经济应用数学

（一）

微积分

中央电大经济数学编写组编

中央广播电视大学出版社

经济应用数学

(一)

微积分

中央电大经济数学编写组　编

中央广播电视大学出版社

经济应用数学
(一)
微 积 分
中央电大经济数学编写组 编

中央广播电视大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
上海新华印刷厂印装

开本 787×1092 1/32 印张 16.5 千字 346
1986年2月第1版 1987年5月第2次印刷
印数 230,001—360,000
书号：13300·32 定价：2.35 元

前　言

本书是电大经济管理系各专业的公共必修基础理论课，也可供具有一般中学数学水平的经济管理人员学习参考。

本书主要介绍一元函数的微积分学。还介绍了级数、多元函数和微分方程的一些基本知识。编写这本教材，我们力求做到：(1)尽可能地联系经济方面的实际问题；(2)为了适合于远距离电视广播课的特点，编写得力求便于自学；因此例题和习题、应注意及说明的内容比一般同类教材增多了。由于作者水平有限，缺乏经验，编写时间又仓促，所以本书各方面都可能存在一些问题，欢迎广大读者批评指正。

本书在编写过程中得到许多省电大指导和帮助，特别是天津市电大、江苏省电大、河北省电大对此书的编写提出了许多宝贵的意见，谨在此表示感谢。

本书承蒙清华大学孙念增教授、中国人民大学胡富昌副教授认真审阅，对此书提出了宝贵的指导意见。谨在此表示衷心地感谢！

在中央电大郭星英老师的主持下，参加本书编写工作的有广东省电大的谭英仕同志（第一、二两章）、中央电大的郭星英同志（第三章和附录）、辽宁省广播电大的尹明厚同志（第四、七两章）、甘肃省电大的马芳城同志（第五、六两章）、中央电大的李毓芝同志（第八、九两章）。

编　者

1987 年 3 月

目　　录

第一章　函　数

函数是微积分中最重要的基本概念之一，也是微积分研究的对象，在这一章里，我们将从分析日常和经济现象中的变量出发，给出函数的一般的定义，通过例题介绍如何利用代数和几何知识建立经济学中常见的函数，结合图形讲一些简单的函数性质，并复习一下中学里已学习过的基本初等函数，分析初等函数的结构，为学习以后各章内容打下基础。

§1.1　常量与变量

出现在数学问题中的量，尽管多种多样，但大体可分为两类：一类是它的值在问题的讨论中是相对地始终保持不变的；另一类是它的值是可以变动的。我们称前者为常量，后者为变量。例如，在讨论某种产品的总成本时，我们把总成本分成两部分：一部分是固定成本，它是由折旧费，车间经费及企业管理费等构成，这些费用不随产品产量的增减而变化，因此它是一个常量；另一部分是变动成本，它是由主要原材料费，直接参加生产的工人工资等构成，这些费用是随着产品产量的增减而增减的，因此它是一个变量。

我们必须注意到上述常量与变量的概念，要依赖于所讨论的问题所在的场合，同一个量在某种情况下可以认为是常量，而在别的情况下，就可能是变量。例如，商品的价格在短

期内可以看成是常量，在一个较长时间内就是一个变量。

在数学中讨论的量，无论是常量还是变量，都不管它们的实际意义，而只注意它们的数值，并用字母 a、b，…，或 x、y、…等来表示。

量 x 的每一个值都是一个数，因而可以用数轴上的一个点来代表它。如果量 x 是常量，则用数轴上的一个定点来表示；如果量 x 是变量，则用数轴上的动点来表示。

§1.2 函数概念

现实世界中各种不同的变化着的量不是孤立的，而是相互联系相互制约的。因此我们不但要研究事物的量的变化，而且更重要的要研究不同的量的变化之间的相互依赖关系。这种依赖关系中一种简单而又非常重要的情况，就是数学中的所谓函数关系。先考察几个例子。

例1 大家知道，圆面积 S 与它的半径 r 之间的关系由公式

$$S=\pi r^2$$

给定。当半径 r 取定某一正的数值时，圆的面积 S 也就跟着有一个确定的数值。

例2 设某水泥厂每日最多能生产水泥100吨，固定成本为1000元，每生产水泥1吨，成本增加20元，则水泥厂每日的总成本 C 与总产量 q 有如下的关系：

$$C=20q+1000$$

当 q 在生产能力容许的范围内[0,100]取定某一数值时，

总成本也随之有一个确定的数值与之对应。例如 $q=10$(吨)时，$C=20\times10+1000=1200$(元)。

例 3 为了进行市场预测，调查了某企业 1—6 月份某种商品的销售量分别为 100、105、110、115、111、120 件。将其列成表格，则月份 t 与销售量 q 有如下的对应关系：

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售量 q	100	105	110	115	111	120

