GAOXIAOGONGGONGKECONGSHU

高校公共课丛书

概率论

陈慧玉 主编

上海财经大学出版社

概 率 论

主　编　陈慧玉
副主编　何其祥

上海财经大学出版社

内容提要

本书系高等院校财经类专业使用的经济数学基础系列教材之一。主要内容有：事件与概率、条件概率与独立性、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征、常用分布及其经济应用和大数定律与中心极限定理等7章。每章末配有适量的习题，书末附有答案与提示和一系列附表供读者自我检核。

本书内容由浅入深，适合于财经类高等院校各专业作为教材使用，也可作为财经类高等教育的夜大学、函授的教材以及经济管理人员的自学用书。

前　言

本书是根据国家教委颁布的“高等院校财经类专业核心课程的教学大纲”编写的，是经济教学基础系列教材之一。

随着社会发展，科技进步和经济体制改革的不断深化，《概率论》在现代科学技术和经济管理中的应用日趋广泛，我们力争写出一本质量较高、适合实际教学需要的《概率论》教材。

在撰写此书时，我们遵循教学大纲的指导思想和基本原则，结合多年财经教学的教学实践，考虑到经济管理专业的特点、后继课程以及财经教育今后发展的需要，对教材内容作了认真精选，并注重了《概率论》在经济理论研究和经济管理中的应用，在叙述上简明扼要，深入浅出，力求既体现学科的系统性、科学性、实用性与先进性，又有利于培养学生的逻辑思维能力，提高运用概率论的知识分析和处理实际经济问题的能力。

全书共分七章，拟用36学时完成教学，书中选配了既具有启发性，又有广泛应用性的例题与习题，书末附有习题参考答案。

本书由上海财经大学基础课教学部数学教研室的教师编写，陈慧玉任主编，何其祥任副主编，徐乃则任主审，具体参加编写的成员有：何其祥（第一、二章），陈慧玉（第三、五章），张震峰（第四、七章），杨勇（第六章）。在成书的过程中，得到了教研室其他同志的支持和关心，在此致以谢意。

限于编者水平和时间仓促，书中难免存在不妥之处，恳请数学界同仁与广大读者不吝赐教。

编者

1996年3月

目　录

第一章　事件与概率

本章将介绍一类新的现象——随机现象，它广泛存在于自然界和人类社会中，概率论的研究对象就是随机现象。事件与概率是概率论中最基本的两个概念，在这一章中，我们将以深入浅出的方式介绍这些概念及其运算，最后还将较完整地研究一类特殊的随机现象——古典概型，它是早期概率论的主要研究对象，但至今仍有广泛的应用，对它的讨论有助于直观地理解概率论的基本概念。

§1.1　概率论的发展史

概率论是一门研究随机现象的数量规律的学科。最早对随机现象的研究始于 17 世纪的法国，一般现在人们认为概率论的鼻祖应为当时法国的数学家帕斯卡(Pascal 1623～1662)和费马(Fermat 1601～1665)，不过；当时研究的模型较简单，就是现在通称的古典概型，在这些研究中，逐步建立了事件、概率、随机变量和数学期望等重要概念，以及它们的基本性质与运算法则。后来，由于许多社会问题和工程技术问题(如人口统计、保险理论、天文观测、误差理论、产品检验和质量控制等)的陆续提出，均促进了概率论的发展，从 17 世纪到 19 世纪，贝努利(Bernoulli)、棣莫哇佛尔(De Moivre)、拉普拉斯(Laplace)、高斯(Gauss)、普阿松(Poisson)、切贝谢夫(чеоыцIев)、马尔可夫(Марков)等著名数学家都对概率论的发展作出了杰出的贡献。在这段时间里，概率论的发展简直到了使人着迷的程度，但是，随着概率论中各个领域大量成果的获得，以及概率论在其它基础学科和工程技术上的应用，由拉普拉斯以古

典概型为背景给出的概率定义的局限性很快便暴露了出来，甚至无法适用于一般的随机现象。因此可以说，到 20 世纪初，概率论的一些基本概念，诸如概率等尚没有确切的定义，概率论作为一个数学分支，缺乏严格的理论基础。直到 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫（колмогоров）发表了他的名著《概率论的基本概念》，他用近代测度论的思想，总结前人的成果，提出了概率论的公理化结构，这个结构明确定义了概率等基本概念，使概率论成为严谨的数学分支，这是概率论发展史上的一个里程碑，为以后概率论的迅速发展奠定了严密的理论基础。

