{L} - E(L) = 0.$$

可见,

$$E(L) = \tilde{L}. \quad (1-2-9)$$

这表明, 若观测值中不含系统误差和粗差, 则观测值的期望值就是其真值。

(1-2-8)式的结论还给了我们一个重要启示: 如果在实际工作中发现 $\frac{1}{n} \sum \Delta_i \approx 0$, 且其绝对值与零相差较大, 这表明, Δ_i 中不全是偶然误差, 即可能存在系统误差或粗差。

§ 1.3 精度指标

1.3.1 观测条件与观测精度

在第一节中已经指出: 所谓观测条件, 是指产生测量误差的几个主要因素 (仪器、观测者、外界条件) 的综合。众所周知, 观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的关系。一般说来, 观测条件好, 观测时所产生的误差平均说来便小, 观测成果的质量就高, 观测值的精度也高。反之, 观测条件差, 观测成果的质量就低, 观测值的精度也低。因此, 观测成果的质量高低在客观上反映了观测条件的优劣, 即一定的观测条件对应于一定的测量精度。对于在相同观测条件下进行的一组观测, 每一观测值都称为等精度观测值。但必须指出, 由于偶然误差的随机性, 各自的真误差彼此并不相等, 有时甚至会相差较大。因此, 等精度观测值的数值不一定相等。对于同一类的不同量, 如果也是在相同的观测条件下进行的两组观测, 则称这两组的观测值精度相同或相当。

在一定的观测条件下进行的一组观测, 它总是对应着一种确定不变的误差分布。若观测条件好, 则其对应的误差分布一定较为密集。小误差出现的机会多, 则表示该组观测质量较好, 即这一组的观测精度较高。反之, 如观测条件差些, 则误差分布较为离散, 即观测值的波动较大, 表示该组观测质量较差, 即该组观测精度较低。由此可见, 所谓观测精度, 就是指该组观测值误差分布的密集或离散的程度。在不同的观测条件下, 将会得到两条分布密度曲线, 一条陡峭, 一条平坦 (如图1-3-1所示)。

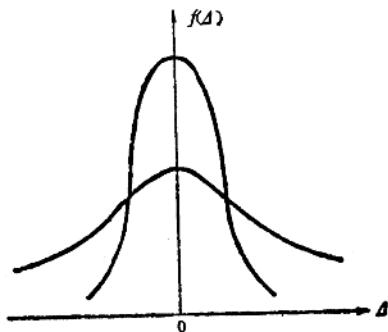


图 1-3-1

陡峭的说明误差分布较为密集, 小误差出现的个数较多, 当然观测精度要高些; 平缓的说明误差分布较为离散, 当然, 这组观测值的精度便低些。

下面将直接给出评估观测值的精度高低的几种数值指标。

1.3.2 几种常用的精度指标

A、方差

由数理统计学知, 随机变量 X 的方差定义为:

$$\sigma_X^2 = E\{(X - E(X))^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 f(X) dX, \quad (1-3-1)$$

式中, $f(X)$ 为 X 的概率分布密度函数。 X 的方差也可记为 $D(X)$ 或 D_x 。

观测值 L 和观测值的真误差 Δ 均为随机变量, 因此, 它们的方差应是:

$$D(L) = \sigma_L^2 = E\{(L - E(L))^2\}, \quad D(\Delta) = \sigma_\Delta^2 = E\{(\Delta - E(\Delta))^2\}.$$

顾及 $E(\Delta) = 0$, $E(L) = \tilde{L}$, $(L - E(L))^2 = (L - \tilde{L})^2 = \Delta^2$, 则

$$D(L) = D(\Delta) = E(\Delta^2). \quad (1-3-2)$$

可见, 任一观测值的方差与观测值误差的方差恒等。

由(1-2-5)式知, Δ 的分布密度函数为:

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{\sigma^2}\right\},$$

所以,

$$\begin{aligned} D(L) = D(\Delta) = E(\Delta^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 f(\Delta) d\Delta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \exp\left\{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right\} d\Delta = \sigma^2. \end{aligned} \quad (1-3-3)$$

