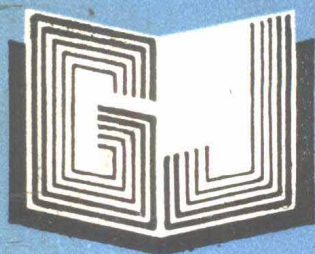


981121



高等学校教材

现代控制理论

浙江大学 于渤 编



381121

高等学校教材

现代控制理论

浙江大学 于渤 编

水利电力出版社

(京)新登字 115 号

内 容 提 要

本书主要内容有：线性系统理论，包括状态空间法、可控性和可观测性、稳定性和李雅普诺夫方法、以及状态反馈和状态观测器；最优控制理论，包括变分法、极小值原理、以及动态规划；最优反馈控制，包括状态调节器、输出调节器、跟踪问题、以及最短时间控制；随机最优线性估计和控制。

本书对上述内容作了全面、系统、深入浅出的阐述，可用作非控制类专业（发电配电电力系统及其自动化、电机和应用电子技术专业等等）的研究生学位课程的教材，也可用作本科生选修课的教材（使用时可有所节略）。

高 等 学 校 教 材

现 代 控 制 理 论

浙江大学 于渤 编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路 6 号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市地矿局印刷厂印刷

*

787×1092 毫米 16 开本 12.75 印张 283 千字

1995 年 5 月第一版 1995 年 5 月北京第一次印刷

印数 0001—1130 册

ISBN 7-120-02270-9/TM·558

定价 7.30 元

前 言

本书是根据原能源部核定的《1990~1992 年高等学校教材编审出版计划》编写的。

自动控制理论的重要性正在不断提高, 高等学校的许多专业, 都设置了经典控制理论课程。不少专业的研究生培养计划也设置了现代控制理论课程, 有些专业还是作为学位课程。

原能源部电力工程类专业教学委员会自动远动教学组, 对本教材的编写大纲, 先后在三次会议上作了审查, 在 1991 年教学组扩大会议上, 对教材油印稿作了审读。教学组要求本书, 以紧凑的篇幅, 对现代控制理论的基本内容作全面、系统、深入浅出的阐述, 以利于读者。在编写过程中, 虽然力图按上述要求去做, 但实际上是否能够做到, 将有待检验。热切希望读者提出意见。

本书的主审人是山东工业大学张荣祥教授, 他为审稿做了很多工作, 提出了宝贵的意见。谨对张荣祥教授表示衷心的感谢。

本书使用的有关技术术语以全国自然科学名词审定委员会公布的《自动化名词, 1990》^[138]为依据。

编 者

1992 年 12 月

符号一览表

$A, B, P, \dots$	大写黑体字母, 表示矩阵
$x, y, u, \dots$	小写黑体字母, 表示向量
$\mathcal{R}$	实数域
$\mathcal{C}$	复数域
$\mathcal{L}$	Laplace (拉普拉斯) 变换
$\mathcal{Z}$	Z 变换
$X, Y, U, \dots$	x, y, u 的 Laplace 变换或 Z 变换
$\in$	属于, $X \in A$, X 是集合 A 的一个元
$\forall$	全称量词, $\forall x \in A$, 对于每一个属于 A 的 x
$\exp(\cdot)$	指数函数
$\text{grad}(\cdot)$	梯度
$\ \cdot\ $	模, 范数
$[0, \infty)$	时间区间, $0 \leq t < \infty$
$\triangleq$	定义为, 相当于 “ <u>def</u> ”
$\text{sgn}(\cdot)$	符号函数

在正文中和附录中说明的符号未列入本表。

目 录

前言

符号一览表

第一章 绪论	1
第一节 自动控制理论的发展	1
第二节 现代控制理论的基本内容	3
第三节 现代控制理论的进一步发展	4
第二章 状态空间法	6
第一节 引言	6
第二节 线性定常连续系统状态空间表达式	7
一、由状态图导出状态空间表达式 二、由系统的机理导出状态空间表达式 三、由传递函数导出 状态空间表达式 四、由状态空间表达式导出传递函数矩阵 五、状态空间表达式的非唯一性	
第三节 线性定常连续系统状态方程的解	16
一、齐次状态方程的解 二、矩阵指数 三、非齐次状态方程的解	
第四节 线性时变连续系统	20
一、齐次状态方程的解 二、状态转移矩阵的计算 三、非齐次状态方程的解	
第五节 非线性连续系统	23
第六节 离散系统	24
一、由差分方程建立状态空间表达式 二、采样数据系统的状态方程 三、定常离散系统状态方程的 解 四、时变离散系统	
习 题	32
第三章 可控性和可观测性	35
第一节 引言	35
第二节 连续系统的可控性检验	36
一、Gram (格兰姆) 矩阵 二、时变系统 三、最小能量控制 四、定常系统	
第三节 连续系统的可观测性检验	42
一、时变系统 二、定常系统	
第四节 对偶原理	44
第五节 可控性和可观测性的不变性	45
第六节 离散系统的可控性和可观测性	45
一、时变系统 二、定常系统	
第七节 Jordan (约当) 规范型状态模型的可控性和可观测性	48
第八节 输出可控性	52
一、线性时变连续系统 二、线性定常连续系统	
第九节 可控规范型和可观测规范型	52
第十节 线性定常系统的规范分解	55

第十一节 可控性、可观测性与传递函数(矩阵)的关系	56
一、单输入-单输出系统 二、多输入-多输出系统	
第十二节 采样对可控性和可观测性的影响	58
习 题	59
第四章 稳定性和李雅普诺夫方法	60
第一节 引言	60
第二节 稳定性概念和定义	61
一、在李雅普诺夫意义下的稳定性和渐近稳定性 二、有界输入-有界输出稳定性 三、总体稳定性	
第三节 线性定常系统的稳定性	63
一、连续系统 二、离散系统 三、采样对稳定性的影响	
第四节 非线性系统的稳定性和李雅普诺夫第二方法	69
一、一些预备知识 二、李雅普诺夫第二方法	
第五节 李雅普诺夫第二方法在线性连续自治系统中的应用	72
第六节 为非线性连续自治系统寻找李雅普诺夫函数	74
一、克拉索夫斯基法 二、变量-梯度法	
第七节 使用李雅普诺夫函数估计暂态行为	78
第八节 李雅普诺夫第二方法在离散自治系统中的应用	80
一、李雅普诺夫稳定性定理 二、线性系统的稳定性	
第九节 李雅普诺夫第二方法在时变连续系统中的应用	81
习 题	81
第五章 状态反馈和状态观测器	83
第一节 引言	83
第二节 可控型和可观测型	84
一、单输入-单输出系统 二、多输入-多输出系统	
第三节 状态反馈对可控性和可观测性的影响	91
一、可控性 二、可观测性	
第四节 借助于状态反馈实行极点配置	92
一、单输入系统 二、多输入系统	
第五节 全阶状态观测器	95
第六节 分离原理	98
第七节 降阶观测器	99
第八节 离散系统的状态反馈	101
第九节 离散系统的观测器	102
习 题	103
第六章 最优控制理论	105
第一节 引言	105
一、容许控制和容许轨迹 二、性能指标 三、最优控制问题的提法	
第二节 变分法	107
一、函数取极小 二、泛函取极小 三、使用 Hamilton (哈密尔顿) 方法建立变分法公式	
第三节 极小值原理	122

一、控制变量有不等约束 二、控制变量和状态变量有不等约束	
第四节 动态规划	126
一、动态规划法在离散系统中的应用 二、动态规划法在连续系统中的应用	
习 题	133
第七章 最优反馈控制	135
第一节 引言	135
第二节 离散线性状态调节器	135
第三节 连续线性状态调节器	139
第四节 定常线性状态调节器	144
一、连续系统 二、离散系统 三、性能指标的离散化	
第五节 Riccati (黎卡提) 方程的数值解	151
一、直接积分法 二、负指数法 三、迭代法	
第六节 输出调节器问题和跟踪问题	152
一、输出调节器问题 二、跟踪问题	
第七节 具有预定的稳定度的线性调节器	156
第八节 次优线性调节器	157
第九节 线性定常系统的最短时间控制	160
一、控制的平凡性 二、控制的存在性和唯一性	
习 题	163
第八章 随机最优线性估计和控制	165
第一节 引言	165
第二节 随机过程和线性系统	165
一、随机过程概述 二、线性连续系统对白噪声的响应 三、线性离散系统对白噪声的响应	
第三节 线性连续系统的最优估计	169
一、线性连续系统的卡尔曼滤波器 二、与最优线性调节器的对偶关系 三、定常线性状态估计器	
第四节 线性离散系统的最优估计	176
第五节 滤波的稳定性概念和滤波发散问题	182
第六节 随机最优线性调节器	183
习 题	184
附录 关于矩阵方法的一些结果	186
参考文献	190

第一章 绪 论

第一节 自动控制理论的发展

自动控制理论，简称控制理论，是关于自动控制系统的构成、分析和设计的理论。

系统，可以定义为处于自身相互关系中以及与环境的相互关系中的要素集合⁽¹¹⁷⁾。说得详细一些，通俗一些，系统是由按一定的关系作用和制约的各个部分组成的具有一定功能的整体；有一定的边界将系统内部与系统外部（系统环境）区分开来。一台发电机励磁自动调节装置、一套机组、一所发电厂、一条生产线、一个企业、一个企业体系、一项科学技术工程、一个经济协作区、等等，是规模大小不等的系统。若系统的组成部分本身也是系统，则称为原系统的子系统。而原系统又可以是更大的系统的组成部分，这是系统概念的相对性或层次性。有工程的系统，有生物体的系统，也有其它的系统。控制，是为了改善系统的性能或达到系统的目的，通过信息采集和加工而形成的施加在系统上的作用。自动控制系统，是代替或部分代替人的直接参与，使生产过程或其它过程按期望规律或预定过程进行的控制系统。自动控制系统是实现自动化的主要手段。自动控制系统也简称控制系统。

自动控制理论是一门技术学科，而不是这种或那种具体的工程实践。技术学科把工程实际中所用的许多原则加以整理和总结，使之成为理论，把工程实际的各个不同领域的共同性显示出来，使得人们可能有更广阔的眼界用更系统的方法来观察有关的问题。关于系统的部件的详细构造和设计问题，元件的具体问题，自动控制理论都不作研究。系统与环境之间、系统各部分之间的联系是通过物料、能量或信息的传递来实现的。信息来源于物质，但不是物质本身。信息与能量有密切关系，但不等同于能量。信号是信息的载体。例如，一台运行着的发电机，它的运行电压的高低以及高低的程度如何是一种信息，而它的运行电压值（例如，以千伏计）则是一种信号。自动控制理论主要研究自动控制系统中的信号。

自动控制技术的出现早于自动控制理论的形成和趋于完备。设计和建造自动控制系统以代替或部分代替人的部分体力、脑力劳动的努力可以追溯到人类的古代文明时期。中国东汉时期建造的指南车被称为是人类历史上最早的“控制论”机械。到了近代，1788年J·瓦特（J. Watt）发明了蒸汽机以及与之配套的离心式飞摆调速器，构成了近代的自动控制装置。

随着种种自动控制系统的建立，不少学者致力于研究自动控制系统的稳定性等有关的理论问题，并逐步取得了成果。例如，1868年J.C. 麦克斯韦（J.C. Maxwell）发表的《论调速器》总结了无静差调速器的理论，1876年И. А. 维什涅格拉茨基（И. А. Вышнеградский）发表的《论调节器的一般理论》进一步总结了调节器的理论，E. J. 劳思

(E. J. Routh) 在 1875 年, A. 赫尔维茨 (A. Hurwitz) 在 1895 年分别独立地直接根据代数方程的系数判别系统稳定性的判据。进入 20 世纪, 研究工作又得到了更多的进展, 1922 年 H. 米诺尔斯基 (H. Минорский) 发表《关于船舶自动操舵的稳定性》, 1932 年 H. 奈奎斯特 (H. Nyquist) 建立了根据频率响应判别系统稳定性的判据, 1934 年 H. L. 黑曾 (H. L. Hazen) 发表《关于伺服机构理论》, 同年 И. Н. 沃兹涅先斯基 (И. Н. Вознесенский) 发表《自动调节理论》, 1938 年 A. B. 米哈依洛夫 (A. B. Михайлов) 发表《频率法》, 这些工作标志着经典控制理论的诞生。1939 年前苏联科学院设立自动学和远动学研究所, 同年美国马萨诸塞州理工学院 (MIT) 建立伺服机构实验室。这二者是世界上第一批系统与专业的研究机构, 为 20 世纪 40 年代形成经典控制理论学科和发展局部自动化作了理论上和组织上的准备。这一学科当时在美国称为伺服机构 (servo mechanism) 理论, 在前苏联称为自动调整理论, 它主要是研究单变量的线性定常系统控制问题。20 世纪 40~50 年代, 经典控制理论的研究取得了重大的进展。1945 年 H. W. 伯德 (H. W. Bode) 发表专著《网络分析和反馈放大器设计》。同年 L. A. 麦科尔 (L. A. Maccoll) 发表第一本关于经典控制理论的专著《伺服机构的基本理论》。1947 年 H. M. 詹姆斯 (H. M. James) 等三人合著的第一本经典控制理论教材《伺服机构理论》出版。1948 年 N. 维纳 (N. Wiener) 发表《控制论》, 为控制论奠定了基础。同年 C. E. 香农 (C. E. Shannon) 发表《通信的数学基础》, 为信息论奠定了基础。维纳和香农分别从控制和信息这两个侧面来研究系统, 维纳还从信息的角度研究反馈系统的本质, 从而人们对反馈和信息有了较深刻的理解。1954 年钱学森发表《工程控制论》, 全面总结了经典控制理论。上述这一切, 标志着经典控制理论的成熟。

经典控制理论很快就面临新的挑战: 工程实际和科学技术问题中大量出现多输入多输出的情况; 被控的系统不少是非线性的或者是参数时变的; 控制目标也有许多不同的情况; 等等。学者们试图把经典控制理论推广到多变量系统的控制, 都遭到了失败, 需要寻求新的理论和方法, 于是现代控制理论诞生了。现代控制理论通过对系统的状态变量描述来进行控制系统的分析和设计, 基本的方法是时间域方法。现代控制理论所能处理的控制问题比经典控制理论广泛得多, 包括单变量系统和多变量系统、线性系统和非线性系统、定常系统和时变系统、确定性系统和非确定性系统 (包括随机系统和模糊系统)。

在空间技术等方面的推动下, 关于现代控制理论的研究获得了积极的推进, 并取得了一批杰出的成果。1956 年 Л. С. 庞特里雅金 (Л. С. Понтрягин) 创立了极大值原理, 同年 R. 贝尔曼 (R. Bellman) 创立了动态规划, 这两者为最优控制建立了理论基础。1959 年 R. E. 卡尔曼 (R. E. Kalman) 提出了卡尔曼滤波。1960 年卡尔曼提出了控制系统的可控性和可观测性。上述这些重要成果的取得标志着现代控制理论的形成。

1960 年在第一届全美联合自动控制会议上, 把系统与控制领域中研究单变量控制问题的学科称为经典控制理论, 研究多变量控制问题的学科称为现代控制理论。其后, 世界范围内广泛同意使用这样的学科名称。

使用经典控制理论和现代控制理论这样两个学科名称, 是历史的原因形成的, 标志着自动控制理论发展的两个不同阶段。这里要避免一种误解, 以为两者是没有内在联系的, 甚

至误以为经典控制理论是过时的，应予淘汰。实则两者存在着内在的联系；而且，用经典控制理论的方法分析研究单输入、单输出的线性定常系统，往往是简单明了的，迄今仍然十分有效。

读者在学习本课程之前已经学过经典控制理论。本书也不列入经典控制理论方面的内容。

本世纪 70 年代，又出现了大系统理论。大系统理论尚在形成和发展中，可粗略地定义为“规模庞大、结构复杂、相互关联、功能综合、因素众多的系统。”有一种见解认为，经典控制理论、现代控制理论和大系统理论可依次称为第一代、第二代和第三代自动控制理论。

自动控制理论与数学、控制论、信息论以及系统论关系密切。

数学对于自动控制理论极为重要。如果不作定量的研究，自动控制理论是没有意义的。自动控制理论所要用到的数学工具，随着所研究的问题的不同情况，涉及到数学的许多分支，例如，常微分方程、复变函数、线性代数、矩阵理论、数值分析、偏微分方程、泛函分析、概率论、数理统计、数学规划、运筹学，等等。

自动控制理论 (automatic control theory) 与控制论 (cybernetics) 紧密相关。N. Wiener 和他的同事把自动控制理论和通讯理论中的基本问题综合成控制论这门新的学科。1949 年 N. Wiener 出版了他的奠基性著作《控制论》^[114]，该书的副题是“或关于在动物和机器中控制和通讯的科学”。控制论这门学科中能够直接用于工程的那些部分是工程控制论。发展生产力的一个重要方面是推进技术革命。对现代生产发生深远影响的技术革命有：核能、电子计算机和航天。此外，还酝酿着另外几项技术革命，例如，激光、遗传工程。所有这些技术革命以及现在已掌握的技术，无不与控制论联系在一起。50 年代诞生了工程控制论和生物控制论。60 年代，推广到了经济系统，出现了经济控制论。进而运用于社会领域，又出现了社会控制论。上述这四门技术学科加在一起称为控制论。20 世纪上半叶，人类认识客观世界有三大飞跃，建立了相对论、量子论和控制论。相对论是处理宏观物质运动的基础理论，量子力学是处理微观物质运动的基础理论，作为一门基础科学的控制论则还有待于建立。控制论科学的发展自然对自动控制理论有巨大的影响^[115, 116]。

信息论是一门研究信息传输和信息处理系统一般规律的学科^[118]，自动控制理论则研究动态系统中信号的传递和变换与系统运动的关系。系统论是运用逻辑和数学的方法研究一般系统运动规律的理论^[117]，自动控制理论则是研究自动控制系统运动规律的理论。因而，自动控制理论与信息论和系统论的关系也是密切的。有这样一种见解：控制论、信息论与系统论是几乎同时兴起的一组综合性的横断学科。

第二节 现代控制理论的基本内容

1. 线性系统理论

1) 状态空间法 状态空间法用状态空间表达式描述和分析研究控制系统，即用建立控制系统的状态空间表达式，求状态方程的解。连续系统的状态方程是一阶微分方程组，离

、态方程是一阶差分方程组。

、可控性和可观测性 系统的输入可以控制系统状态的转移，称为可控性；系统可以根据输入和输出的测量值来确定状态，称为可观测性。这两者是系统的重要属性。

3) 稳定性和李雅普诺夫方法 稳定性是控制系统的又一个重要属性，指系统输入、初始条件或系统参数小的变化不会引起系统行为大的变化。李雅普诺夫第二方法是分析研究稳定性的重要手段。

4) 状态反馈和状态观测器 这是考虑控制系统的设计问题。借助状态反馈可以实现闭环系统的极点配置。实行状态反馈就需要全部状态变量，借助于一种可以直接量测输出向量和输入向量的装置，将状态向量“观测”出来，这样的装置称为“状态观测器”。

2. 最优控制

按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使控制对象按技术要求运动，同时使性能指标达到最优（极值），这是最优控制。解决最优控制问题的理论和方法有：变分法、极小值原理和动态规划。实施最优控制主要借助最优反馈控制，主要有两类：（1）使二次型性能指标取极小的控制；（2）使时间为最短的控制。

3. 随机最优估计和控制

这是在具有随机信号、随机噪声和随机系统特性时，系统的最优估计和控制。这里有最优估计问题（包括预测、滤波和平滑问题），即求状态向量的最优估计；又有随机最优控制问题，主要是线性高斯二次型问题，它可分为两部分，一是用 Kalman 滤波技术求状态的估计值，另一是按确定性二次型最优控制问题由上述估计值求状态反馈最优控制规律。

上述基本内容要在本书中逐一阐述。动态系统辨识和适应控制理论也是现代控制理论的内容，受课程容量的限制，本书中没有列入。

第三节 现代控制理论的进一步发展

现代控制理论学科的内容很广泛，又很活跃。一些分支在继续发展，提高其内涵的深度；一些新的分支在陆续崛起。下面举出其中的主要者。

鲁棒控制 控制系统在其特性或参数发生摄动时仍可使系统性能指标保持不变的属性称为鲁棒性。鲁棒性是控制系统设计中必须考虑的一个基本问题。使控制系统具有良好的鲁棒性的控制是鲁棒控制。以准确地跟踪外部参考输入信号和完全消除扰动的影响为稳态性能指标的鲁棒性称为结构无静差性。使系统实现结构无静差的控制器称为鲁棒调节器。

模糊控制 采用由模糊数学语言描述的控制律（控制规则）来操纵系统工作的控制方式。采用这种控制方式是因为：在实际工程中，许多系统和过程都十分复杂，难以建立确切的数学模型和设计出通常意义下的控制器，只能由熟练的操作者凭借经验以手动方式控制，其控制规则常常以模糊的形式存在于操作者的经验中，很难用传统的数学语言来描述。

智能控制 在无人干预的情况下能自主地驱动智能机器实现控制目标的自动控制。智能控制是应用人工智能的理论和技術、运筹学的优化方法同控制理论方法与技术相结合，在未知环境下，仿效人类的智能，实现对系统的控制。