其后，由于物理学、生物学、工程技术、农业技术和军事技术发展的推动，概率论得到了飞速的发展，理论课题不断扩大与深入，应用范围大大扩大。在最近几十年中，概率论的方法被引入各个工程技术学科和社会学科。目前，概率论在近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、工厂产品质量控制、农业试验和公用事业等方面都得到了重要应用。值得一提的是，由于概率论的应用，改变了经济、金融、管理科学的传统的研究方式，目前越来越多的概率论方法被介入到经济、金融和管理科学，概率论成为它们的有力工具，甚至可以说，概率论成了从事经济数量分析的必读课程。

现在，概率论已发展成为一门与实际紧密联系的理论严谨的数学学科，它内容丰富，结论深刻，它有别开生面的研究课题，有自己独特的概念和方法，成为近代数学的一个有特色的分支。

§1.2　随机现象与频率稳定性

一、随机现象

当我们观察自然界和人类社会中各种事物的变化规律时，会发现两种不同类型的现象。一种我们称之为**决定性现象**，它在一定

的条件下必然会出现某个结果。例如在没有外力作用下，作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动；太阳总从东方升起；生物总要经历生长、发育、衰老直至死亡等各个阶段等等。这种在一定条件下，必然会发生的事情称为**必然事件**。反之，那种在一定条件下，必然不会发生的事情就称为**不可能事件**。例如，"在一个大气压下，没有加热到 100℃的水沸腾"是不可能的。

必然事件和不可能事件，虽然表现形式有所不同，但两者的本质是一样的。必然事件的反面就是不可能事件，而不可能事件的反面就是必然事件。必然事件和不可能事件组成决定性现象，它广泛地存在于自然现象和社会现象中，概率论以外的数学分支研究的就是决定性现象的数量规律。

除了决定性现象以外，在自然现象和社会现象中还存在着与它有着本质区别的另一类现象。例如，检查某商店各柜台未来一天的营业额，事先无法确定各柜台营业额的大小；金融领域中事先无法断言将来某时刻某证交所的指数；同一条生产线上用同样的工艺生产出来的灯泡寿命长短也呈现出偶然性，这是由于在生产过程乃至对灯泡寿命试验的过程中种种偶然性的条件差异，使得每只灯泡的寿命不能事先确定；概率论中最经典的例子要数向上掷一枚硬币，结果可能是正面也可能是反面，事先无法断定。这些例子的一个共同特点是：在基本条件不变的情况下，一系列的试验或观察会得到各种不同的结果，换言之，**就一次试验或观察而言**，它可能会出现这种结果，可能会出现那种结果，事先无法确定，呈现出一种偶然性，这种现象称为**随机现象**。概率论所研究的就是这种随机现象所包含的数量规律。

那么随机现象是否普遍呢？回答是肯定的。世界上的万事万物都是相互依赖、相互影响的，某一次的观察或试验，其结果如何，往往受到许多偶然因素的影响，表现形式往往是偶然的或"随机"的，因而随机现象是普遍存在的，从而概率论的研究不但具有理论

上的意义，而且具有广泛的应用价值。

对于随机现象，我们通常关心的是在试验或观察中某一结果是否出现或会出现什么结果，这些结果称为**随机事件**，简称**事件**。例如向上掷一枚硬币，观察正、反面出现的情况，"出现正面"就是一个事件；又如观察某时刻某证交所的指数，"指数高于600点"也是一个事件等等。以后，我们通常用大写英文字母 $A,B,C,A_i,\cdots$ 等表示随机事件。

二、频率与概率

某一次试验或观察中出现结果的偶然性并不等于说随机现象是杂乱无章和无规律的，当我们对随机现象进行大量重复的试验或观察时，就会呈现出明显的规律性——频率稳定性。

定义 1 对于随机事件 A，若在 N 次试验中出现了 n 次，则称

$$\mu_N(A)=\frac{n}{N}$$

为随机事件 A 在 N 次试验中出现的**频率**。

为了说明频率稳定性，让我们先来看一些著名的例子。

例 1 抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面，事先作出确定的判断是不可能的，但假如硬币是均匀的，那么，我们有理由认为出现正面和反面的可能性应该一样，即在大量试验中出现正面和反面的频率都应接近50%，为验证这一点，历史上曾有不少人作过试验，其结果如下：

