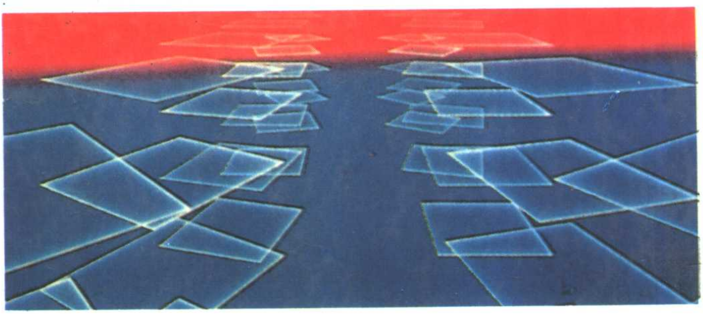
强厚度叠层板壳的精确理论

范家让 著



科学出版社

强厚度叠层板壳的精确理论

范家让 著

科 学 出 版 社

1996

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书抛弃了任何有关位移或应力模式的附加假设，引入状态空间，建立状态方程，为各种厚度的叠层板壳提供了统一的精确解析解；该解未知量少，可满足任意精度要求。

本书可供从事结构分析的科研人员、工程技术人员及相关专业的教师和研究生参考。

强厚度叠层板壳的精确理论

范家让 著

责任编辑 杨家福

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996 年 3 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1996 年 3 月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：1 650 字数：327 000

ISBN 7-03-005094-0/TU·49

定价：22.00 元

前　言

近代科学技术的发展，涉及很多高温、高压和高速问题。这不但要求一系列厚壁结构与之相适应，而且迫使人们寻求具有各种特殊性能的材料满足其要求，复合材料的诞生和发展就是明显的例子。在厚壁结构，尤其是复合材料厚壁结构领域内，Kirchhoff 理论已不能满足设计要求了，于是各种中厚壁结构理论，例如 Reissner 理论、Mindlin 理论、Hencky 理论、Власов 理论、Ambartsumyan 理论等相继出现。当今各家中厚壁结构理论，归纳起来都人为地引进了一些简化假设。例如，假设力学量是某一坐标变量的多项式，挠度沿厚度均布，且大多数忽略了挤压变形的影响。与薄壁结构理论相比，中厚壁结构理论虽较精确，然而本书作者已从理论上证明了各力学量的真解不可能是任何坐标变量的多项式，若以多项式的假设为前提，必导致基本方程之间的互不相容（满足这部分方程，那部分方程必不能满足，反之亦然），且不能包含全部弹性常数。例如，正交异性体有 9 个独立弹性常数，而各家理论只能包含五六个，这意味着未计入的几个弹性常数无论怎样变化对结果都无影响，显然这是与事实不符的。这些正是当今各家理论的误差根源。此类误差将随结构壁厚增大而剧增。即使对中厚壁问题，各家理论在计算叠层结构时，误差仍较大；尤其是层间应力，没有一家理论能给出较精确的结果，而层间应力又往往对叠层结构的破坏起着重要作用。对强厚壁结构，各家理论全部失效。作者在多年研究成果的基础上，特别是近三年来在国家自然科学基金扶持下进行深入、细致研究的基础上，对强厚度叠层板壳的精确解问题进行了探讨。本书就是这一理论研究成果的总结。其主要特点是，抛弃任何有关位移或应力模式的人为假设，引入状态空间，建立状态方程，并引进一些特殊函数，为薄的、中厚的和强厚的单层、叠层板壳

的静力、动力和稳定问题给出统一的精确解析解。此解未知量少，满足所有基本方程，包含了全部弹性常数，可满足任意精度要求，且能精确地算出所有层间应力。《中国科学报》先后于 1993 年 3 月 26 日和 8 月 30 日对此项研究进行了报道。

根据本书的理论和方法能解一系列按常规理论不能解的问题，所以有重要的理论价值。因所提供的是精确解，故对工程界，诸如防护工程、原子能工程、高压容器、大坝、大型电机轴瓦，特别是航空、航天部门等都有重要的实际意义。

