内 容 简 介

本书是作者在自编《分析力学》讲义的基础上结合多年的教学实践，本着教改的精神，参考国内外分析力学书籍编写而成的.

全书共分七章：虚位移原理；动力学普遍方程和拉格朗日方程；哈密顿正则方程；力学的变分原理；一个自由度系统的振动；两个自由度系统的振动；狭义相对论的拉格朗日方法和哈密顿方法.

本书可作为高等理工院校本科30～60学时分析力学课程教材，也可作研究生教材和工程技术人员参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

分析力学/王振发编.—北京：科学出版社，2002.3
ISBN 7-03-009746-7
(21世纪高等院校教材(工科类))

Ⅰ.分… Ⅱ.王… Ⅲ.分析力学—高等学校—教材 Ⅳ.O316

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第060327号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年3月第一版 开本：720×1000 1/16
2002年3月第一次印刷 印张:13
印数:1—3 500 字数:247 000

定价：18.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

18 世纪以来，工业的迅速发展，提出了大量新的力学问题，主要是一些由互相约束的物体组成的系统的力学问题. 这是牛顿力学所难以解决的. 分析力学就是在解决这些问题的过程中产生并发展起来的.

1788 年拉格朗日(Lagrange)的名著《分析力学》从虚位移原理出发，引进了广义坐标的概念，得出了力学上最重要的动力学方程——拉格朗日方程，从而使力学的发展出现了一个新的转折，奠定了分析力学的基础.

1834 年哈密顿(Hamilton)又丰富了拉格朗日原理，不但沿用广义坐标，而且引入了广义动量的概念，提出了哈密顿原理，建立了另一套形式完整的力学系统方程(哈密顿正则方程)，大大推进了分析力学的发展.

1894 年赫兹(H. R. Hertz)首次将系统按约束类型分为完整系统和非完整系统两大类. 此后，在分析力学的非完整系统这一分支中又取得了许多成果，得出一系列适用于非完整系统的动力学方程，至今仍在继续向前发展.

随着科学技术的日新月异，出现了众多新的学科，它们之中有许多都是以分析力学的基本原理和方法为基础的；这些学科的研究反过来又丰富了分析力学的内容，促进了分析力学朝着更加成熟的方向发展.

分析力学与理论力学一样都属于经典力学的范畴，但有很大的区别.

在研究方法上，理论力学主要是采用几何法，而分析力学主要是采用分析法. 在研究观点上，理论力学侧重于力，而分析力学侧重于能量.

理论力学是以牛顿定律为理论基础的. 而分析力学是以普遍的力学变分原理(微分形式和积分形式)为基础，导出运动微分方程，并研究方程本身以及它们的积分求解方法.

正是因为分析力学是以普遍的力学变分原理为基础建立系统的运动微分方程，所以它具有高度的统一性和普遍性，这就不仅便于解决受约束的非自由质点系问题，而且便于扩展到其他学科领域中去，例如振动理论、回转仪理论、连续介质力学、非线性力学、自动控制、近代物理等都广泛地应用分析力学的基本理论和研究方法.

显然，为了给后续课程和诸多专业打下良好的基础，需加强对分析力学的基本理论和研究方法的讲授. 基于这样一种考虑，作者将一直使用的自编《分析力学》做了适当的增删，重新编排，编排中注意了理论的系统性. 每章又增加了小结，增添了各类习题，并在书末附有全部习题答案. 作为分析力学的应用，

本书还增加了介绍系统微振动和在狭义相对论中分析力学方法的内容，详尽讨论可参阅有关书籍．振动理论及回转仪理论方面的内容，本书中只在例题中做了一些介绍，详细内容在另书中讨论．

上述关于《分析力学》内容的改革经过教学实践证明是有成效的．

本书共分七章．

第一章，虚位移原理；第二章，动力学普遍方程和拉格朗日方程；第三章，哈密顿正则方程；第四章，力学的变分原理；第五章，一个自由度系统的振动；第六章，两个自由度系统的振动；第七章①，狭义相对论的拉格朗日方法和哈密顿方法．