实验者	投掷数	出现正面次数	出现正面的频率
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016
皮尔逊(Pearson)	24000	12012	0.5005

例 2 任意指定一本书，翻到任意一页，任意指定该页中某一

行及该行中的任意一个位置，记录所得到的结果，大量重复这一试验，会发现 26 个字母和其它字符（包括标点符号和空格）的使用频率相当稳定，下表是经过大量试验后得出的：

字母	其它	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052

字母	H	D	L	C	F	U	M	D	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.0234	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012

字母	W	G	B	U	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

这样的例子还可以举出很多，这些例子表明了这样一个事实：虽然在一次试验或观察中某一个随机事件 A 是否出现是偶然的，但当试验次数 N 很大时，事件 A 出现的频率总在某个固定常数的附近摆动，而且一般说来，N 越大，摆动的幅度越小，这一规律称为**频率稳定性**。

频率稳定性是由观察对象的固有属性所决定的。抛掷一枚硬币，可以出现正面或反面，假如硬币是均匀的，这一属性决定了当你多次抛掷硬币时，出现正面的次数总是接近总抛次数的 $\frac{1}{2}$；至于英文字母被使用的频率，虽然各个作家的写作风格各不相同，书籍出版也各有自己的排版方式，但字母被使用的情况总是受着文字结构、语法结构这些固有规律的支配，正是这些规律决定了英文字母使用频率的稳定性。因此，随机事件的频率稳定性表明了一个随机事件发生的可能性大小，是随机事件本身固有的客观属性，因此可以对它进行度量。对于随机事件 A，我们用 $P(A)$ 来刻划随机事件 A 发生的可能性大小，称 $P(A)$ **为事件 A 发生的概率**。显然

$P(A)$即为频率稳定性中的稳定值。

对于随机现象，仅讨论它可能出现什么结果，价值不大，而在讨论可能出现各种结果的同时，指出各种结果出现的可能性大小才有意义。概率概念的引进，使得我们可以对随机现象作定量的研究。

从上述可见，频率和概率既非同一概念，又有十分密切的联系，譬如，当试验次数 N 无限增大时，频率和概率应具有某种极限的关系，这正是概率论中的一大课题——极限理论的雏型，它的严格讨论将放在本书的第七章中给出。

§1.3 样本空间与随机事件

一、样本空间

对于随机现象，我们感兴趣的是它的结果，因此必须对它进行观察或试验，这种对随机现象的某一特征的试验或观察，称为**随机试验**。通常用字母“E”表示。

例如，E_1：向上掷一枚硬币，观察正、反面出现的情况；

E_2：观察某时刻某证交所的指数；

E_3：抽查某天某柜台的营业额。

我们把随机试验的每一个可能结果称为**样本点**，用 ω 表示，样本点全体组成的集合称为**样本空间**，用Ω表示。要认识一个随机试验，首先必须弄清楚它可能出现的各种结果，因此确定样本空间是研究随机现象的第一步。下面我们来看几个例子。

例 3　向上掷一次骰子，观察朝上一面的点数，则所有可能的结果为$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，如果将 6 个面分别涂以红、黄、蓝、绿、白、黑 6 种颜色，则$\Omega=\{$红、黄、蓝、绿、白、黑$\}$，这两个样本空间表面上不同，而本质上应该是一样的，它们可以统一抽象地记为$\Omega=$

$\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$。

一般地，像上面只有有限个样本点的样本空间可以表示为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$。

样本空间的这种抽象表示，实际上是抓住了随机现象的本质，使得那些表面上不同而本质上一致的各种随机现象能用统一的模型来表示。例如，只包含两个样本点的样本空间，既能作为掷硬币出现正面、反面的模型，又能用于人寿保险中“生存”与“死亡”的模型，以及描述天气时“下雨”与“不下雨”的模型，或者某公共汽车站“有人排队”与“无人排队”的模型等等。