多变量频域方法 用多项式矩阵理论把状态空间法同经典频域方法结合起来，研究线性定常多变量控制系统的一套理论和设计方法。

非线性控制 种种非线性现象已被揭示，例如，自激振荡，分谐波振荡、频率捕捉、异步抑制、分岔、混沌、奇异吸引子等，有待于深入研究。大量线性元件的集成不可能产生质的飞跃，但大量非线性元件的集成却可以产生质的飞跃，可以形成联想、学习、智能功能等，可以实现寻优的计算。元胞自动机和神经网络等都是由非线性元件组成的。非线性科学与非线性控制结合起来，将会出现光明的前景。非线性系统理论有一些新的进展：双线性系统理论（双线性系统是一特殊类型的非线性系统）；流形上的控制理论（微分流形是通常意义下光滑曲面概念的推广）；非线性反馈（在某些系统中比采用线性反馈有更好的性能，已由一种控制技术形成为一种控制理论）；分岔理论（研究分岔现象的特性和产生机理的数学理论）；突变论；耗散结构理论等等。

第二章 状态空间法

第一节 引言

进行系统分析研究首先要建立系统的数学描述,或数学模型。物理系统具有若干变量,某些变量之间的关系,常用方程表示,也可以用表格或图形表示,这些方程、表格或图形称为物理系统的数学模型,它是系统的变量之间相互关系和变化规律的数学描述。

系统如图 2-1 所示,系统输入向量 u 是 p 维的,其分量为 $u_1, u_2, \dots, u_p$ 。系统输出向量 y 是 q 维的,其分量为 $y_1, y_2, \dots, y_q$ 。仅表明系统输入-输出关系的数学描述称为系统的输入-输出描述。经典控制理论使用这种描述。

系统的状态变量描述则还要加上系统内部的状态向量 x ,它是 n 维的,其分量即状态变量为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ (图 2-1)。现代控制理论使用这种描述。

先介绍因果性、松弛性、线性和定常性。

因果性:若系统在时刻 t 的输出并不取决于在 t 之后的输入,而仅取决于时刻 t 和在 t 之前所加的输入,则称系统是具有因果性的。实际物理系统都是具有因果性的。简言之,过去可以影响将来,反之则不然。

松弛性:若系统在时刻 t_0 不储存能量,则称系统在时刻 t_0 是松弛的。在 $-\infty$ 时刻松弛的系统称为初始松弛系统,或简称松弛系统。若系统输出 $y[t_0, \infty)$ 唯一地只由 $u[t_0, \infty)$ 所激励时,称系统在时刻 t_0 是松弛的。传递函数是系统的输入-输出描述,是在系统松弛情况下获得的。应用传递函数时,总是隐含系统在 $t=0$ 时松弛。

线性:一松弛系统,当且仅当对于任何输入 u_1 和 u_2 以及任何实数 α_1 和 α_2 均有

$$H(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 H u_1 + \alpha_2 H u_2 \quad (2-1)$$

或
$$H(u_1 + u_2) = H u_1 + H u_2 \quad (2-2)$$

和
$$H(\alpha_1 u_1) = \alpha_1 H u_1 \quad (2-3)$$

时,称其为线性的,否则称该松弛系统为非线性的。式中 H 为某一算子或函数。式 (2-2) 为可加性,式 (2-3) 为齐次性,式 (2-2) 加上式 (2-3) 的效应与式 (2-1) 等价。系统既具有可加性又具有齐次性,也称系统符合叠加原理。

定常性:简言之,若系统特性不随时间而变,则系统称为定常的;否则,为时变的。

下面说明状态、状态变量、状态向量、状态空间等概念。

若系统的输出 $y(t_0)$ 仅取决于 $u(t_0)$,则系统称为静态系统或无记忆系统,仅由电阻构成的网络是一个例子。若系统的输出 $y(t_0)$ 不仅取决于 $u(t_0)$ 也取决于 t_0 前的输入,则系统称为有记忆系统或动态系统。动态系统是大量的、主要的。动态系统与系统这两个术语常不

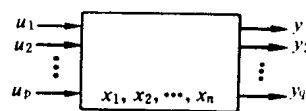


图 2-1 系统

予以区别。

一个系统的状态是一组变量(称为**状态变量**) $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 的集合,这一组 n 个变量在 $t=t_0$ 时的初始值连同系统的 p 个输入 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ 足以唯一地描述 $t \geq t_0$ 时系统的输出 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t)$ 。换言之,系统在时刻 t 的状态由 t_0 时的状态和 $t \geq t_0$ 时的输入唯一地确定。一般,对于物理系统,状态变量常选物理上可观察和可测量的量,但不是必须如此。

一组 n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 视作 n 维向量 $\mathbf{x}(t)$ 的分量,这个向量就称为**状态向量**。

状态空间是一 n 维空间, x_1 轴、 x_2 轴、 $\dots$ 、 x_n 轴是这个空间的轴。一个状态对应于状态空间中的一点(状态点),状态向量就是自状态空间原点至该点的向量,状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 就是状态向量分别在 x_1 轴、 x_2 轴、 $\dots$ 、 x_n 轴上的投影。

状态轨迹是状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 的末端(即状态点)随着时间的推移而在状态空间中描出的轨迹。

用状态、状态变量、状态向量和状态空间来分析研究系统的方法称为**状态空间法**或**状态变量法**。

研究非线性系统的相平面法,已经应用了状态空间的概念。相平面是二维状态空间,相轨迹是相应的状态轨迹。

第二节 线性定常连续系统状态空间表达式

与图 2-2 相对应,线性定常连续系统的状态空间表达式(也称动态方程)为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2-4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2-5)$$

其中,系统矩阵 $\mathbf{A}$ 、控制矩阵 $\mathbf{B}$ 、观测矩阵 $\mathbf{C}$ 和前馈矩阵 $\mathbf{D}$ 分别为 $n \times n$ 、 $n \times p$ 、 $q \times n$ 和 $q \times p$ 实常数矩阵;输入向量 $\mathbf{u}$ 、输出向量 $\mathbf{y}$ 和状态向量 $\mathbf{x}$ 分别为 $p \times 1$ 、 $q \times 1$ 和 $n \times 1$ 向量。式(2-4)为状态方程,式(2-5)为输出方程。

系统的状态空间表达式在概念、记号以及分析等方面带来很大的方便。状态空间表达式也称为状态模型或动态模型。

一、由状态图导出状态空间表达式

状态图是状态模型的图形表示。线性定常连续系统状态模型的状态图由比例器(将信号乘以比例系数 a)、加法器和积分器这三种基本单元构成,如图 2-3 所示。图中左侧为框图,右侧为信号流图。使用上述基本单元,可在模拟计算机上建立起所要研究的控制系统。控制系统不使用微分器,因为它会放大难以避免的噪声。

我们先看如下的以一阶微分方程表示的系统

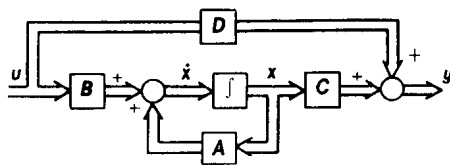


图 2-2 线性定常连续系统框图

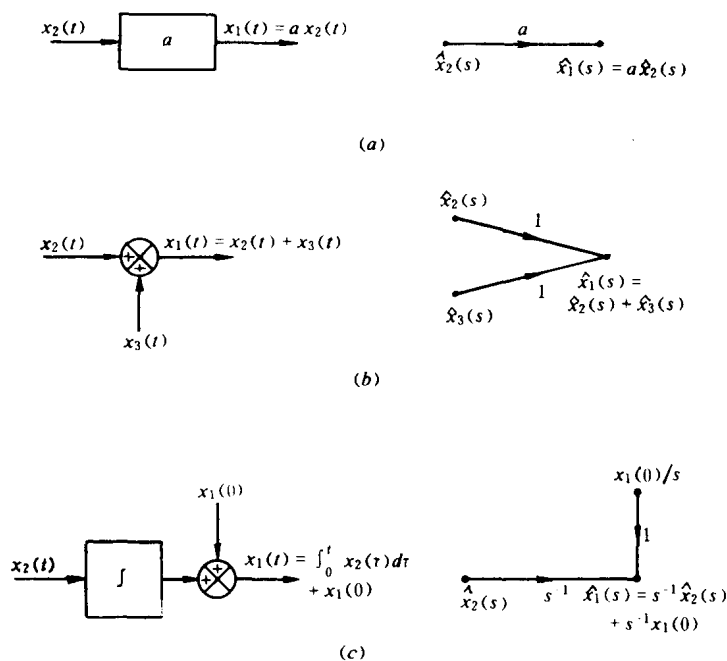


图 2-3 状态图基本单元

(a) 比例器; (b) 加法器; (c) 积分器

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t); \quad x(0) = x^0; \quad y(t) = x(t) \quad (2-6)$$