在编写本书过程中作者除本着教改的精神，结合多年的教学实践外，还参考了国内外有关分析力学书籍．限于作者水平，难免有缺点和不妥之处，诚望广大师生和读者指正．

本书承蒙清华大学丁文镜教授和山东科技大学博士生导师、瑞士洛桑高等工业大学客座教授靳奉祥主审，在此致以深深的谢意．

参加本书编写工作的还有山东轻工业学院的杨茂荣、魏高峰、王达、刘军，山东科技大学王崇革等教师．在此一并致深深的谢意．

编　　者

2000 年 8 月

于济南山东轻工业学院

---

① 第七章为选讲内容．

目　　录

第一章　虚位移原理

以前学过的刚体静力学又称为**几何静力学**.用几何静力学方法求解刚体系统的平衡问题,在一般情况下,对每个刚体需列6个平衡方程,方程中的未知力包括主动力和约束反力;若有n个刚体,共需列$6n$个平衡方程;刚体越多,方程越多.另外,一些平衡问题只需求主动力之间的关系,方程中出现的约束反力在求解过程中要消去,等等.这一切显然是十分繁琐的.

现在我们来介绍另一种称为**分析静力学**的方法,应用这种方法能有效地解决上述问题.

在分析静力学中,以虚位移原理为基础,应用任意非自由质点系平衡的必要和充分条件,列平衡方程.就是说,对于一刚体系统,可以建立与系统的自由度数相等的平衡方程.如果系统的刚体数目多,而自由度数目少,则相对而言,平衡方程的数目大大减少.再者,应用分析静力学的方法直接建立了主动力之间的关系,避免了未知约束反力的出现,使得非自由质点系的平衡问题的求解变得简单起来.

将虚位移原理与达朗伯原理结合起来可导出非自由质点系的动力学普遍方程,为求解复杂系统的动力学问题提供另一种普遍的方法.在此方程的基础上,形成和发展了**分析动力学**.在下一章中将对分析动力学中最重要的方程——拉格朗日方程进行讨论.

下面我们从分析力学的基本概念说起.

§1-1　约束及约束方程

在几何静力学中,我们将限制某物体位移的周围物体称为该物体的约束.现在从运动学的角度来看约束的作用,**一非自由质点系的位置或速度受到某些条件的限制,这种限制条件称为该质点系的约束**.例如,圆球被限制在水平面上作纯滚动,这时约束表现为限制圆球中心到水平面的距离保持不变;圆球与水平面接触点的速度在每瞬时都为零.又如,冰刀的运动方向只能沿冰刀的纵向.在一般情况下,约束对质点系运动的限制可以通过质点系各质点的坐标或速度的数学方程式来表达,这种表达式称为**约束方程**.

如图1-1所示质点M被限制在半径为R的球面上运动,质点的位置由直角坐标(x,y,z)表示,则质点M的约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

或

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{1-1}$$

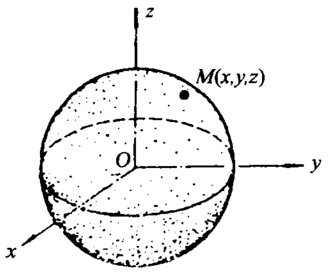

图 1-1

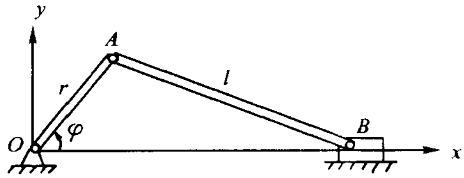

图 1-2

又如图 1-2 所示 Oxy 平面内的曲柄连杆机构，曲柄销 A 被限制在以 O 为中心，r 为半径的圆周上运动；滑块 B 被限制在沿 Ox 轴的水平直槽中运动；A，B 两点间的距离等于 l. 此机构的约束方程可表示为

$$\left.\begin{aligned} & x_A^2 + y_A^2 = r^2 \\ & (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2 \\ & y_B = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

式中 x_A，y_A 和 x_B，y_B 分别为 A，B 两点的坐标.