本书可供从事结构分析的科研人员、工程技术人员和高等学校有关专业师生参考，也可作为固体力学专业、结构力学专业研究生的教材。

本书的出版是与伍章健、叶建乔、张巨勇、盛宏玉、丁克伟等同志辛勤、出色的工作分不开的。他们计算了本书中的全部算例，同时提出一些中肯的建议。可以说，没有他们的参与和合作，本书的出版是不可能的。作者在此谨向他们致以由衷的感谢。

限于水平，加之脱稿仓促，缺点、错误在所难免，恭请海内外学者不吝赐教。

目　　录

第一章　状态空间的基本理论

1-1　系统的状态空间描述

1-1-1　系统的状态变量

两个变量可形成一个平面，三个变量可构成一个立体空间，n 个变量则构成一个 n 维空间。构成相应维数空间的最少变量叫做系统的状态变量。例如，系统有 n 个变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，可构成一个 n 维空间，而且系统的运动状态完全可以由 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 描述，则这一组变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 就叫做系统的状态变量。

1-1-2　系统的状态矢量

用上述 n 个状态变量作为分量所构成的矢量 $\mathbf{x}(t)$，称为该系统的状态矢量，即

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} = [x_1(t) \quad x_2(t) \cdots x_n(t)]^T \tag{1-1}$$

1-1-3　系统的状态空间

状态矢量所有可能值的集合称为状态空间。状态空间中的每一点，代表了状态变量特定的一组值，即系统的某个特定的状态。

1-1-4　系统的状态方程和输出方程

在图 1-1 中，$u_1, u_2, \cdots, u_r$ 表示系统的输入变量，$y_1, y_2, \cdots, y_m$

为系统的输出变量，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表系统内部的状态变量。描述系统状态变量变化率的一阶微分方程组称为系统的状态方程，写成矩阵方程，即为

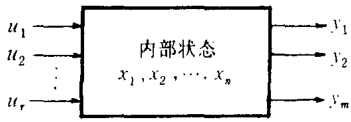


图 1-1　多输入-多输出系统示意图

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (1\text{-}2)$$

其中

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \cdots x_n]^T$$

为 $n \times 1$ 状态矢量，

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \cdots u_r]^T$$

为 $r \times 1$ 输入矢量，

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

为 $n \times n$ 系统矩阵，它表示系统内部各状态变量之间的关联情况，

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

为 $n \times r$ 控制矩阵，它表示输入对每个状态变量的作用情况。

代数方程组

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad (1\text{-}3)$$

称为系统的输出方程，或曰观测方程，式中

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \cdots y_m]^T$$

为 $m \times 1$ 输出矢量，

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

为 $m\times n$ 输出矩阵，它表示输出与每个状态变量间的关系，

$$\mathbf{D}(t)=\begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

为 $m\times r$ 矩阵，称为前馈矩阵，表示输入对输出的直接传递关系。在通常情况下，$\mathbf{D}(t)=0$。

顺便指出，由于系统状态变量的选取不是唯一的，因而描述系统行为的上述四个矩阵 **A**，**B**，**C** 和 **D** 也随所选的状态变量的不同而异。这就是说，对同一系统而言，其状态方程和输出方程可以有不同的形式。

下面给出的例子，作为本节所述概念的小结。

【例 1-1】 图 1-2(a)所示为一机械运动模型。二块体质量分别为 m_1，m_2，弹簧刚度为 k_1，k_2，粘性阻尼系数为 B_1，B_2。在 f 力作用下，写出以二质量块的位移 y_1 和 y_2 为输出的状态空间表达式。

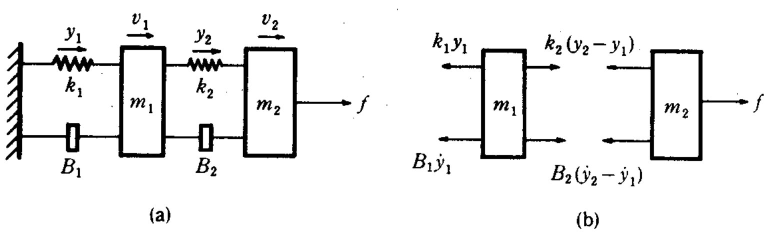


图 1-2　机械运动模型

解　图 1-2(b)为隔离体图。取弹簧的伸长 y_1，y_2 和质量块的速度 v_1，v_2 为状态变量，于是有

$$\left.\begin{aligned} & x_1=y_1, x_2=y_2 \\ & x_3=v_1=\frac{dy_1}{dt}=\dot{y}_1, x_4=v_2=\frac{dy_2}{dt}=\dot{y}_2 \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}1a)$$

根据牛顿定律，对图 1-2(b)二质量块分别列出动力学方程，得

$$\left.\begin{aligned}m_1\frac{dv_1}{dt}&=k_2(y_2-y_1)+B_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-k_1y_1-B_1\dot{y}_1\\ m_2\frac{dv_2}{dt}&=f-k_2(y_2-y_1)-B_2(\dot{y}_2-\dot{y}_1)\end{aligned}\right\}\tag{1-1b}$$

将(1-1a)代入(1-1b)，并令 $f=u$，则有

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_3\\ \dot{x}_2&=x_4\\ \dot{x}_3&=-\frac{1}{m_1}(k_1+k_2)x_1+\frac{k_2}{m_1}x_2-\frac{1}{m_1}(B_1+B_2)x_3+\frac{B_2}{m_1}x_4\\ \dot{x}_4&=\frac{k_2}{m_2}x_1-\frac{k_2}{m_2}x_2+\frac{B_2}{m_2}x_3-\frac{B_2}{m_2}x_4+\frac{u}{m_2}\end{aligned}\right\}\tag{1-1c}$$

把(1-1c)写成矩阵，得状态方程

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{1}{m_1}(k_1+k_2) & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{1}{m_1}(B_1+B_2) & \frac{B_2}{m_1}\\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{B_2}{m_2} & -\frac{B_2}{m_2}\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{m_2}\end{Bmatrix}u$$

或写成

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}\tag{1-1d}$$

因指定二弹簧伸长为输出，由(1-1a)不难看出输出方程为

$$\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{Bmatrix}$$

或写成

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{1-1e}$$

1-2　状态空间描述的非唯一性

1-2-1　空间的维数和基底

若在线性空间 $\mathbf{v}$ 中只能找到 n 个线性无关的矢量，则称 $\mathbf{v}$ 是 n 维空间。可见，n 个线性无关矢量决定一个 n 维空间，而在此空间内的其他大于 n 的任何矢量，都与该 n 个矢量线性相关。例如 n 维矢量

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

所决定的空间维数为 n，这是因为在该空间内可以找到 n 个线性无关矢量

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

而使 $\mathbf{x}$ 可以写成

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

之故。这 n 个矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 就叫做该矢量空间的基底。由此可见，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 是一组单位空间坐标，坐标的方向分别沿 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$，坐标的长度均为 1，而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别为矢量 $\mathbf{x}$ 沿坐标 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$ 上的分量。

需要说明的是，在 n 维空间中可以任意选取基底。例如

$$1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{n-1}$$

是一组线性无关矢量，可取为基底。于是按泰勒(Taylor)公式展开的多项式

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

在基底下的坐标便是

$$f(a), f'(a), \cdots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

1-2-2 逆矩阵

矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式记作 $\det\mathbf{A}$。$n\times n$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式可按任一列(行)展开,即

$$\det\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}, (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-4}$$

式中 M_{ij}是从 $\mathbf{A}$ 中删去第 i 行第 j 列元素后所得到的$(n-1)\times(n-1)$阶子矩阵的行列式,称其为元素 a_{ij}的余子式。而

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

则叫做元素 a_{ij}的代数余子式。这样(1-4)式便可写成

$$\det\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}, (j = 1,2,\cdots,n) \tag{1-5}$$

此外,行列式任意列的所有元素与另一列中所对应元素之代数余子式的乘积之和恒等于零,即

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik} = 0, (j \neq k) \tag{1-6}$$

