嘉當的外形式法

С. П. 菲尼可夫

科學出版社

在微分幾何學中的

嘉當的外形式法

全微分及偏微分方程
系統的共存論

С. П. 菲尼可夫著
蘇 步 青 譯

科 學 出 版 社
1 9 5 6

嘉當的外形式法

原著者　[蘇] 菲尼可夫
翻譯者　蘇步青
出版者　科學出版社
北京朝陽門大街117號
北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者　上海中科藝文聯合印刷廠
總經售　新華書店

1956年11月第一版　書號：0586　字數：383,000
1956年11月第一次印刷　開本：850×1168 1/32
(京)0001—5790　印張：14 9/16　插頁：3

定價：(11) 3.50元

С. П. ФИНИКОВ

МЕТОД ВНЕШНИХ ФОРМ КАРТАНА

ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ

1948

內容提要

外形式與活動標形法是現代微分幾何學中最重要、最豐富多采的理論之一,它的創始者是嘉當。在蘇聯,以外微分形式法爲基礎的微分幾何學的研究工作取得了重大的成就。菲尼可夫教授本人及他所領導下的學者都作出了許多卓越的成就。本書是菲尼可夫教授的著作,作者除參閱嘉當等人的工作外,還結合他多年領導這一方面的經驗與成就,理論上敍述得詳細周密,有很多例題,而且包含了很多的幾何學上極有興趣的課題,使得這一深刻的理論與方法成爲較易理解與應用。全書有十四章,其中第一章敍述一般的偏微分方程組的存在定理。第二章到第十三章敍述外形式理論、發甫方程組與外微分方程組的積分流形存在性的研究,特徵系統、奇積分流形的研究等等。最後一章論活動標形法與連續變換羣的幾何學。本書的主要對象是幾何學方面的研究工作者,高等學校教師、研究生。在有適當指導下,幾何專門化的高年級學生也有可能研讀部份材料。此外,對於從事偏微分方程理論或其他方面的數學工作者,本書也有相當參考價值。

序　　言

外形式和活動標形法乃是現代微分幾何學的最鮮明的、前途多望的理論之一．在古典的曲面論和n維的彎曲空間幾何學裏，都可以一樣便利地應用這方法；它特别適用於帶有其他基本羣的克萊因幾何學，而且在存在的證明裏是絕不可缺少的．

現時，如果不要把嘉當本人的著作計算在內，以他的ω算法的應用爲基礎的工作不下於半數是在莫斯科完成的．Д. И. 彼勒飄爾金(Перепёлкин)，С. В. 巴哈瓦羅夫(Бахвалов)的博士論文和С. Д. 洛新斯基(Россинский)的一部分是用嘉當的方法寫成的．С. С. 比油什格恩斯(Бюшгенс)在其關於穩定流的幾何學的最近巨大研究裏利用這方法．Г. Ф. 拉勃切夫(Лаптев)使用它到自己的關於射影及仿射聯絡空間幾何學的研究．К. Н. 吉和茨基(Тихотский)，В. М. 勃洛科費葉夫(Прокофьев)，Н. А. 阿力克錫葉夫(Алексеев)，Т. Л. 柯濟明娜(Козьмина)的學位論文和其他一些著者(П. Н. 格拉果略娃(Глаголева)，Т. А. 休里曼(Шульман)，Г. М. 班-夕利可維奇(Бам-Зеликович)，А. М. 瓦西列也夫(Васильев)，М. А. 阿基維斯(Акивис)等等)的著作都是外形式法在微分幾何學的各色各樣的問題上的應用．所有這些工作已經在莫斯科大學古典微分幾何學課堂討論裏報告過．

在嘉當方法的應用裏需要熟練性，但它不能在已有的够多的文獻中獲得．只有用這點才可以說明在它的推廣上是比較緩慢的情況．本書就是以表達應用嘉當方法所積累的經驗爲其目的．

正如任何的巨大思想一樣，外形式法的根源進入在代數裏，也進入在分析裏，而且或許特别是在連續變換羣論裏．在代數學的問題裏我曾經求助於托麻斯的著作，在證明解析定理時，凱拉的敍述對我很有幫助．在最後一章所稍微涉及的羣的問題及在其餘的第二到第

十一章的各處我廣泛利用嘉當本人的敍述. 但是我應首先歸功於在講課和課堂討論與聽衆的不斷的聯系,這也正是本書產生的由來.

現在我特別要回憶起從 B. B. 斯提巴諾夫(Степанов)所獲得的那些寶貴的指示,特別是關於積分定理的證明,是從他那裏得到的,他通閱了本書的原稿. Г. Ф. 拉勃切夫給我以很多有益的提示. 最後,必須指出 Т. Л. 柯濟明娜的非常精細的出版校閱工作,她幫我校正了原稿中的許多不明白的地方. 我認爲有義務對他們表示由衷的感謝.

關於本書的閱讀,我還想說幾句話. 它作出微分幾何學的解析的前提——微分方程的共存性理論,並且分爲不相等的二部分. 第一部分是由一個第一章所構成的且敍述偏微分方程的共存性理論,就是黎基葉的正法系統理論及托麻斯的拓廣. 其餘的十三章組成了第二部分,它是關於對合中的系統的嘉當流的理論. 二部分完全獨立並且可以互不相關地進行閱讀. 它們的相互關係在第十二章 § 4 有其說明.

在第二及第四章敍述嘉當流記號的代數學的方面. 爲使在第四章有可能敍述特徵系統理論起見,這兩章被第三章所分開,它的內容是關於完全可積分的系統理論. 在第六到第七章敍述解析的理論. 第六章包含關於對合中的發甫系統的嘉當的基本存在定理. 第七章是把它拓廣到任意的外微分方程系統去的. 此後一切的敍述具有這樣的結構,使得僅有興趣於發甫系統的讀者可不必念第七章.

第八和第九章作出發甫系統研究的基本機構(到對合的導引). 第五和第十章都是孤立的並且閱讀時可以略去. 第十一章重新回到並且補充第四章的特徵系統理論. 此地應當指出在幾何學上的兩個應用: 發甫系統的變數的化約 (§ 5) 和解比安基課題的班-夕利可維奇方法(§ 8).

第十二和第十三章是關於特殊元素的分類和特殊的積分流形的問題.

最後,第十四章包含活動標形法的羣的前提以及其對規範標形

選擇的應用．可在第二和第三章之後直接閱讀．

如果讀者希望更快地掌握嘉當方法的基礎(在對合中的系統論)，可推薦詳細研究第二及第三章(第二章 § 11 和第三章 §1、§2 對初讀者儘可從略)．其次應當熟悉積分元素鏈的構造和它的標數，同樣要熟悉基本定理的表述(第六章)並且念完第八及第九章 (§ 5、§ 6 的證明初讀時可以略去)而仔細做好所導入的例題．

C. П. 菲尼可夫

目　　錄

第　一　章

偏微分方程系統的積分存在定理

§1. 柯西-柯娃列夫斯卡雅的定理

定理. 設方程系統(S)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = f_1\left(x_i, z_j; \frac{\partial z_j}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z_j}{\partial x_n}\right), \\
&\frac{\partial z_2}{\partial x_1} = f_2\left(x_i, z_j; \frac{\partial z_j}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z_j}{\partial x_n}\right), \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad j = 1, 2, \cdots, s, \\
&\frac{\partial z_s}{\partial x_1} = f_s\left(x_i, z_j; \frac{\partial z_j}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial z_j}{\partial x_n}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

的右側在點

$$x_i = x_i^0, \quad z_j = z_j^0, \quad \frac{\partial z_j}{\partial x_i} = p_{ij}^0$$

的區域裏是全純的，而

$$\varphi_1(x_2, x_3, \cdots, x_n),\ \varphi_2(x_2, x_3, \cdots, x_n),\ \cdots,\ \varphi_s(x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

是 s 個任意函數，它們在點

$$x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0,\ \cdots,\ x_n = x_n^0$$

的區域裏是全純的並且在這點和它們的導數一起取值

$$\varphi_j = z_j^0,\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} = p_{ij}^0,$$