设质点系各质点对某参考系的位置和速度分别以 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$ 和 $\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n$ 来表示，则约束方程的一般形式为

$$f_j(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n; \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_n; t) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, s)$$

式中 n 为质点系的质点数，s 为约束方程数. 上式可简写成

$$f_j(\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i; t) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

用直角坐标时，可写成

$$f_j(x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i; t) = 0$$

按约束对质点系运动限制的不同情况，可将约束分类如下：

(1) 完整约束和非完整约束

约束方程中不包含坐标对时间的导数，或者说，约束只限制质点系各质点的几何位置，而不限制其速度，这种约束称为**完整约束**或**几何约束**. 其约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, s) \tag{1-3}$$

式(1-1)和式(1-2)表示的均为完整约束.

如果约束方程中包含有坐标对时间的导数,或者说,约束还限制各质点的速度,这种约束称为**非完整约束或运动约束**.其约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n;t)=0 \quad (1\text{-}4)$$

这种约束是用微分方程形式表示的,一般说来,是不可积分的.但也有些例外的情况,例如图 1-3 所示,半径为 r 的车轮沿直线轨道作纯滚动.车轮轮心 A 至轨道的距离始终保持不变,所以其几何约束方程为

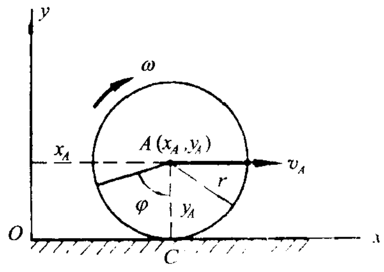

图 1-3

$$y_A = r$$

又,车轮每一瞬时与轨道接触点 C 的速度均为零,车轮受运动约束,其约束方程为

$$v_A - r\omega = 0$$

或写成下面形式

$$\dot{x}_A - r\dot{\varphi} = 0$$

若将上式积分,得

$$x_A - r\varphi = C$$

由此可见,可积分的运动约束方程,通过积分可以转化为完整约束方程.可积分的运动约束与完整约束实质上是等价的.

非完整约束中最简单的是线性非完整约束,它的约束方程中只包含速度的线性项,方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i\dot{x}_i + B_i\dot{y}_i + C_i\dot{z}_i) + D = 0$$

式中 A_i,B_i,C_i,D 都是坐标 x_i,y_i,z_i 及时间 t 的函数.

(2) 双面约束和单面约束

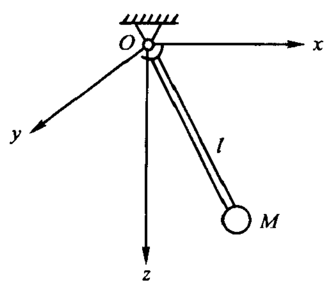

图 1-4

如果约束在两个方向都起限制运动的作用,则称为**双面约束**.如图 1-4 所示单摆,小球 M 用长为 l 的刚性杆铰联于球支座 O 上,小球只能在半径为 l 的球面上运动,其约束方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

如果约束只在一个方向起作用,而在另一方向能松弛或消失,这种约束称为**单面约束**.上例中将刚性杆换成柔索,则小球不仅能在球面上运动,还可以在球面内运动,其约束方程就为

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant l^2$$

(3)定常约束和不定常约束

如果约束方程中不显含时间 t,这种约束称为**定常约束**或**稳定约束**.它的约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n;\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\cdots,\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n)=0$$

前面所举的例子均为定常约束.

如果约束方程中显含时间 t,这种约束称为**不定常约束**或**不稳定约束**.它的约束方程的一般形式为式(1-3)和式(1-4).

在图 1-1 中,若质点 M 被限制在膨胀或收缩着的气球面上运动,设气球的半径为时间 t 的函数,$R=R_0\pm vt$,则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=(R_0\pm vt)^2$$

这种约束是不定常约束.

以下我们主要是讨论完整的、双面的和定常约束的情况.这种约束方程的一般形式为

$$f_j(x_1,y_1,z_1,\cdots,x_n,y_n,z_n)=0 \tag{1-5}$$

前面所列举的式(1-1)和式(1-2)都属于这类约束方程.