代数余子式 A_{ij}是一个数量,如果将 n^2 个代数余子式 $A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成矩阵

$$\text{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-7}$$

该矩阵叫做矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵,记作 $\text{adj}\mathbf{A}$。

若 $n\times n$ 阶方阵的行列式值等于 a,即 $\det\mathbf{A}=a$,则由(1-5)和(1-6)两式知

$$\mathbf{A}\cdot\mathrm{adj}\mathbf{A}=\mathrm{adj}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=a\mathbf{I} \qquad (1\text{-}8)$$

式中 $\mathbf{I}$ 为 $n\times n$ 阶单位阵。

有了上面预备知识，现在便可介绍逆矩阵的定义及其计算方法了。若

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I} \qquad (1\text{-}9)$$

则称 $\mathbf{A}^{-1}$ 为 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵。一个非奇异的 $n\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 恒有唯一的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}$。由(1-8)和(1-9)两式可得计算逆矩阵的一般公式

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}} \qquad (1\text{-}10)$$

1-2-3 状态空间描述的非唯一性

状态矢量是状态空间的一个矢量，当空间的基底选定后，该矢量便可由其关于基底的"表示"来代表。当取不同基底时，矢量的"表示"自然不同。实际上，这种不同的"表示"相当于状态变量的不同选取。它们之间的关系可按下述非奇异变换规则确定。

如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一组状态变量，那么以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量的任一组线性函数

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \hat{x}_2 &= x_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{x}_n &= x_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{aligned}$$

都可取为同一系统的另一组状态变量，只要对 $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n$ 的每一组值，必对应唯一的一组 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 值；反之亦然。换言之，对状态矢量 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，总可找到某个非奇异变换矩阵 $\mathbf{P}$ 将原状态矢量 $\mathbf{x}$ 变换为新的基底下的状态矢量 $\hat{\mathbf{x}}$，即

$$\mathbf{x}=\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} \text{ 或 } \hat{\mathbf{x}}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \qquad (1\text{-}11)$$

式中矩阵 $\mathbf{P}^{-1}$ 是矩阵 $\mathbf{P}$ 的逆矩阵。虽然 $\mathbf{x}$ 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 是两个不同的状态

矢量，但可对同一系统进行描述，并能得到同样多的信息。

现在我们来看一看如何将状态空间表达式作非奇异变换，变换后又得到什么样的结果？

设在某一选定的基底下，系统的状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1-12}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x} \tag{1-13}$$

任选另一基底，并设对这组新基底的状态矢量为 $\hat{\mathbf{x}}$。将(1-11)式代入(1-12)和(1-13)两式，得

$$\mathbf{P}\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1-14}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} \tag{1-15}$$

将(1-14)式两边左乘以 $\mathbf{P}^{-1}$，并记

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}$$

则(1-14)和(1-15)式分别变成

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \tag{1-16}$$

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}} \tag{1-17}$$

由于基底的选取是任意的，即矩阵 **P** 可以是任一个 $n \times n$ 阶非奇异矩阵，这就导致状态空间的描述可以具有各式各样的形式。

【例 1-2】 设系统的状态空间表达式为

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix} u \tag{1-2a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{1-2b}$$

若取非奇异变换矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{1-2c}$$

则根据(1-10)式可算出 **P** 的逆阵

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

于是新的状态矢量为

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{Bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{Bmatrix}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix}$$

即

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 &= 3x_1+2.5x_2+0.5x_3\\ \hat{x}_2 &= -3x_1-4x_2-x_3\\ \hat{x}_3 &= x_1+1.5x_2+0.5x_3\end{aligned}$$

这表示新的状态变量 $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3$ 是原状态变量 x_1,x_2,x_3 的线性组合。

新的状态空间表达式为

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \tag{1-2d}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{P}\hat{\mathbf{x}} \tag{1-2e}$$

若用状态变量表示则为

$$\begin{Bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\\ \dot{\hat{x}}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2.5 & 0.5\\ -3 & -4 & -1\\ 1 & 1.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 6\end{Bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=[1\quad 0\quad 0]\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{Bmatrix}$$

计算后得状态方程