那麽系統(S)只有一組積分，它在點(x_i^0)的區域是全純的並且對 $x_1 = x_1^0$ 取值

$$z_j = \varphi_j(x_2, x_3, \cdots, x_n), \qquad j = 1, 2, \cdots, s. \tag{2}$$

首先指出，系統 (S) 的積分不但要滿足系統 (S) 本身的方程，而且也須適合於方程(1)關於獨立變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任意回數的陸續導微所得到的所有方程．稱所有的這些方程(方程(1)本身及其所有的微分結果)的集合為延拓的系統；將以記號(S')來記它．關於初始條件(2)也可作這個注意：凡滿足初始條件(2)的系統 (S) 的積分也滿足那一些方程，就是從方程(2)經任意回數關於變數 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的陸續導微之後所獲得的方程．

現在把 z_j 的所有導數按其關於變數 x_1 的導微回數分成類，把函數 z_j 本身及其關於變數 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的所有導數歸到零類的導數，把零類導數關於 x_1 導微一回時所得到的所有那些導數歸到第一類導數，把 $m-1$ 類導數關於 x_1 導微一回時所得到的所有那些導數歸到 m 類導數．

如果注意到這個分類，那麼就不難指出，零類導數在點 (x_i^0) 的值是可以從方程(2)及其所有微分結果經過數值 $x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0, \cdots, x_n = x_n^0$ 的代入之後得出來的．系統(S)的方程及從它們按變數 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的導微所得到的延拓系統的那一些方程，在其左側應包含第一類的所有導數，而且在其右側僅包含零類導數．把值 $x_i = x_i^0$ 以及已經求到的零類導數值代進這裏，便可計算第一類導數在點(x_i^0)的初值．把所有這些方程關於 x_1 導微一回，便在左側獲得第二類導數的全部，而在右側得到已知的第一類及零類導數，因而就可能算出第二類導數的初值等等．這樣一來，我們可以算出任意類導數；同時，每一導數僅能求得一次；所以我們不可能遭遇到什麼矛盾．

這樣一來，如果在點(x_i^0)的區域是全純的積分系統存在，那麼我們可按戴樂的公式把它們展開做差 $x_i - x_i^0$ 的冪級數．用附加的條件唯一地確定了在點(x_i^0)的區域是全純的積分．

他方面，如果這些級數收斂，且從而確定了某些函數 z_j，那麼容易證明，它們滿足系統(1)的所有方程．為此只需要證明，把所作的展開代進方程(1)之後，在每一方程的左右兩側應得到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的同一函數，或者更好地說，在展開左右兩側為差 $x_i - x_i^0$ 的冪級數的

時候，關於同冪

$$(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \cdots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$$

的對應的係數相等.

因爲戴樂級數中的每一係數等於對應的導數

$$\frac{1}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} f_k}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

在點(x_i^0)的值，所以我們就不得不從方程的兩側算出這些導數；而且證明它們對 $x_i = x_i^0$ 的值是一致的；然而從方程(1)的兩側的導微應獲得延拓系統 (S') 的方程，而值 $x_i = x_i^0$ 的代進將導引到我們原來計算我們的展開的係數時所用的同一代數系統. 因而，這些方程永恆成立，於是在函數 z_j 的代進之後，方程(1)也成立.

這樣一來，積分存在定理的證明歸結到所獲得的展開的收斂性的證明. 爲這個目的，可以應用强函數(優越函數)方法. 從引理着手.

引理. 設函數

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}^{0,1,\cdots,\infty} a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

是由冪級數定義的，這冪級數對 $x_i = \rho_i > 0$ 是絕對收斂的並且 M 是大於這級數的任何一項絕對值的正數(例如，級數各項的上限)，那麼函數

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x_1}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{\rho_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x_n}{\rho_n}\right)}$$

和

$$F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{M}{1 - \left(\frac{x_1}{\rho_1} + \frac{x_2}{\rho_2} + \cdots + \frac{x_n}{\rho_n}\right)}$$

乃是它的强函數.

按定義，如果在函數 F 的冪級數展開裏所有的係數都是正數且

大於函數 f 的冪級數展開的係數的絕對值，那麼函數 F 關於函數 f 是強的.

