高 等 数 学

主编:申小莉
编写:申小莉　周铁军　陈亚波　张治觉

国防科技大学出版社
·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/申小莉主编;周铁军等编. —长沙:国防科技大学出版社,2000.8
ISBN 7-81024-643-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.①申…②周…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 33373 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4555681　邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:罗　青　责任校对:黄　煌
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装

*

787×1092　1/16　印张:16.25　字数:375 千
2002 年 9 月第 1 版第 2 次印刷　印数:5051－7000 册

*

定价:18.00 元

前　　言

《高等数学》是高等农业院校学生必修的重要基础课。我们根据农业院校各专业的需要，依照全国高等农业院校数学教学大纲所规定的基本要求，结合多年来的教学实践，组织编写了这本教材。

本书结构紧凑，取材精炼，详略适当。除注意数学理论的系统性外，还较多地联系了农业院校各专业的实际情况。考虑今后教学的需要，我们在参考国内外有关教材的基础上，对某些问题作了一些新的尝试，增加了数学应用知识的介绍，补充了数学实验。

本书可供高等农业院校本科各专业使用，也可供专科、函授、夜大等相近专业使用。书中加了“*”号的内容，可以根据教学的需要和学时安排略去不讲。

本书由申小莉任主编。第一、二、九章由陈亚波编写，第三、四章由申小莉编写，第五、六章由张治觉编写，第七、八章由周铁军编写。参加本书审阅的有王伯曾、李道改等，由王伯曾任主审。

由于我们的水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎使用本书的教师和读者批评指正。

编者

2000 年 5 月

目　　录

第五章 积分学

第八章 重积分

第九章 微分方程

第一章　函数

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程。17 世纪法国数学家笛卡尔(Descartes)把变量引入数学，推动了数学史上一项划时代的变革。在此基础上，英国数学家、物理学家牛顿(Newton)和德国数学家、哲学家莱布尼茨(Leibniz)创建了微积分。函数是微积分学中最重要的基本概念之一，是微积分研究的对象。本章介绍变量、函数概念及函数的特性。

第一节　函数

一、常量与变量

当我们观察各种自然现象或实现过程时，常常会遇到各种不同的量。其中有的量在观察过程中保持一定的数值，这种量称为常量；还有一些量在问题的进行过程中，可以取不同的数值，这种量称为变量。例如，生物学中在一定容积的培养基中成批培养细菌，在培养过程中，容积是常量，培养的时间、细菌的数目是变量。

值得注意的是，常量、变量并不是绝对的。同一个量在某种情况下可以认为是常量，而在别的情况下，就可能是变量。例如，商品的价格在短时间内可以看做常量，在一个较长的时间内就是一个变量；一个人在从小孩到成人的整个过程中，身高就是一个变量，但在一天中其身高变化很微小，就可以把它看做常量。

通常我们用字母 $a, b, c, \cdots$ 等表示常量，用字母 $x, y, z, u, v, w, \cdots$ 等表示变量。

任何一个变量都有一定的变化范围。我们常用区间表示变量的范围。

区间是指介于两个实数 $a, b(a < b)$ 之间的全体实数。这两个实数 a, b 叫区间的端点。数 $b - a$ 叫做区间的长度。

满足 $a < x < b$ 的全体实数 x 叫开区间，记为 (a, b)。

满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全体实数 x 叫闭区间，记为 $[a, b]$。

满足 $a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$ 的全体实数 x 叫半开区间，记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$。

以上区间都是有限区间。此外还有所谓无限区间。

满足 $x > a$ 的全体实数 x，记为 $(a, +\infty)$。

满足 $x \geqslant a$ 的全体实数 x，记为 $[a, +\infty)$。

满足 $x < b$ 的全体实数 x 记为 $(-\infty, b)$。

满足 $x \leqslant b$ 的全体实数 x 记为 $(-\infty, b]$。

全体实数 x 记为 $(-\infty, +\infty)$。

注意：“∞”读作无穷大，它不是数，只是一个记号，“+”、“-”表示它的方向。

另外，我们还将用到与区间有关的邻域的概念，现介绍如下：

设 a,δ 是任意两个实数，$\delta>0$，满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体叫点 a 的 δ 邻域，记为 $N(a,\delta)$，点 a 叫这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径。

有时我们也称满足不等式

$$0<|x-a|<\delta$$

的实数 x 的全体为 a 的空心邻域，记为 $N(\hat{a},\delta)$。a 的空心邻域与 a 的邻域区别在于它不包含点 a。

二、函数概念

在同一自然现象中，往往同时有几个变量在变化着。这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律。这种变量与变量之间的相互联系的变化规律，就是数学中的所谓函数关系。

定义 1 设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在实数集的某一范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律总有确定的数值与它对应，那么称 y 是 x 的函数。其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量。

为了表明 y 是 x 的函数，通常记为 $y=f(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等等。这里 f,φ，F 表示 y 与 x 的对应规律即函数关系。它们是可以任意采用的，但同一问题中不同的函数应用不同的字母表示。

如果对于自变量 x 的某个值 x_0，因变量 y 有一个确定的值 y_0 与之对应，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处有定义，也称 y_0 为函数在点 x_0 处的函数值，记为 $y_0=f(x_0)$ 或 $y_0=y|_{x=0}$。使函数有定义的一切实数 x 的全体称为函数的定义域，记为 D。例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-2,2)$，函数 $y=\lg(x-1)$ 的定义域为无限区间 $(1,+\infty)$。在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定。

函数值的变化范围叫做函数的值域。

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数都只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。我们主要讨论单值函数，以后如果没有特别说明的函数都是指单值函数。

由定义知，定义域和对应规律是决定函数的两个要素。定义域和对应规律相同的函数，应视为同一函数。

在初等数学中，我们已经学过一些函数：

(1) 幂函数　$y=x^\alpha$　(α 为常数)

(2) 指数函数　$y=a^x$　($a>0$，且 $a\neq1$)

(3) 对数函数　$y=\log a^x$　($a>0$ 且 $a\neq1$)

(4) 三角函数　$y=\sin x$　$y=\cos x$　$y=\tan x$

$y=\cot x$　$y=\sec x$　$y=\csc x$

(5) 反三角函数　$y=\arcsin x$　$y=\arccos x$

$$y = \arctan x \quad y = \operatorname{arccot} x$$

这五类函数统称为基本初等函数。

下面再举几个在初等数学中没有见过的函数。

例 1 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

通常称为符号函数，它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，而值域由三个数$-1,0,1$组成(如图 1-1)。

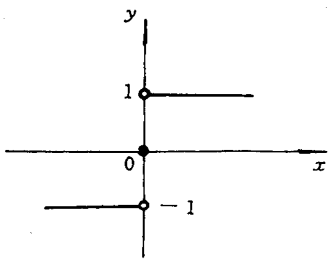

图 1-1

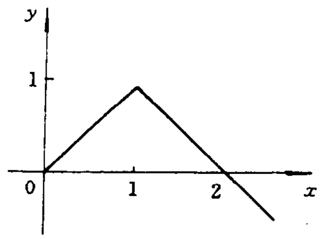

图 1-2

例 2 函数 $y = f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -x+2 & 1 < x < +\infty \end{cases}$

其定义域 $D = [0, +\infty)$，当 $x \in [0,1]$ 时，对应的函数值 y 由 $y = x$ 确定；当 $x \in (1, +\infty)$ 时，y 由 $y = -x+2$ 确定。它的图形如图 1-2。

例 3 设 A 是一个数集，我们定义：

$$X_A \rightarrow A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

称函数 $X_A(x)$ 为数集 A 的特征函数，它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，而值域由两个数$0,1$组成。

上面三例中所举函数都有一个特点，当自变量在不同范围内时，函数关系由不同的解析式子给出。我们把这种函数叫做分段定义的函数，简称分段函数。

三、函数的性质

1. 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称且对于定义域内的任意x 都满足

$$f(-x) = f(x)$$

则称这个函数为偶函数。

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足

$$f(-x) = -f(x)$$

则称这个函数为奇函数。

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称。

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) \leqslant f_2(x)$（或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（或单调减小）。

如果函数 $f(x)$ 对于区间 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加（或严格单调减少）。

（严格）单调增加或（严格）单调减少的函数都称为（严格）单调函数。

同理可定义在无限区间上的单调函数。

单调增加函数的图形是沿横轴正向上升的（图 1-3），单调减少函数的图形是沿横轴正向下降的（图 1-4）。

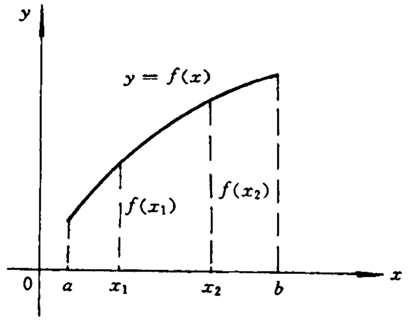

图 1-3

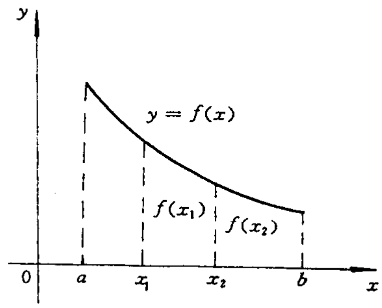

图 1-4

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在某个区间内有定义，如果存在 $M > 0$，使得当 x 取这个区间内的任意值时，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在这个区间内有界；否则称 $f(x)$ 在这个区间无界。

4. 函数的周期性

如果存在一个不为零的常数 T，使得对函数 $f(x)$ 的定义域内的任何 x 值，都有 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，常数 T 称为 $f(x)$ 的周期。显然 kT（k 为正整数）也为 $f(x)$ 的周期，通常我们所说的周期是指最小正周期。

例如：$y = \sin x, y = \cos x$ 的周期为 2π，$y = \tan x, y = \cot x$ 的周期为 π。

5. 反函数

函数关系 $y = f(x)$ 表示 y 的值随 x 的值所确定，那么当 y 的值给定后，为了满足这个函数关系，x 的值也就随之确定（使 x 的函数值恰好为 y）。换句话说，x 的值也随 y 值的变化而变化，从而得到一个新的函数，称为 $y = f(x)$ 的反函数。

定义 2 若给定函数 $y = f(x)$，定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的一个值 y，在 D 内有唯一的 x，使得 $y = f(x)$，由此确定的函数

$$x = \varphi(y) \quad (\text{或 } x = f^{-1}(y))$$

称为 $y = f(x)$ 的反函数，$y = f(x)$ 称为直接函数。

对于函数来说，只要对应关系及定义域不变，自变量和因变量用什么字母表示是无关

紧要的。习惯上常用 x 表示自变量，用 y 表示因变量。因此，如果函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，那么，$y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数。例如 $y=4x-5$ 的反函数可写成 $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$。

在同一个坐标平面上，$y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=\varphi(x)$（或 $y=f^{-1}(x)$）的图形关于直线 $y=x$ 对称。

四、复合函数

先看下面例子，设

$$y=u^3 \quad 而\ u=\sin x$$

以 $u=\sin x$ 代替 $y=u^3$ 中的 u，得

$$y=\sin^3 x$$

我们称这个函数 $y=\sin^3 x$ 是由 $y=u^3$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数。

定义 3 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分使 $f(u)$ 有定义，则函数 y 称为 x 的复合函数。记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为中间变量。

例 4 设 $f(x)=2x^3+1, g(x)=x^2$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$。

解：$f[g(x)]=2[g(x)]^3+1=2[x^2]^3+1=2x^6+1$

$g[f(x)]=[f(x)]^2=[2x^3+1]^2=4x^6+4x^3+1$

例 5 设一个家庭贷款购房的能力 y 是其偿还能力 u 的 100 倍，而这个家庭的偿还能力 u 是月收入 x 的 20%。

(1) 试把家庭贷款购房能力 y 表示成月收入 x 的函数。

(2) 如果这个家庭的月收入是 4000 元，那么，这个家庭购买住房可贷款多少？

解：(1) 依题意 $y=f(u)=100u, u=g(x)=0.2x$，则有

$$y=f[g(x)]=f[0.2x]=100(0.2x)=20x$$

(2) 将 $x=4000$ 代入 $y=20x$ 得 $y=80\ 000$（元）。

注意：并不是任何两个函数都可复合而成为函数的。例如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数。因为对于 $u=x^2+2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中任何值所对应的 u 值，$y=\arcsin u$ 都没有意义。

还需要指出的是，复合函数可以由两个以上函数复合而成；反过来，一个复杂的函数，根据需要也可以分解为若干个简单函数的复合。

例如：$y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 可以看做由三个简单函数 $y=\ln u, u=\tan v, v=\frac{x}{2}$ 复合而成。

又如：$y=\sqrt{1+\lg(3+\cos 5\sqrt{x})}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=1+\lg v, v=3+\cos w, w=5t, t=\sqrt{x}$ 复合而成的。

定义 4 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算与复合运算，并用一个解析式子表示的函数称为初等函数。

例如：$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$f(x)=\lg^3\arctan 2^{\sqrt{x}}+\sin 3x$，$f(x)=\ln(\sin 3x)^2-e^{\arctan\sqrt{x}}$ 等都是初等函数。在本课程中所讨论的函数大多数都是初等函数。

在实际应用中也常用到非初等函数。例如前面提到的函数 $y=\operatorname{sgn}x$ 是非初等函数。

第二节　函数模型

数学模型是将客观现象的特征或本质以数量关系的形式表达出来的数学式。它是模型的一种。它要能够表达出人们所希望表达的客观现象（或某个系统）的内部关系、特征或趋向。

数学模型应用非常广泛，历史悠久。例如伟大的数学家、物理学家牛顿建立的万有引力定律。假定两质点的质量分别为 m_1,m_2，两质点之间的距离为 r，则沿两质点连线的方向，质点的万有引力为

$$F=k\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}$$

（其中 k 为万有引力常数）。牛顿的这一万有引力数学模型就成功地说明了地球上的引力现象，而且解释天体间的星球运行现象也是成功的。

好的数学模型应该具有科学性、真实性。尽管数学模型的本身不能提供被描述客观现象的内容，但是它应当是被描述现象真实的科学的抽象，它能刻画事物的本质，反映客观事物之间的规律。

在科学技术高度发达的今天，数学已经渗透到科学技术和生产的各个领域。“我们生活在数学的时代，我们的文化已经‘数学化’了。”人们越来越感到数学是“通向科学大门的钥匙”。为了更精确、更深刻地揭示研究对象的本质，建立适当的数学模型将显得更加迫切需要。建立数学模型来解决研究的课题，在物理、工程、化学、生物、经济、管理等学科得到了广泛使用，而且越来越普遍。

本节我们介绍一些简单的函数模型。

一、生命科学中的函数模型

例 1　指数增长模型。

生物学中在稳定的理想状态下，细菌的繁殖按指数模型增长：$Q(t)=ae^{kt}$（表示 t 分钟后细菌数）。假设在一定的培养条件下，开始（$t=0$）时有 2000 个细菌，且 20 分钟后已增加到 6000 个，试问 1 小时后将有多少细菌？

解：因为 $Q(t)=ae^{kt}$

将 $t=0,Q(0)=2000$ 代入上式，得 $a=2000$

所以
$$Q(t)=2000e^{kt}$$

又将 $t=20,Q(20)=6000$ 代入上式，得 $k=\frac{1}{20}\ln 3$

于是
$$Q(t)=2000e^{\frac{1}{20}\ln 3\cdot t}$$

故当 $t = 60$ 时，有

$$Q(60) = 2000e^{\frac{1}{20}\cdot\ln3\cdot60} = 2000e^{3\ln3}$$
$$= 2000\cdot3^3 = 54\,000$$

因此，1 小时后细菌有 54 000 个。

例 2 Logistic 增长模型(见图 1-5)。

当自然资源和环境条件对种群增长起着阻滞作用时，Logistic 曲线是描述种群增长的相当准确的模型。

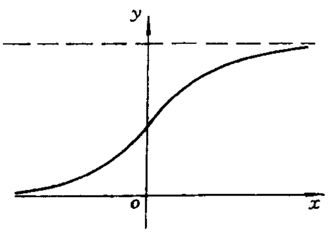

图 1-5

设一农场的某种昆虫从现在 $(t = 0)$ 起到 t 周后的数量为 $P(t) = \dfrac{20}{2+3e^{-0.06t}}$ （万）。

试求：(1) 现在 $(t = 0)$，昆虫数量是多少？

(2) 50 周后，昆虫的数量是多少？

解：(1) 现在昆虫数量为

$$p(0) = \frac{20}{2+3} = 4(\text{万})$$

(2) 50 周后

$$p(50) = \frac{20}{2+3e^{-0.06(50)}} \approx 9.31(\text{万})$$

二、经济管理中的函数模型

1. 总成本函数

总成本是由固定成本和可变成本两部分组成，即总成本 = 固定成本 + 可变成本。固定成本是指企业中不随产量变化的成本，如厂房费用、设备折旧费、行政管理费等。可变成本是指企业中随产量变化的成本，如原材料、燃料、动力支出等。可见总成本是产量的函数，即 $C = C(x)$，其中 x 是产量。