例 4　观察某电话交换台在$[0,t]$内来到的电话呼叫数，其结果显然为一非负整数，但很难确定呼叫数的上界，因此，样本空间$\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$，这一样本空间中包含有无穷多个样本点，但它们可以按某种次序排列出来，这时我们称它有**可列**个样本点，其一般形式为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$。

例 5　测量某一零件的长度，考察其测量结果与真正长度的误差，样本空间Ω可取作$[-M,M]$，其中M为最大正误差，如果无法确定这一最大值，将Ω取作$(-\infty,+\infty)$也无妨，这里的样本空间$[-M,M]$，也含有无穷多个样本点，但它无法像例 4 中的样本空间那样将样本点一一排出，我们称这样的样本空间所包含的样本点为**不可列**个。

例 6　评价某学校小学生的健康状况，需要同时测量小学生的身高、体重和胸围，在这一随机试验中，任一可能的结果即样本点是一个有序数组(x,y,z)，其中x,y,z分别代表被测学生的身高、体重和胸围，因此样本空间为$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0<x\leqslant a,0<y\leqslant b,0<z\leqslant c\}$，这里的$a$、$b$、$c$分别代表该校学生身高、体重和胸围的最大值。

从以上这些例子可以看出，随着所考察的随机试验的不同，相应的样本空间可能很简单，也可能很复杂。

二、随机事件

有了样本空间，我们就可以将随机事件的概念进一步明确化了。

在例 3 中，向上掷一颗骰子，样本空间$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，如果以 A 表示“得到的为奇数”，显然 $A=\{1,3,5\}$；B 表示“得到的点数不大于 4”，则 $B=\{1,2,3,4\}$，这里的 A、B 均为随机事件，它们都是由Ω中的若干样本点所构成。当然，像“出现的点数为 1”，“出现的点数为 5”等等也都是随机事件，它们只包含单个样本点。

在考察测量误差的例 5 中，样本空间$\Omega=[-M,M]$，若以 A 表示“测量结果与真正长度的误差不大于 0.5 个单位”，则 $A=[-0.5,0.5]$。

由此可见，所谓**随机事件是指由若干个样本点组成的集合，或者说是样本空间的某个子集**。称某个随机事件 A 发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现。

由于随机事件是样本空间的子集，所以样本空间Ω本身也可看作一个事件，由于在任何一次试验中总有Ω中的某一样本点出现，也就是说Ω总发生，所以Ω就是必然事件；类似地，不包含有任何样本点的空集$\varnothing$也可以作为一个事件，由于在任何一次试验中总不可能有$\varnothing$中的某一样本点出现，即$\varnothing$总不发生，因此$\varnothing$就是不可能事件。当然，必然事件和不可能事件均属决定性现象，但我们宁可把它们作为随机事件的两个极端来处理，这样既是必需的也是方便的。

三、事件之间的关系及运算

给定一个样本空间，显然可以定义不止一个随机事件，分析这些事件之间的相互关系，不仅有助于认识事件的本质，而且可以从简单事件的概率推算复杂事件的概率，因此，下面我们介绍事件之

间的相互关系和运算。在下面的叙述中，$A,B,A_i(i=1,2,\cdots)$均表示某一随机试验 E 的事件。

1. 在一次随机试验中，如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 A 包含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$，或 $B\supset A$，这时事件 A 的样本点均属于 B。

例如，在例 4 中，若以 A 表示事件"$[0,t]$内来到的电话呼叫数不少于 1500 次"，而 B 表示事件"$[0,t]$内来到的电话呼叫数不少于 1000 次"，则事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，所以 $A\subset B$，此时 $A=\{1500,1501,\cdots\}$，而 $B=\{1000,1001,\cdots\}$，容易看出 A 的样本点都属于 B。显然，对于任一事件 A，总有$\varnothing\subset A\subset\Omega$。

对事件 A 和 B，如果同时成立 $A\subset B$ 和 $B\subset A$，则称事件 A 和事件 B 是**等价**的或 A **等于** B，记为 $A=B$，实际上，此时 A 和 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同。

2. 称"事件 A,B 同时发生"这一事件为 A 与 B 的**交事件**，记为 $A\cap B$ 或 AB。AB 由同时属于事件 A 和 B 的样本点所构成。例如对刚才所说的事件 A 与事件 B，AB 表示"$[0,t]$内来到的电话呼叫数不少于 1500 次"。