§1-2 自由度和广义坐标

设质点系由 n 个质点组成,在直角坐标系中需 $3n$ 个坐标来确定质点系在空间的位置.若是自由质点系,我们说它有 $3n$ 个自由度.若质点系受到 s 个完整约束,其约束方程为式(1-3)或式(1-5),则 $3n$ 个坐标需满足 s 个约束方程,每一个约束方程制约方程中的任一个坐标,因此只有 $3n-s$ 个坐标是独立的,而其余的 s 个坐标均可写成这些独立坐标的给定函数.由此可知,要确定质点系的位置不需要 $3n$ 个坐标,只需确定任意 $N=3n-s$ 个独立坐标就够了.**确定具有完整约束质点系的位置的独立参数的个数称为质点系的自由度数**①.

例如,图 1-5 两刚性杆连接两小球组成的双摆,确定两小球位置的直角坐标为 $x_1,y_1;x_2,y_2$,它们必须满足下面两个约束方程

$$\left.\begin{aligned}&x_1^2+y_1^2=l_1^2\\&(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2\end{aligned}\right\}$$

---

① 此定义仅适用于完整约束的系统.在一般情况下,包括非完整约束时,要用下节虚位移的概念来定义自由度.

可见有两个独立坐标,即质点系有两个自由度.

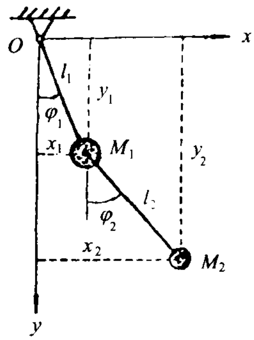

图 1-5

确定一个质点系位置的独立参数的选取一般不是惟一的,如上述双摆,可以选 x_1,y_1,x_2,y_2 中的任意两个作为独立参数,也可以选取角 φ_1 和 φ_2 作为独立参数.绕定轴转动的刚体就是取转角 φ,绕定点转动的刚体取三个欧拉角 ψ,θ 和 φ 作为它们的独立参数.我们**把这些能完全确定质点系位置的独立参数称为质点系的广义坐标**.显然,广义坐标数目等于确定质点系位置的独立参数的数目.**在完整约束的情况下,质点系的广义坐标的数目等于自由度数**.

如果以 $q_1,q_2,\cdots,q_N$ 表示一非自由质点系的广义坐标,则各质点的直角坐标都可以写成这些广义坐标的函数.对于完整、双面和定常约束,可写成如下的函数形式

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1,q_2,\cdots,q_N) \\ y_i &= y_i(q_1,q_2,\cdots,q_N) \\ z_i &= z_i(q_1,q_2,\cdots,q_N) \end{aligned}\right\} \tag{1-6}$$

写成矢量形式为

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_N) \tag{1-7}$$

这就是用广义坐标表示各质点位置的一般表达式,这种方程隐含了约束条件,这是采用广义坐标的方便之处.

§1-3 虚 位 移

讨论了约束的运动学性质后,在此基础上分析约束对质点和质点系的位移的限制,从而引出虚位移的概念.

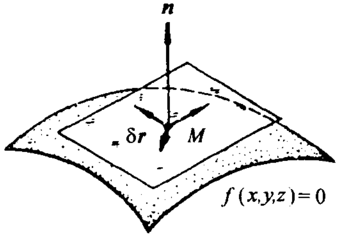

图 1-6

1. 非自由质点的虚位移

设一质点 M 的运动受到固定曲面 $f(x,y,z)=0$ 的双面约束(图 1-6).在某瞬时 t,质点的位置为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,在满足约束的条件下,经过无限小的时间 $\mathrm{d}t$ 后,质点有无限小的位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,这是质点实际发生的位移,称为**实位移**.

某瞬时，在不破坏约束(即为约束所允许)的条件下，质点假想的任何无限小的位移，称为质点在该瞬时所在位置的虚位移，或称可能位移. 它不需要经历任何时间.

虚位移通常用 $\delta \boldsymbol{r}$ 表示，δ 为变分符号，以与实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 区别. 虚位移可以是线位移，如 $\delta \boldsymbol{r}, \delta x, \delta s$；也可以是角位移，如 $\delta \varphi$. 矢量变分 $\delta \boldsymbol{r}$ 的方向由图中示出，在算式中则取其大小；代数量变分 $\delta x, \delta s, \delta \varphi$ 的正向与原代数量一致. 在定常约束的情况下求变分的运算方法与求微分一样，只需将微分符号 d 改为变分符号 δ 即可.

虚位移和实位移是两个不同的概念，虚位移是约束允许的假想位移，不限于一个确定的方向，与时间无关；而实位移是在 $\mathrm{d}t$ 时间内确实发生的位移，在定常约束的情况下，此实位移就是所有可能的虚位移中的一种.

下面我们来分析虚位移是如何反映了约束的几何性质.

设图 1-6 中质点 M 有一虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$，其坐标由 (x, y, z) 变为 $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$，其中 $\delta x, \delta y, \delta z$ 是 $\delta \boldsymbol{r}$ 在直角坐标轴上的投影，称为**坐标的变分**. 由于虚位移是约束所允许的无限小位移，所以有了虚位移后，质点的坐标仍应满足约束方程，即有

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)=0$$

将上式按泰勒级数展开，因虚位移是无限小量，故舍去高于一阶的高阶微量后，得

$$\begin{aligned} & f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) \\ = & f(x, y, z)+\frac{\partial f}{\partial x} \delta x+\frac{\partial f}{\partial y} \delta y+\frac{\partial f}{\partial z} \delta z=0 \end{aligned}$$

由 $f(x, y, z)=0$，可知

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x+\frac{\partial f}{\partial y} \delta y+\frac{\partial f}{\partial z} \delta z=0 \tag{1-8}$$

用 $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 $f(x, y, z)=0$ 在 (x, y, z) 点处的单位法向矢量，因 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦与对应的 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ 成正比，所以 $\boldsymbol{n}$ 可写成

$$\boldsymbol{n}=C\left(\frac{\partial f}{\partial x} \boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y} \boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z} \boldsymbol{k}\right)$$

式中 C 为比例常数. 又，虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 的解析表达式为

$$\delta \boldsymbol{r}=\delta x \boldsymbol{i}+\delta y \boldsymbol{j}+\delta z \boldsymbol{k}$$

则由式(1-8)可得

$$\boldsymbol{n} \cdot \delta \boldsymbol{r}=C\left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x+\frac{\partial f}{\partial y} \delta y+\frac{\partial f}{\partial z} \delta z\right)=0 \tag{1-9}$$

该式的几何意义是：非自由质点 M 的虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 垂直于曲面上该点处的法线，也就是说，虚位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 必在通过该点的曲面的切平面上. 在此切平面内自 M 点作出的任意无限小位移都是质点在此瞬时的虚位移. 由此例可形象地看出，在定常约束的情况下，质点的实位移确是包含在虚位移中，因此虚位移有时也称为可能位移.

而对于不定常约束，结论就不是这样的. 例如图 1-7 所示的单摆，其摆长随时间按函数 $l(t)$ 变化，在某瞬时质点 M 的实位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. 而虚位移由于不需要经历任何时间，在给定某瞬时，可视约束是“凝固不动”的，这时约束所允许的任何无限小位移都是虚位移. 我们假设图示瞬时摆长 $l(t)$ 不变，质点只能沿以 O 点为圆心的圆弧运动，质点沿圆弧切线的任一指向的无限小位移 $\delta \boldsymbol{r}$ 皆为虚位移. 显而易见，对于不定常约束，实位移并不包含在虚位移中，不能把虚位移理解为可能发生的位移，这就是我们常采用虚位移而不用可能位移这一名称的原因.