相应的状态图如图 2-4 所示。

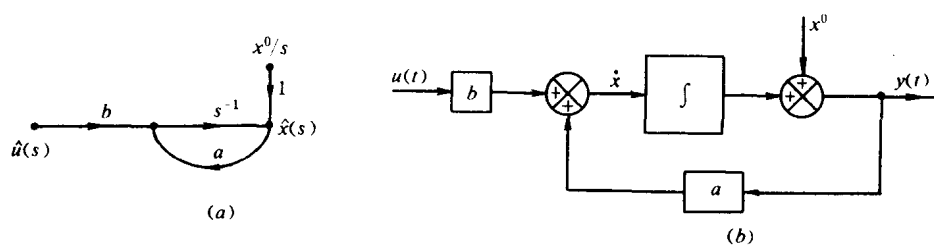


图 2-4 式 (2-6) 的状态图

(a) 信号流图; (b) 框图

再看如下的单输入、单输出和两状态变量系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t); & x_1(0) &= x_1^0 \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t); & x_2(0) &= x_2^0 \\ y(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

相应的状态图如图 2-5 所示。

类似地, 可为多输入、多输出和 n 状态变量系统作出状态图。

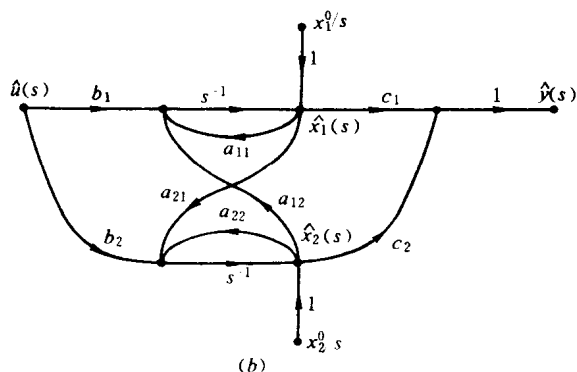
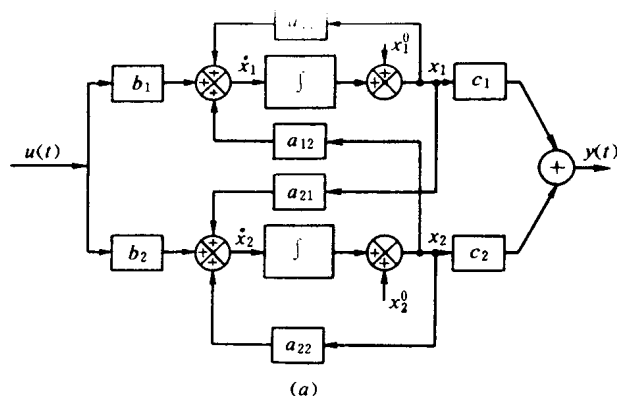


图 2-5 式(2-7)的状态图
(a)框图; (b)信号流程图

作出了状态图,就可以建立状态空间表达式。例如,有了图 2-5,就能写出式(2-4)和式(2-5),这里

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2], \quad D = 0 \quad (2-8)$$

二、由系统的机理导出状态空间表达式

控制系统有:电的、机械的、机电的、液压的、热力的、化学的等等,可以按其工作机理建立状态空间表达式。下面以机械的和电的系统为例来作说明。

例 2-1 考察一质量-弹簧-阻尼器系统,如图 2-6 所示。系统包括两组平台、弹簧和阻尼器。平台的零位置对应于静态平衡位置。试建立状态空间表达式。

解 系统中有 4 个独立的储能元件,系统

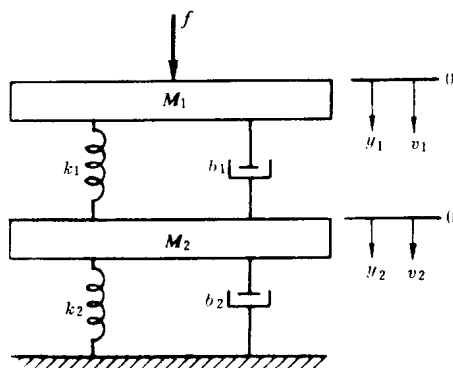


图 2-6 质量-弹簧-阻尼器系统