两个事件的交运算可以容易地推广到 n 个事件的场合，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"的事件。

若 $A\cap B=\varnothing$，它表示在一次试验中，事件 A 与事件 B 不可能同时发生，这时称事件 A 与 B **互不相容**，互不相容的的事件没有公共的样本点。类似地，若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个都不可能同时发生，即两两互不相容，$A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$，则称这 n 个事件是互不相容的。

3. 称"事件 A,B 中至少有一发生"这一事件为 A 与 B 的**并事件**，记为 $A\cup B$，它由至少属于 A,B 之一的样本点所构成。如以

A 表示“来到的电话呼叫数从 1000 次到 1500 次”,B 表示“来到的电话呼叫数不超过 1200 次”,则它们的并事件 $A \cup B$ 为“来到的电话呼叫数不超过 1500 次”。

如果 A 与 B 互不相容,则称它们的并为**和**,记为 $A+B$。

两个事件的并运算可以推广到 n 个事件的场合,事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并事件记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$,它表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 诸事件中至少有一个发生”的事件。同样,如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,称它们的并为和,记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $\sum_{i=1}^{n} A_i$。

4. 对于事件 A,称“事件 A 不发生”的事件为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**,记为 $\overline{A}$,它由 Ω 中所有不属于 A 的样本点构成。如以 A 表示“来到的电话呼叫数为偶数或 0”,则它的对立事件 $\overline{A}$ 就是“来到的电话呼叫数为奇数”。由定义不难看出,逆事件是相互的,A 也是 $\overline{A}$ 的逆事件,即 $\overline{\overline{A}}=A$。

5. 称事件“A 发生而 B 不发生”为事件 A 与 B 的**差**,记为 $A-B$,它由属于 A 但又不属于 B 的样本点所构成,显然 $A-B=A\overline{B}$。

由于事件是通过集合来定义的,所以上面介绍的事件之间的关系与运算,和相应的集合之间的关系与运算非常相似,这样,一方面我们可以借助集合论的知识和方法来帮助理解事件之间的关系,譬如可以用下面直观的维恩(Venn)图来描述上面介绍的关系;但另一方面,应学会用概率论的观点来解释这些关系及运算。

对于事件的运算,成立以下法则:

(1) 交换律:$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

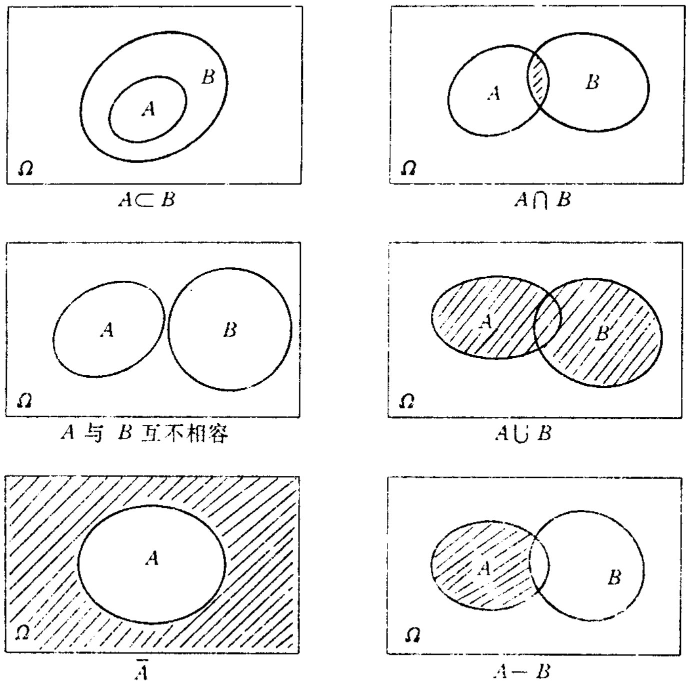

图1—1　事件的运算

(3)　分配律：$(A \cup B) \cap C=(A \cap C) \cup (B \cap C)$；

$$(A \cap B) \cup C=(A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(4)　德莫根(De　Morgan)定理

$$\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B},\quad \overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B}。$$

上述运算法则可以推广到多个事件甚至可列个事件，譬如对于德莫根定理，我们有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i},\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}。$$

例 7　设 A,B,C 为三个事件，利用它们表示下列事件：