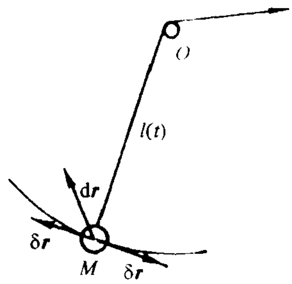

图 1-7

2. 非自由质点系的虚位移

质点系各质点之间，质点系与外部之间都有约束联系着. 所谓**非自由质点系的虚位移是指在不破坏约束的情况下，质点系中各质点所具有的、几何相容的任意的一组虚位移**. 为了不破坏约束条件，质点系各质点的虚位移之间必须满足一定的关系.

下面介绍分析质点系虚位移的两种方法.

(1) 几何法

前面说过，实位移是所有可能的虚位移中的一种；对非自由质点系来说，实位移就是虚位移中的一组，所以我们可以用求实位移的方法来求各质点虚位移之间的关系. 由运动学知，质点的实位移与其速度成正比，$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$，因此可用求质点间速度关系的方法来求各质点实位移之间的关系. 例如速度合成法、瞬心法、速度投影法等. 总之，只要将它们的有关速度替换成虚位移即可得出虚位移之间的关系.

以图 1-8 所示结构为例，求点 C，A 和 B 的虚位移.

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{a}{l}$$

将速度 v_C，v_A 分别换成虚位移 δr_C，δr_A，得

$$\frac{\delta r_C}{\delta r_A} = \frac{a}{l}$$

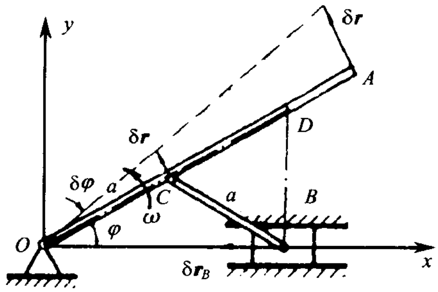

图 1-8

又,杆 BC 作平面运动,其速度瞬心为点 D,则

$$\frac{v_C}{v_B}=\frac{DC}{DB}=\frac{a}{2a\cdot\sin\varphi}=\frac{1}{2\sin\varphi}$$

于是得

$$\frac{\delta r_C}{\delta r_B}=\frac{1}{2\sin\varphi}$$

我们还可以这样来求点 C,A 和 B 的虚位移:

图 1-8 所示机构是一个自由度系统,它只有一个广义坐标.取角 φ 为广义坐标,给杆 OA 一虚位移 $\delta\varphi$,则由图可见三点虚位移可写为

$$\delta r_C=a\delta\varphi,\quad \delta r_A=l\delta\varphi,\quad \delta r_B=2a\sin\varphi\delta\varphi$$

若将上面形式的虚位移分别向 x 轴、y 轴投影,则可得以坐标变分形式表示的虚位移

$$\delta x_C=-a\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\qquad \delta y_C=a\cos\varphi\cdot\delta\varphi$$
$$\delta x_A=-l\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\qquad \delta y_A=l\cos\varphi\cdot\delta\varphi$$
$$\delta x_B=-2a\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\qquad \delta y_B=0$$

(2) 解析法

将点 C,A 和 B 的坐标表示为广义坐标 φ 的函数

$$x_C=a\cos\varphi,\qquad y_C=a\sin\varphi$$
$$x_A=l\cos\varphi,\qquad y_A=l\sin\varphi$$
$$x_B=2a\cos\varphi,\qquad y_B=0$$

将上面各式对 φ 求变分,便得

$$\delta x_C=-a\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\qquad \delta y_C=a\cos\varphi\cdot\delta\varphi$$
$$\delta x_A=-l\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\qquad \delta y_A=l\cos\varphi\cdot\delta\varphi$$
$$\delta x_B=-2a\sin\varphi\cdot\delta\varphi,\qquad \delta y_B=0$$

推而广之,讨论一般情况.设 n 个质点组成的质点系,受有 s 个约束,有 $N=3n-s$ 个自由度.令 N 个广义坐标为 $q_1,q_2,\cdots,q_N$.根据式(1-6)将各质点的直角坐标表示为广义坐标的函数,质点系的任意虚位移均可用广义坐标的 N 个独立变分 $\delta q_1,\delta q_2,\cdots,\delta q_N$ 来表示,即

$$\left.\begin{aligned}\delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_N}\delta q_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_N}\delta q_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_N}\delta q_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k\end{aligned}\right\} \tag{1-10}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n)$$

写成矢量形式

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_N}\delta q_N = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-11}$$

式(1-10)和式(1-11)表明质点系中任一质点的虚位移是广义坐标独立变分的线性组合,δq_k 称为**广义虚位移**.

通过本节学习,我们对一般情况(包括非完整系统),可以用虚位移的概念来定义自由度:**质点系中质点坐标的独立变分个数,或说独立的虚位移个数,称为质点系的自由度数**.

注意,独立坐标和坐标的独立变分是两个不同的概念,因此,分别用它们定义的自由度也不同.对于完整系,独立坐标数与坐标的独立变分数是相等的,而在非完整系中二者是不相等的.

§1-4 虚位移原理

1. 虚功

质点或质点系所受的力在虚位移上所作的功称为**虚功**.力在虚位移上作功的计算与作用力在实位移上所作元功的计算是一样的.虚功表示为

$$\delta W = \boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

虚位移是假想的,自然虚功也是假想的.

前面研究了约束的运动学性质,现在我们通过约束反力在虚位移的虚功来表示约束的动力学性质.

2. 理想约束

在很多情况下,约束反力与约束所允许的虚位移互相垂直,约束反力的虚

功等于零;一些系统内部相互作用的约束反力所作的虚功的和也等于零等,这些约束统称为**理想约束**,其表达式为

$$\sum \boldsymbol{F}_{N_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-12}$$

以前分析过的光滑固定面、光滑铰链、刚性铰链杆、不可伸长的绳索以及纯滚动等的理想约束是对约束反力在实位移上不作功或作功的和等于零而言的;这些理想约束的约束反力在虚位移上同样不作虚功或虚功之和等于零.

理想约束是抽象模型,它表示了许多实际约束的动力学性质.

3. 虚位移原理

应用几何静力学平衡条件求解机构的平衡问题时,需对每一个或几个或全部构件写出平衡方程,这样不仅方程数目多,而且在方程中包括诸多约束反力,如何直接从整个系统上来建立平衡时主动力之间的关系? 或直接求出主动力? 需依据虚位移原理才可解决这个问题.

我们已阐明了约束的运动学和动力学性质,阐明了虚位移的概念和分析方法,现在可以来建立虚位移原理,叙述如下:

对于具有理想约束的质点系,在给定位置平衡的必要和充分条件是,主动力系在质点系的任意虚位移中所作虚功之和等于零.虚位移原理又称**虚功原理**,其矢量表达式为

$$\sum \delta W = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{1-13}$$

其中 $\boldsymbol{F}_i$ 表示作用在第 i 个质点上的主动力的合力,$\delta \boldsymbol{r}_i$ 表示力 $\boldsymbol{F}_i$ 作用点的虚位移.其解析表达式为

$$\sum \delta W = \sum (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \tag{1-14}$$

其中 X_i, Y_i, Z_i 为力 $\boldsymbol{F}_i$ 在直角坐标轴上的投影,$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 为虚位移 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 在直角坐标轴上的投影.

式(1-13)和式(1-14)称为**虚功方程**,又称为**静力学普遍方程**.

下面来证明虚位移原理.

(1) 必要性　若质点系处于平衡,则式(1-13)必定成立.

质点系处于平衡,其任一质点当然是处于平衡的,则作用在该质点上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束反力 $\boldsymbol{F}_{N_i}$ 的合力必等于零,即

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{N_i} = 0$$

给该质点任一虚位移,则有

$$(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{N_i}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

对 i 求和

$$\sum(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{N_i}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i + \sum \boldsymbol{F}_{N_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

因为原理的前提是质点系受理想约束,则由式(1-12)知上式中的 $\sum \boldsymbol{F}_{N_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$,故得

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

即式(1-13)成立.

(2) 充分性　若式(1-13)成立,则质点系必处于平衡,即不能由静止进入运动.

用反证法.若式(1-13)成立,而质点系不平衡,那么质点系中某些质点是由静止进入运动的.取其中的一个质点来分析,因其不平衡,所以作用于其上的主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 与约束反力 $\boldsymbol{F}_{N_i}$ 的合力

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{N_i} \neq 0$$

质点在合力的作用下就产生一实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$,方向与合力相同.由于我们研究的是质点系受定常约束,实位移是虚位移的一个,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ 可用 $\delta \boldsymbol{r}_i$ 取代,于是有

$$(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{N_i}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i = (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{N_i}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

质点系中使质点运动的作用力的虚功均为正功,而使质点保持静止状态的作用力的虚功皆为零,因而全部虚功相加仍为不等式,即

$$\sum(\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{N_i}) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

由于系统受理想约束, $\sum \boldsymbol{F}_{N_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$, 故得

$$\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i > 0$$

显然,此结论与式(1-13)相矛盾.这就证明了虚位移原理的充分性.

应该指出,虚位移原理是在系统的约束是理想的情况下得出的.当需要考虑摩擦时,只要把摩擦力视为主动力,原理仍然适用.同样,欲求约束反力,可将约束反力作为主动力运用虚位移原理.

§1-5　虚位移原理的应用举例

例 1-1　曲柄连杆机构如图 1-9 所示.设一水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用于滑块上,在曲柄 OA 上作用一矩为 M 的力偶,求曲柄连杆机构在图示位置平衡时,力 $\boldsymbol{F}$ 与力偶矩 M 的关系(不计摩擦).

解　以整个机构为研究对象.不计摩擦,说明机构受理想约束,因此只需考虑主动力 $\boldsymbol{F}$ 和力偶 M.

给机构以虚位移.当给曲柄一虚位移 $\delta\varphi$ 时,A,B 两点的虚位移分别为

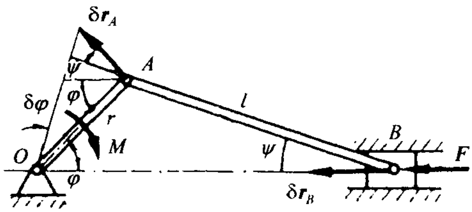

图 1-9

$\delta \boldsymbol{r}_A$ 和 $\delta \boldsymbol{r}_B$.

将主动力和相应的虚位移代入虚功方程得

$$-M\delta\varphi + F\delta r_B = 0$$

即

$$\frac{M}{F} = \frac{\delta r_B}{\delta\varphi} \tag{a}$$

为求 F 和 M 的关系,需求 $\delta\varphi$ 与 δr_B 之间的关系.用几何法,由曲柄 OA 作定轴转动,有

$$\delta r_A = r\delta\varphi \tag{b}$$

连杆 AB 作平面运动,其上 A,B 两点的虚位移在 AB 上的投影相等,即

$$\delta r_A \cos(90° - \varphi - \psi) = \delta r_B \cos\psi \tag{c}$$

将式(b)代入式(c)得

$$r\delta\varphi\sin(\varphi + \psi) = \delta r_B \cos\psi$$

即

$$\frac{\delta r_B}{\delta\varphi} = \frac{r\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi} \tag{d}$$

将式(d)代入式(a),得 F 与 M 之间的关系为

$$\frac{M}{F} = \frac{r\sin(\varphi + \psi)}{\cos\psi}$$

从此例可以看出,应用虚位移原理求解刚体系统平衡问题时,不必将系统拆开,不需要考虑约束力,而结果直接给出了平衡时主动力之间的关系.这是用虚位移原理求解非自由质点系平衡问题的优点.

例 1-2 试求保持滑块机构在 $\theta = 60°$ 平衡时所需的水平力 F.已知 $AB = BC = BD = 0.5$ m,力偶矩 $M = 6$ N·m.滑块和杆的重量不计,摩擦不计.

解 取角 θ 为广义坐标.给杆 AB 以虚位移 $\delta\theta$,则相应的杆 CD 的虚位移为 $\delta\varphi$,相应的点 D 的虚位移为 $\delta r_D = CD \cdot \delta\varphi = (0.5 + 0.5)\delta\varphi = 1 \cdot \delta\varphi$.虚功方程为