这表明, 误差分布密度函数 $f(\Delta)$ 中的参数 σ^2 就是 Δ 的方差。

之所以选择方差 σ^2 作为观测值 L 的精度指标, 这主要是因为方差能反映观测值的离散程度。观测条件越好, 观测值的取值越密集, 则 $L - E(L)$ 就越小, 方差也越小。反之, 观测值越离散, 则 $L - E(L)$ 越大, 方差也越大。因此, 方差的大小能如实地反映观测值密集与离散的程度, 它是表征观测精度的一个理想指标。方差越大, 精度越低, 方差越小, 精度越高。

由数学期望的定义, 又可将方差表示为:

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n}, \quad (1-3-4)a$$

σ^2 的平方根 σ 称为标准差。由上式知:

$$\sigma = \pm \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta\Delta]}{n}}. \quad (1-3-4)b$$

应当指出, (1-3-4)两式只有在观测个数 n 充分大时才成立。实际上, 观测个数 n 总是有限的。因此, 当 n 有限时, 我们只能依据有限个真误差的大小求得方差和标准差的估值, 习惯上记作 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 。其估值公式是:

$$\hat{\sigma}^2 = [\Delta\Delta]/n, \quad \hat{\sigma} = \pm \sqrt{[\Delta\Delta]/n}. \quad (1-3-5)$$

在测绘界, 常用 m^2 和 m 分别表示方差和标准差及其估值, 并称 m 为中误差。

需要说明的是, 在一定的观测条件下, Δ 具有确定不变的概率分布, 即方差 σ^2 和标准差 σ 均为定值, 是一个固定不变的常数。然而, 由(1-3-5)式估计得到的 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 将随着 n 的多少以及试验中取值的随机性而发生波动, 即方差、标准差的估值 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 仍是一个随机变量。毫无疑问, 当 n 逐渐增大时, $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 将越来越趋近于理论值 σ^2 和 σ 。

在具体计算时必须注意两点: 第一, 是哪一个观测值的 Δ , 计算出的就是哪一个观测值

的方差；第二， Δ 可以是同一个量的观测值的真误差，也可以不是同一个量的观测值的真误差，但必须都是同精度且为同类量的观测值的误差。也就是说， Δ 必须是在相同观测条件下得到的同类量的真误差。

例(1-3-1) 为检定一架刚刚购进的经纬仪的测角精度，现对某一精确测定的水平角($\beta = 85^\circ 24' 37.0''$)作25次观测，根据观测结果算得各次的观测误差为(单位：")：

+1.5, +1.3, +0.8, -1.1, +0.6, +1.1, +0.2, -0.3, -0.5, +0.6, -2.0, -0.7,
-0.8, -1.2, +0.8, -0.3, +0.6, +0.8, -0.3, -0.9, -1.1, -0.4, -1.3, -0.9, +1.2,

试根据 Δ ，计算测角精度 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 。

解：由 Δ ，算得：

$$[\Delta\Delta] = \sum \Delta_i = 22.61,$$

由(1-3-5)式算得测角精度为：

$$\hat{\sigma}^2 = [\Delta\Delta]/n = 22.61/25 = 0.904''^2,$$

$$\hat{\sigma} = \pm \sqrt{[\Delta\Delta]/n} = \pm \sqrt{0.904} = \pm 0.95''.$$

例(1-3-2) 在相同观测条件下，观测了某一测区的20个三角形的所有内角，并按公式 $\Delta_i = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$ ，计算出了20个三角形的闭合差(三个内角和的真误差)如下(单位：")：

+1.8, +0.6, -2.0, -1.3, +1.2, -1.0, +1.3, +0.5, -1.2, -0.7,
-0.8, -1.1, +2.5, +2.0, +1.3, +1.7, -2.4, +1.4, +1.1, +3.0.

试依据 Δ ，计算三内角和 Σ 的方差和标准差的估值。

解：由 Δ ，算得 $[\Delta\Delta] = 50.21$ ，由(1-3-5)式算得三内角和的方差和标准差的估值为：

$$\hat{\sigma}_\Sigma^2 = [\Delta\Delta]/n = 50.21/20 = 2.5104''^2, \quad \hat{\sigma}_\Sigma = \sqrt{2.5104} = \pm 1.58''.$$

B、其它精度指标

观测精度除了以方差表征之外，还可用平均误差、或然误差、极限误差和相对中误差等来描述。其中，平均误差与或然误差目前国内外已很少使用，因此只作简单介绍。

所谓平均误差，是指在一定观测条件下出现的一组独立的偶然误差绝对值的数学期望。若以 ϑ 表示平均误差，则

$$\vartheta = E(|\Delta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta| f(\Delta) d\Delta. \quad (1-3-6)a$$