因爲

$$\frac{1}{1-\frac{x_i}{\rho_i}}=1+\frac{x_i}{\rho_i}+\left(\frac{x_i}{\rho_i}\right)^2+\cdots,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

所以函數 F 的展開的一般項具有方式:

$$M\left(\frac{x_1}{\rho_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{x_2}{\rho_2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{x_n}{\rho_n}\right)^{\alpha_n}.$$

它的係數是正數，而且因爲按條件 M 是大於函數 f 的展開的任何項在點 $x_i=\rho_i$ 的絕對值，所以

$$|a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}|\,\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\cdots\rho_n^{\alpha_n}<M$$

且

$$\left|a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\right|<\frac{M}{\rho_1^{\alpha_1}\rho_2^{\alpha_2}\cdots\rho_n^{\alpha_n}}.$$

其實，右側就是函數 F 的展開的係數，因而關於函數 F 已證明了引理. 因爲函數 F_1 的展開的一般項

$$M\left(\frac{x_1}{\rho_1}+\frac{x_2}{\rho_2}+\cdots+\frac{x_n}{\rho_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$$

關於 $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ 的係數不小於函數 F 的展開的對應的係數，所以關於函數 F_1 也證明了引理.

還須指出，當函數 f 的展開沒有常數項時，可以採用差 $F-M$ 或 F_1-M 作爲强函數.

現在回到基本定理的證明，我們指出：由解延拓系統 (S') 的方程所獲得的系統的積分的展開中的係數的公式，是從函數 f_j 和 φ_j 按其變數的冪級數展開的係數僅用加法和乘法的運算構成的. 如果用强函數 F_j 和 Φ_j 代換這些函數，便在新系統的積分 Z_j 的展開裏獲得關於 z_j 的展開的强展開. 如果能證明强(優越)系統的積分 Z_j 的展開是收斂的，那麼同樣就得證明積分 z_j 的展開的收斂性.

首先我們化簡初始條件. 若作代換

$$\bar{x}_i = x_i - x_i^0,\ \bar{z}_j = z_j - \varphi_j(x_2, x_3, \cdots, x_n) + a_j(x_1 - x_1^0)$$

並且再除去新變數的頂上一横，則得到與系統(1)具有同一方式的系統，但是有初值

$$對\ x_1 = 0,\ z_1 = z_2 = \cdots = z_s = 0,$$

並且同時我們可以利用任意的係數 a_j，使處在系統 (S) 的方程右側中的函數按變數的冪級數展開時，它的常數項變成零.

對右側 f_j 造出强函數，便得出方程系統

$$\frac{\partial Z_j}{\partial x_1} = \frac{M}{\left(1 - \frac{\alpha x_1 + x_2 + \cdots + x_n + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_s}{r}\right)\left(1 - \frac{\frac{\partial Z_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial Z_s}{\partial x_n}}{\rho}\right)} - M$$

$$j = 1, 2, \cdots, s, \tag{1*}$$

式中 α 是大於 1 的正數，且 M, r, ρ 是確定的正數(M 表示在函數 f_j 按其變數的冪級數的展開中，關於 $x_i = Z_j = r$ 及 $\frac{\partial Z_j}{\partial x_i} = \rho$ 的各項的絕對值的上限). 我們從右邊減了 M，是因爲現在在函數 f_j 的展開中沒有常數項的緣故. 係數 $\alpha > 1$ 的導入並不損害强函數，因爲它僅增大了展開的係數之故.

我們將求系統(1*)的解，而假定所有的未知函數都相等：

$$Z_1 = Z_2 = \cdots = Z_s = Z,$$

且作爲單變數

$$X = \alpha x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

的函數來找尋這些解. 因爲按混合函數的導微規律 $\frac{\partial Z}{\partial x_1} = \frac{dZ}{dX} \cdot \frac{\partial X}{\partial x_1} = \alpha \frac{dZ}{dX}$，所以系統(1*)的所有方程現在變成同一方程

$$\alpha \frac{dZ}{dX} = \frac{M}{\left(1 - \frac{X + sZ}{r}\right)\left(1 - \frac{s(n-1)}{\rho} \cdot \frac{dZ}{dX}\right)} - M,$$

即