例 3 公司生产某种汽水，按设计要求，其生产能力在 $a \sim b$ 之间，公司的固定成本为 C_1(元)，每生产一个单位产品，变动费用增加 C_2 元，试求总成本函数。

解：设 x 为总产量，则 x 的取值范围为 $[a, b]$，生产 x 个单位的可变成本为 C_2x。因此，总成本

$$C = C_1 + C_2x \qquad x \in [a, b]$$

2. 需求函数

社会需求是由多种因素决定的，我们只讨论需求 (D) 与价格 (P) 的关系。一般情况来说，需求是随着市场价格的提高而减小的，因此需求函数是价格的减函数。如图 1-6。

例如，需求函数 $D(P) = \dfrac{1}{P}$，$D(P) = 2 - P$ 等。

3. 供给函数

供给是由多种因素决定的，我们只讨论供给 (S) 与价格 (P) 的关系。考虑市场供给一方，当市场商品价格上升时，当然愿意提供更多的商品。一般地，供给函数是价格的增函数(图 1-7)。

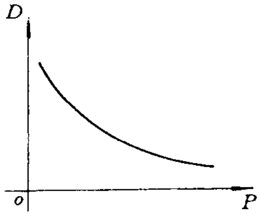

图 1-6

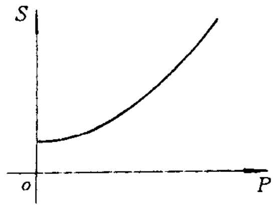

图 1-7

例如：供给函数 $S(P) = 2P - 1, S(P) = 3e^{0.5P}$ 等。

4. *收益函数*

总收益是生产者销售一定数量产品所得的全部收入，它既是销量的函数，又是价格的函数，即收益是销量与价格的乘积。

例如，收益函数 $R = x \cdot P$，其中 x 表示销量，P 表示价格。如果把 P 看成是 x 的函数 $P = P(x)$，则收益 $R = x \cdot P(x) = R(x)$ 也是 x 的函数。

5. *利润函数*

从上述知，成本函数与收益函数都是产量（销量）x 的函数，所谓利润就是收益与成本之差，即 $P(x) = R(x) - C(x)$。

经济常识告诉我们：当生产成本 $C(x)$ 超过销售收益 $R(x)$ 时，则表明这种经营活动是亏本的；反之，当销量收益 $R(x)$ 超过成本 $C(x)$ 时，则产生利润；当利润 $P(x) = 0$，亦即收益 = 成本时，则不亏不盈。通常称利润 $P(x) = 0$ 的点为保本点（不亏不盈点）。

例 4 某公司每天要支付一笔固定费用 300 元（用于房租与薪水等），它所出售的食品的生产费用为 1 元／千克，而销售价格为 2 元／千克，试问它们的保本点为多少？即每天应当销售多少千克食品才能使公司的收支平衡。

解：依题意，成本函数 $C(x) = 1 \cdot x + 300$ （元）

收益函数 $R(x) = 2 \cdot x$（元）

则 利润函数 $P(x) = R(x) - C(x) = 2x - (x + 300)$

令 $P(x) = 0$ 即 $2x = x + 300$ 则 $x = 300$

即每天必须销售 300 千克食品才能保本。

众所周知，价格的提高将引起厂家供给的增加，而社会需求量减少；反之，价格的降低将会使市场供给减少，而需求增加。所谓均衡价格是指在供给与需求相等（即供需平衡）时的价格。

例 5 设一商品的供给函数与需求函数分别为 $S(x) = \frac{1}{7}x + 2$，$D(x) = -\frac{4}{11}x + 9$。试求该商品的市场均衡价格，并作图。

解：市场均衡价格就是供给曲线与需求曲线的交点：

$$S(x) = D(x)$$