当然，上式也可写为：

$$\vartheta = E(|\Delta|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Delta|]}{n}. \quad (1-3-6)b$$

将 Δ 的密度函数 $f(\Delta)$ (参阅(1-2-5)式)代入(1-3-6)a式，即可导出平均误差与标准差 σ 的理论关系：

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 0.798 \sigma. \quad (1-3-7)$$

当观测个数 n 有限时，平均误差的估值计算公式为：

$$\hat{\vartheta} = \pm \frac{[\Delta|]}{n}. \quad (1-3-8)a$$

当标准差的估值 $\hat{\sigma}$ 已知时，也可用下式计算 $\hat{\vartheta}$ ，即

$$\hat{\theta} = 0.798\hat{\sigma}. \quad (1-3-8)b$$

所谓或然误差,是指50%的观测误差 Δ 所落的区间,也即观测误差落入正、负或然误差之间的概率恰好等于1/2(如图1-3-2):

$$p(-\rho < \Delta < +\rho) = \int_{-\rho}^{+\rho} f(\Delta) d\Delta = \frac{1}{2}. \quad (1-3-9)$$

同样,若将 Δ 的概率密度函数 $f(\Delta)$ 代入上式,也可导出或然误差与标准差 σ 的理论关系式:

$$\rho = 0.6745\sigma. \quad (1-3-10)$$

当观测个数 n 有限时,可用下式计算或然误差的估值:

$$\hat{\rho} = 0.6745\hat{\sigma}. \quad (1-3-11)$$

式中, $\hat{\sigma}$ 为标准差的估值。

极限误差在实际测量工作中是经常采用的。我国各类测量规范明确规定了各类不同等级观测的极限误差值,又叫限值。如在三角测量规范中,就规定了不同等级观测时三角形闭合

差的最大限值。在水准测量规范中,也规定了不同等级观测时水准环高差闭合差的最大限值等等。其作用是:如在外业观测中,由实际观测值计算出的三角形的闭合差或水准环高差闭合差超过了规定的限值,应认真检查,发现有问题的观测值应予返工重测。

规定极限误差的根据是:由第二节的讨论知,观测误差 $\Delta \sim N(0, \sigma^2)$ 分布。为查表需要,先将 Δ 标准化,设

$$\Delta' = \Delta / \sigma, \quad (1-3-12)$$

则 $\Delta' \sim N(0, 1)$ 分布。由此可见, Δ 落在 $(-\sigma, +\sigma)$ 、 $(-2\sigma, +2\sigma)$ 和 $(-3\sigma, +3\sigma)$ 内的概率相当于 Δ' 落在 $(-1, +1)$ 、 $(-2, +2)$ 和 $(-3, +3)$ 内的概率。查表(见附录C)即得:

$$p(-\sigma < \Delta < +\sigma) = p(-1 < \Delta' < +1) = \Phi(+1) - \Phi(-1) = 0.683,$$

$$p(-2\sigma < \Delta < +2\sigma) = p(-2 < \Delta' < +2) = \Phi(+2) - \Phi(-2) = 0.955,$$

$$p(-3\sigma < \Delta < +3\sigma) = p(-3 < \Delta' < +3) = \Phi(+3) - \Phi(-3) = 0.997.$$

可见,大于三倍标准差的观测误差 Δ 出现的概率只有0.3%,是小概率事件。在一次观测中,可以认为是不可能事件。因此,通常将三倍的标准差作为极限误差,即

$$\Delta_{\text{限}} = 3\sigma. \quad (1-3-13)a$$

也有规定两倍标准差作为极限误差的,即

$$\Delta_{\text{限}} = 2\sigma. \quad (1-3-13)b$$

相对中误差常用于边长观测值中。这是因为,在边长观测值中,常采用单位长度上精度的大小即相对误差来表征边长观测值的精度。因此,相对中误差的定义是中误差与观测值之比。可见,相对中误差是一个无名数。为方便比较,通常将分子化为1。在此情况下,分母的数值愈大,则边长观测值的精度愈高。

例[1-3-3] 试根据例[1-3-1]的数据,计算该经纬仪的测角精度指标 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\rho}$ 。

解:由例[1-3-1]知,标准差的估值为,