根据这个表格，当 t 取定 1—6 的整数中的任一个时，q 都有一个确定的数与之对应。

例 4 一天中气温 T 与时间 t 是两个变量。某日气温自动记录仪记录了这两者的关系如下图：

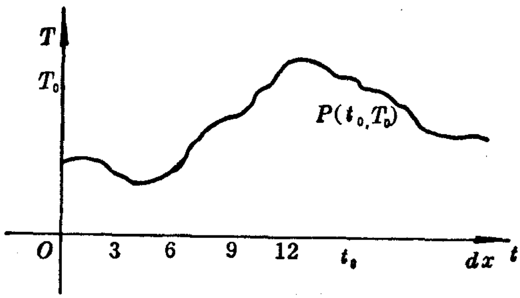

图 1.1

根据这个图形，可以求出对应于 0—24 小时内每一时刻 t_0 的温度 T_0。

综合上面四个例子，我们得到这样一个共同点：每一个问

题都包含着两个变量和一个确定的对应关系，尽管这个对应关系的表达方式各有不同（如例1、例2由公式表达，例3由表格表达，例4由图形表达），但都指明了两个变量对应关系的具体内容，根据这一对应关系，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，另一变量就有确定的值与之对应。两个变量间的这种对应关系，就是函数概念的实质。

如果抛开变量的具体意义，仅从纯数量的角度，一般地来研究这种变量之间的依赖关系时，就可以抽象出下面的定义。

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为 D（实数集），如果对于 D 中的每个 x 值，按照某一对应规律 f 都可以唯一地确定变量 y 相应的值，我们就说变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x) \quad x\in D$$

x 称为自变量，y 称为因变量，x 的变化范围 D 叫做函数的定义域。

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取定定义域中某一定值 x_0 时，因变量的相应值叫做当 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $f(x)|_{x=x_0}$，$y|_{x=x_0}$，当 x 取遍定义域中每个值时，所有函数值的全体叫做函数 $y=f(x)$ 的值域。

例如：设 $f(x)=2x^2-5$，则

$$f(1)=2\cdot(1)^2-5=-3$$

$$f(2)=2\cdot(2)^2-5=3$$

$$(2x^2-5)|_{x=-\frac{1}{2}}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-5=-\frac{9}{2}$$

$$(2x^2-5)|_{x=a}=2\cdot(a)^2-5=2a^2-5$$

为了更好地弄清函数概念的实质，下面几点说明是必要的。

一、确定函数的要素

函数概念反映着自变量和因变量之间的依从关系。它涉及到定义域、对应规律和值域。但是很明显，只要定义域和对应规律确定了，值域也就随之确定。因此，定义域和对应规律是确定函数的两个要素，只要两个函数的定义域和对应规律都相同，那么这两个函数就相同；只要定义域或对应规律之一不相同，那么这两个函数就不相同。例如 $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$，这两个函数的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，对应规律都是：不管 x 取任何值，y 都恒等于 1（因为有三角恒等式 $\sin^2x+\cos^2x=1$），因此它们是相同的函数。又如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$，虽然它们的定义域都一样 $(-\infty<x<+\infty)$，值域也相同 $(|y|\leqslant 1)$，但对应规律不同。比如取 $x=\frac{\pi}{2}$，$\sin\frac{\pi}{2}=1$，而 $\cos\frac{\pi}{2}=0$，因此它们是不同的函数。又如 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，前者定义域不包含 $x=1$，后者不受这个限制，二者定义域不同，所以它们是不同的函数。

在这里还应当指出，在函数的定义中并未规定自变量与因变量是用什么字母表示。只要定义域及对应规律一样，不管自变量及因变量采用什么字母表示，我们都认为是相同的函数，例如 $S=\pi r^2$，$u=\pi v^2$，$y=\pi x^2$ 都是相同的函数，因为只要把右边的字母都看作自变量，左边的字母看作因变量，那么

它们的定义域和对应规律都一样。

二、关于函数的表示

函数定义中对表示函数的方式并未加任何限制。它不一定要用公式表示，它可以通过表格(如例 3)、图示(如例 4)或其它方式来表示。即使用分析式表示，也并没有规定只用一个式子表示。根据实际问题变量间的具体对应关系，有时需用几个式子来表示。这类函数称为“分段函数”。例如：

$$y=\begin{cases}x-1 & -\infty<x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & 0<x<+\infty\end{cases}$$

变量 y 与 x 之间的关系，完全满足函数的定义。

此外，在我们研究两个不同的函数时，也要用两个不同的字母来分别表示它们的对应规律。或者用同一个字母加上足标以示区别。例如圆的周长 l 和圆的面积 S 都是半径 r 的函数，我们可以分别用

$$l=f(r) \quad 与 \quad S=\varphi(r)$$

表示它们。显然 $f(r)=2\pi r$，$\varphi(r)=\pi r^2$ 它们表示不同的对应规律。

三、函数定义域的确定

除了在解决实际问题时，根据变量的实际变化范围来确定定义域之外，在数学中，当函数 $y=f(x)$ 通过一个表达式表示时，我们规定其定义域就是使该式子有意义的自变量的值的全体。因此，在确定函数的定义域时，必须注意下面几点:

1. 函数式里如果有分式，则使分母为零的自变量的值必须除外。

2. 函数式里如果有偶次根式，则根号里的整个式子必须大于或等于零。

3. 函数式里如果有对数记号，则要使真数为正。

4. 函数式里如果有正切函数或余切函数，则在正切、余切符号下的式子的值分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$。

5. 函数式里如果有反正弦或反余弦函数，则在反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1 。

6. 如果函数的表达式由若干项组合，则它的定义域是各项定义域的公共部分。

例5 试确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x}$ 的定义域。

解 此函数的第一项 $\sqrt{1-x^2}$ 的定义域由

$$1-x^2\geqslant0$$

确定，解此不等式得

$$|x|\leqslant1$$

即

$$-1\leqslant x\leqslant1$$

第二项 $\sqrt{x}$ 的定义域为 $x\geqslant0$，两者的公共部分为

$$0\leqslant x\leqslant1$$

这就是所求的函数的定义域。

四、关于单值函数与多值函数

在上述函数定义中，规定对于每个 $x\in D$，有且仅有 y 的一个值与之对应；若对于每个 $x\in D$，有 y 的多个值与之对应，则不符合我们上述函数的定义。有时把这种情况称为多值函数，而符合上述定义的函数称为单值函数。以后如果不加特

别说明，所有函数都指单值函数。

§1.3 经济中常用的函数

一、总成本函数

前面我们已经知道，总成本是由固定成本和变动成本两部分组成。

例1 设某厂生产某种产品的最大生产能力为b个单位，至少要生产a个单位，固定费用为C_1元，每生产1个单位产品，变动费用增加C_2元，试求总成本函数。

解 设q表示总产量，则q只能在$[a,b]$内取值，生产q个单位的变动成本为C_2q。所以总成本

$$C=C_1+C_2q \quad q\in[a,b]$$

二、价格函数

我们已经说过，商品的价格与市场的供求情况有密切关系。一般说来，价格是销售量的函数。

例2 设某批发站批发一万只某种牌号手表给零售商，目前该种牌号手表的订价为70元，若批发站每次多批发3000只该牌号手表，市面上该种手表的价格就相应地降低3元，现批发站最多只能批发2万只手表给零售商，最小销量为1万只，试求价格函数(即销售量对价格的影响)。

解 设以q代表手表总销售量，则q只能在[10000, 20000]上取值。按每多销售3000只，价格相应减少3元的比例，多销售$q-10000$只，价格相应减少了$3\cdot\frac{q-10000}{3000}$。故价

格函数为

$$p=70-3\cdot\frac{q-10000}{3000}$$

即

$$p=70-\frac{q-10000}{1000}$$

$$=80-\frac{1}{1000}q \quad q\in[10000,20000]$$

三、需求函数

在例 2 中把价格看作是销售量(需求量)的函数。我们也可以反过来，把需求量看作是价格的函数，一般地需求量是随着价格的提高而减少的。

例 3 如果我们把例 2 中的条件改为:“手表的价格为 70 元时，销售量为 10000 只，若手表价格每提高 3 元，需求量就减少 3000 只”，则我们可得出需求函数为

$$q=10000-\frac{p-70}{3}\cdot 3000$$

即

$$q=1000(80-p)$$

其实，这个关系式与例 2 的关系式是等价的。从这个关系式可以知道，手表的价格不能超过 80 元，否则没有销路。

四、供应函数

如果我们考虑市场供应的一方，当商品提供者能得到的商品价格增加时，我们可望供应者增加它们的产品的供应量，因此供应量也是价格的函数。

例 4 设手表的价格为 70 元时，手表厂可提供 10000 只手表，当价格每增加 3 元时，手表厂可多提供 300 只手表，试求供应函数。

解 设仍以 p 代表手表的价格，q 代表手表供应量，则依题意有

$$q=10000+300\cdot\frac{p-70}{3}$$

或
$$q=100(30+p)$$

如果我们把例 3 的需求函数和例 4 的供应函数作于同一个坐标系内(图 1.2) 它们的交点所对应的价格，就是供求平衡价格(70 元)低于这个价格则求大于供，高于这个价格，则供大于求。

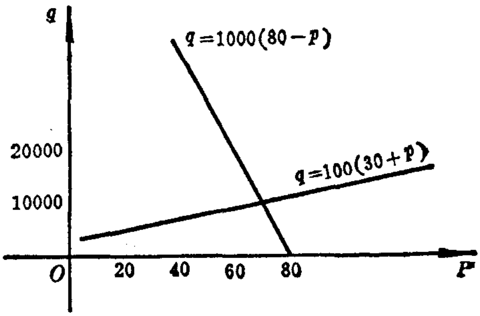

图 1.2

五、收益函数

收益函数就是销量与价格的乘积，以 q 代表销量，p 代表价格，R 代表收益，则有

$$R=q\cdot p$$

如果把 p 看作是 q 的函数 $p=p(q)$，则收益也是 q 的函数

$$R=q\cdot p(q)=R(q)$$

六、利润函数

收益与成本之差就是利润 L: