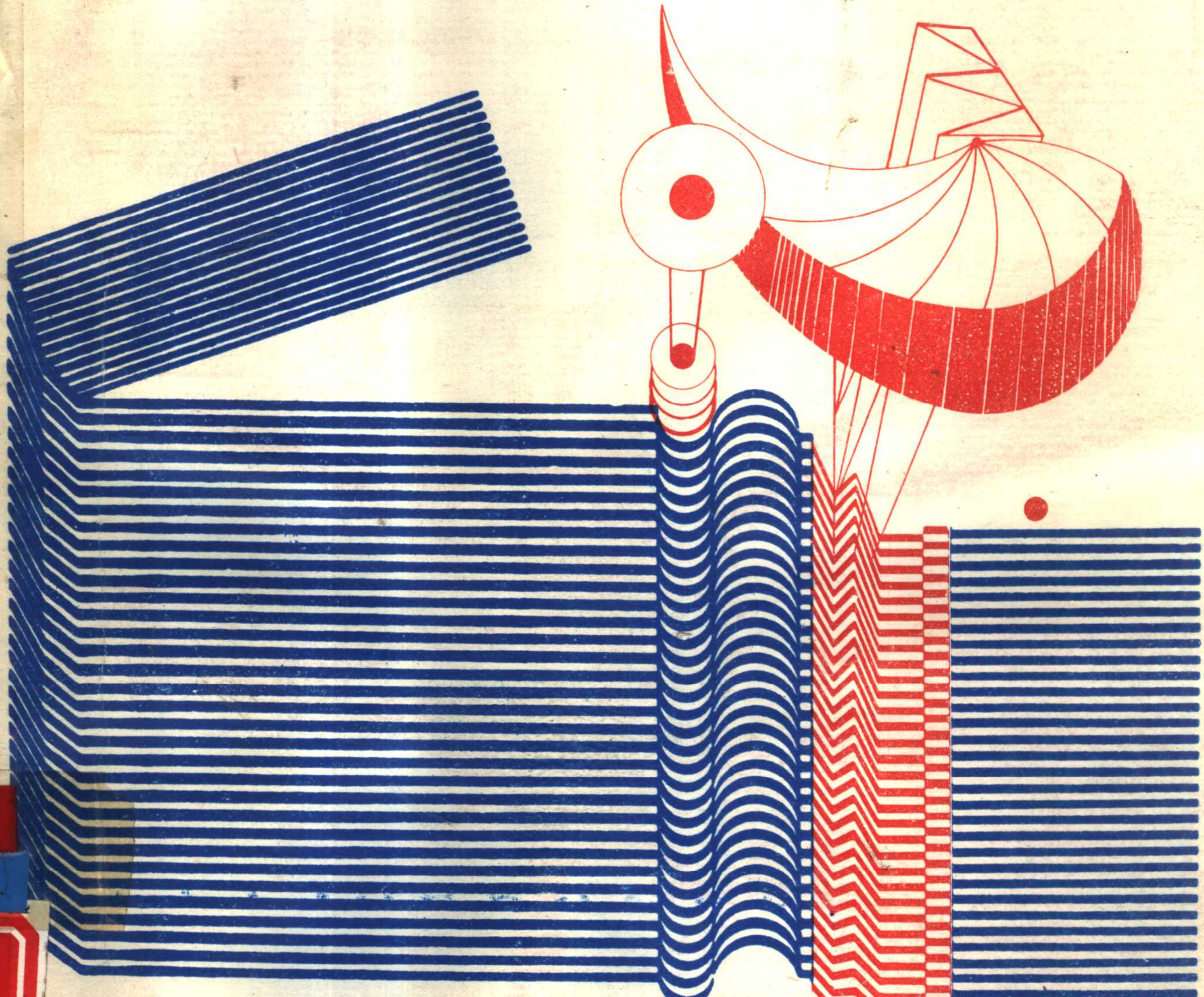
高等学校教材

线性系统理论

阙志宏 主编



西北工业大学出版社

高等学校教材

线性系统理论

阙志宏　主编

阙志宏　　　　罗　健
周凤岐　侯明善　史忠科　编著

西北工业大学出版社
1995年12月　西安

(陕) 新登字 009 号

【内容简介】 线性系统理论是控制、系统、信息等科学领域的一门基础理论课。本书全面系统地介绍线性多变量系统的状态空间分析和多项式矩阵分析的基本理论，研究线性系统的运动规律、固有的结构特性以及各类控制器的综合方法。本书为适应理工科学生的教学与研究需求，取材力求使数学概念从属于系统概念，注重基础性和工程实用性。编写力求论证严密，论例结合，语言易懂，注重可读性。本书可作为理工科硕士研究生教材，也可供高年级本科生及科技工作者参考。

高等学校教材
线性系统理论
郑志宏 主编
责任编辑 王俊轩
责任校对 刘 红

(710072 西安市友谊西路 127 号 电话 4253407)
陕西省新华书店发行
陕西西安丰华印刷厂印装
ISBN 7-5612-0754-9/TP·83 (课)
*
开本：787×1092 毫米 1/16 印张：19.75 字数：480 千字
1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷
印数：1-2 000 册 字价：17.20 元

前　　言

尽管任何实际系统都含有非线性因素，但在一定条件下，许多实际系统可用线性系统模型加以描述，加之在数学上处理线性系统又较为方便，于是线性系统理论在系统和控制理论领域中首先得到研究和发展，并成为应用最广、成果最丰的部分，所研究的概念、原理、方法、结论的基础性，为最优控制、数字滤波与估计、过程控制、非线性控制、系统辨识、自适应控制等许多学科分支提供预备知识。线性系统理论是控制类、系统工程类以及电类、计算机类、机电类等许多学科专业硕士研究生的一门基础理论课，是控制、信息、系统方面系列理论课程的先行课。

线性系统理论主要研究线性系统的运动规律，揭示系统中固有的结构特性，建立系统的结构、参数与性能之间的定性、定量关系，以及为改善系统性能以满足工程指标要求而采取的各类控制器设计方法。线性系统理论的内容极其丰富，研究的方法体系多种多样。20 世纪 50 年代，基于传递函数法的经典线性系统理论已经完备成熟，用于处理单变量系统极为有效，至今仍在广泛应用中。为适应多变量系统的研究需求，1960 年前后卡尔曼（Kalman）等人将状态空间法引入线性系统理论，标志着现代线性系统理论的建立。1970 年以来罗森布洛克（Rosenbrock）等人将矩阵分式及多项式矩阵描述引入线性系统理论，它将状态空间描述和传递函数描述相结合，建立了多变量线性系统的频域设计方法。此间，线性系统的几何理论及代数理论也得到了相应发展。

本书编写中，为适应理工科读者的研究需求，在研究方法体系的选材上作了必要的取舍，以研究状态空间法及多变量频域法为主，二者并重，对于比较抽象的线性系统的几何理论和代数理论未予展开，力图使数学概念从属于系统概念和工程应用。考虑到多年来教学实践中遇到的学生来源不同，导致学习起点有较大差别的实际情况，书中仍保留了有关单变量系统分析设计的最基础内容，这对于由浅入深地自然过渡到重点研究多变量系统将是有益的。教材编写中力求论证严密，论例结合，语言易懂，注意增强教材的易读性。

本书共 10 章。非控制类专业或缺乏状态空间基础知识的硕士生，建议选学第 1～7 章。控制类硕士生可选学前 5 章有关内容及第 6～10 章。均作为一个学期的课程，约 60 学时。

本书前言、第 1、4、8、9、10 章及 7.1 节由阙志宏编写，第 2、5 章由侯明善编写，第 3 章由周凤岐编写，第 6 章由史忠科编写，第 7 章其余部分由罗健编写。阙志宏负责全书统稿并担任主编。

本书经西安交通大学尤昌德教授审阅，提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心感谢。

限于水平，书中难免存在缺点和错误，望读者批评指正。

编　者

1994 年 6 月

目　录

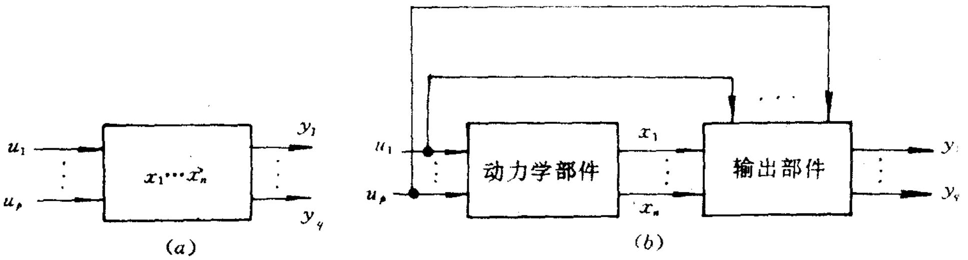


图 1.1 系统的两种基本描述

(a) 外部描述；(b) 内部描述

从能量观点看，在时刻 t_0 不存储能量，则称系统在时刻 t_0 是松弛的。式中 $\boldsymbol{u}[t_0,\infty)$ 表示定义在时间区间 $[t_0,\infty)$ 的输入。

例如一个 RLC 网络，若所有电容两端的电压和流过电感的电流在 t_0 时刻均为零（即初始条件为零），则网络称为在 t_0 时刻是松弛的。若网络不是松弛的，其输出响应不仅由 $\boldsymbol{u}[t_0,\infty)$ 所决定，还与初始条件有关。

在松弛性假定下，系统的输入-输出描述有

$$\boldsymbol{y} = H\boldsymbol{u} \tag{1.1}$$

式中 H 是某一算子或函数，例如传递函数就是一种算子。

因果性 若系统在时刻 t 的输出仅取决于时刻 t 及在 t 之前的输入，而与 t 之后的输入无关，则称系统具有因果性。本书所研究的实际物理系统都具有因果性，并称为因果系统。若系统在 t 时刻的输出尚与 t 之后的输入有关，则称该系统不具有因果性，不具因果性的系统能够预测 t 之后的输入并施加于系统而影响其输出。

线性 一个松弛系统称为线性的，当且仅当对于任何输入 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$，以及任何实数 α，均有

$$H(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = H\boldsymbol{u}_1 + H\boldsymbol{u}_2 \tag{1.2}$$

$$H(\alpha\boldsymbol{u}_1) = \alpha H\boldsymbol{u}_1 \tag{1.3}$$

否则称为非线性的。式（1.2）称为可加性，式（1.3）称为齐次性。若松弛系统具有这两种特性，称该系统满足叠加原理。式（1.2）和式（1.3）可合并表为

$$H(\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2) = \alpha_1 H\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 H\boldsymbol{u}_2 \tag{1.4}$$

线性系统数学方程中的各项，只含变量及其各阶导数的一次项，不含变量或其导数的高次项，也不含不同变量的乘积项。

时不变性（定常性） 一个松弛系统称为时不变的（定常的），当且仅当对于任何输入 $\boldsymbol{u}$ 和任何实数 α，有

$$HQ_\alpha\boldsymbol{u} = Q_\alpha H\boldsymbol{u} \tag{1.5}$$

否则称为时变的。式中 Q_α 称为位移算子，$Q_\alpha\boldsymbol{u}$ 表示对于所有 t 有

$$Q_\alpha\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t-\alpha) \tag{1.6}$$

意为 $Q_\alpha\boldsymbol{u}$ 的波形与延迟 α 秒的 $\boldsymbol{u}(t)$ 的波形完全相同。式（1.5）也可写作

$$HQ_\alpha\boldsymbol{u} = Q_\alpha\boldsymbol{y} \tag{1.7}$$

意为当输入 $\boldsymbol{u}$ 的波形位移 α 秒时，输出 $\boldsymbol{y}$ 的波形也位移 α 秒。

线性时不变（定常）系统数学方程中各项的系数必为常数，只要有一项的系数是时间的函数时，则是时变的。

状态与状态空间的基本概念 系统的状态空间描述是建立在状态和状态空间概念的基础上的。状态与状态空间概念早在古典力学中得到广泛应用，当将其引入到系统和控制理论中来，使之适于描述系统的运动行为，才使这两个概念有了更一般性的含义。

系统在时间域中的行为或运动信息的集合称为状态。但状态（行为或信息）需用变量来表征，故状态变量可简称为状态。

动力学系统的状态定义为：能够唯一地确定系统时间域行为的一组独立（数目最少的）变量。只要给定 t_0 时刻的这组变量和 $t \geqslant t_0$ 的输入，则系统在 $t \geqslant t_0$ 的任意时刻的行为随之完全确定。

众所周知，一个用 n 阶微分方程描述的系统，当 n 个初始条件 $x(t_0),\dot{x}(t_0),\cdots,x^{(n-1)}(t_0)$ 及 $t \geqslant t_0$ 的输入 $u(t)$ 给定时，可唯一确定方程的解 $x(t)$，故变量 $x(t),\dot{x}(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)$ 是一组状态变量。对于确定系统的时域行为来说，一组独立的状态变量既是必要的，也是充分的，独立状态变量的个数即系统微分方程的阶次 n。显然，当状态变量个数小于 n，便不能完全确定系统状态，变量个数大于 n 则必有不独立变量，对于确定系统状态是多余的。至于 t_0 时刻的状态，表征了 t_0 以前的系统运动的结果，故常称状态是对系统过去、现在和将来行为的描述。通常取参考时刻 t_0 为零。

状态变量的选择不是唯一的。选择与初始条件对应的变量作为状态变量是一种状态变量的选择方法，但也可以选择另外一组独立变量作为状态变量，特别应优先考虑在物理上可量测的量作为状态变量，如机械系统中的转角、位移以及它们的速度，电路系统中的电感电流、电容器两端电压等，这些可量测的状态变量可用于实现反馈控制以改善系统性能。在理论分析研究中，常选择一些在数学上才有意义的量作为状态变量，它们可能是一些物理量的复杂的线性组合，但却可以导出某种典型形式的状态空间方程，以利于建立一般的状态空间分析理论。选择不同的状态变量只是以不同形式描述系统，由于不同的状态变量组之间存在着确定关系，对应的系统描述随之存在对应的确定关系，而系统的特性则是不变的。

本书中将状态变量记为 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$。若将 n 个状态变量看作向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 的分量，则 n 维列向量

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

称为系统的状态向量。给定 t_0 时的状态向量 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 及 $t \geqslant t_0$ 的输入向量 $\boldsymbol{u}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)=[u_1(t) \ \cdots \ u_r(t)]^T$，则 $t \geqslant t_0$ 的状态由状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$ 唯一确定。

以 n 个状态变量为坐标轴所构成的 n 维空间称为状态空间。状态空间中的一点代表系统的一个特定时刻的状态，该点就是状态向量的端点。随着时间推移，系统状态在变化，便构成了状态空间中的一条轨线，即状态向量的矢端轨线。由于状态变量只能取实数值，故状态空间是建立在实数域上的向量空间。

在上述状态和状态空间概念基础上，可着手建立系统的状态空间描述。

系统的状态空间描述 图 1.1 已示出状态空间描述的结构，输入引起状态的变化是一个动态过程。列写每个状态变量的一阶导数与所有状态变量、输入变量的关系的数学方程称为状态方程。由于 n 阶系统有 n 个独立的状态变量，故系统状态方程是 n 个联立的一阶微分方程

或差分方程。考虑最一般的情况，连续系统状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = f_1(x_1,\cdots,x_n;\ u_1,\cdots,u_p;\ t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\cdots,x_n;\ u_1,\cdots,u_p;\ t)\end{cases} \tag{1.8}$$

输入和状态一起引起输出的变化是一个代数方程。列写每个输出变量与所有状态变量及输入变量的关系的数学方程称为输出方程。设有 q 个输出变量，故系统输出方程含 q 个联立代数方程。最一般情况下的连续系统输出方程为

$$\begin{cases}y_1 = g_1(x_1,\cdots,x_n;\ u_1,\cdots,u_p;\ t)\\ \vdots\\ y_q = g_q(x_1,\cdots,x_n;\ u_1,\cdots,u_p;\ t)\end{cases} \tag{1.9}$$

为了书写简洁，引入向量及矩阵符号，令

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_q\end{bmatrix} \tag{1.10}$$

分别为状态向量、控制向量（输入向量）、输出向量。再引入向量函数

$$\boldsymbol{f}(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ \vdots\\ f_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{g}(x,u,t) = \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ \vdots\\ g_q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\end{bmatrix} \tag{1.11}$$

则式（1.8）和式(1.9）可简记为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)\end{cases} \tag{1.12}$$

式（1.12）为状态方程和输出方程的组合，构成了完整的状态空间描述，称为状态空间方程，又称为动态方程。

只要式（1.12）中向量函数 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{g}(\cdot)$ 的某元显含 t，便表明系统是时变的。定常系统不显含 t，故有

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\end{cases} \tag{1.13}$$

若式（1.12）中 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{g}(\cdot)$ 的某元是 x_1，…，x_n 和 u_1，…，u_p 的某类非线性函数时，便表明系统是非线性的。若 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 和 $\boldsymbol{g}(\cdot)$ 的诸元都是 x_1，…，x_n 和 u_1，…，u_p 的线性函数，才表明系统是线性的。

对于线性系统，状态空间方程可表为更明显的一般形式

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 + \cdots + b_{1p}(t)u_p\\ \vdots\\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_{n1}(t)u_1 + b_{n2}(t)u_2 + \cdots + b_{np}(t)u_p\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_1 = c_{11}(t)x_1 + c_{12}(t)x_2 + \cdots + c_{1n}(t)x_n + d_{11}(t)u_1 + d_{12}(t)u_2 + \cdots + d_{1p}(t)u_p\\ \vdots\\ y_q = c_{q1}(t)x_1 + c_{q2}(t)x_2 + \cdots + c_{qn}(t)x_n + d_{q1}(t)u_1 + d_{q2}(t)u_2 + \cdots + d_{qp}(t)u_p\end{cases}$$

$$\tag{1.14}$$

写成向量-矩阵形式为

$$\begin{cases}\dot{x}= A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u\end{cases} \tag{1.15}$$

式中 $A(t)$、$B(t)$、$C(t)$、$D(t)$ 分别称为系统矩阵（状态阵）、输入矩阵（控制矩阵）、输出矩阵、耦合阵（前馈矩阵）。诸系数矩阵分别为

$$A(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix},\quad B(t)=\begin{bmatrix}b_{11}(t) & \cdots & b_{1p}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{np}(t)\end{bmatrix}$$

$$C(t)=\begin{bmatrix}c_{11}(t) & \cdots & c_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ c_{q1}(t) & \cdots & c_{qn}(t)\end{bmatrix},\quad D(t)=\begin{bmatrix}d_{11}(t) & \cdots & d_{1p}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ d_{q1}(t) & \cdots & d_{qp}(t)\end{bmatrix}$$

诸系数矩阵中只要有某元是时间函数，便是时变系统。当诸系数矩阵的所有元都是常数时，便是定常系统。线性定常连续系统是现代控制理论的最基本研究对象，其状态空间方程为

$$\begin{cases}\dot{x}= Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases} \tag{1.16}$$

式中 A 为 $(n \times n)$ 矩阵，B 为 $(n \times p)$ 矩阵，C 为 $(q \times n)$ 矩阵，D 为 $(q \times p)$ 矩阵。其状态空间方程可用方块图表示，见图 1.2。

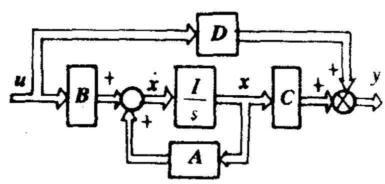


图 1.2 线性定常系统方块图

实际物理系统总是含有非线性因素，但许多实际系统当 x 和 u 均限制在工作点或平衡点附近作小偏差运动时，其非线性方程能够足够精确的用线性化方程来描述，从而状态空间方程线性化。设式 (1.13) 所示非线性向量函数 $f(x,u)$ 和 $g(x,u)$ 在工作点 (x_0,u_0) 邻域展开成台劳级数并略去二次及其以上各项，有

$$\begin{cases}f(x,u) = f(x_0,u_0) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial u^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle u \\ g(x,u) = g(x_0,u_0) + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle x + \left(\dfrac{\partial g}{\partial u^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle u\end{cases}$$

式中 $\triangle x=x-x_0$，$\triangle u=u-u_0$，且有 $\triangle y=y-y_0$，故

$$\dot{x}= \dot{x}_0 + \triangle \dot{x} \quad , \quad y = y_0 + \triangle y$$

工作点处满足

$$\dot{x}_0 = f(x_0,u_0) \quad , \quad y_0 = g(x_0,u_0)$$

于是可得小扰动线性化状态空间方程为

$$\begin{cases}\triangle \dot{x}= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle x + \left(\dfrac{\partial f}{\partial u^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle u \triangleq A \cdot \triangle x + B \cdot \triangle u \\ \triangle \dot{y}= \left(\dfrac{\partial g}{\partial x^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle x + \left(\dfrac{\partial g}{\partial u^T}\right)_{x_0,u_0} \cdot \triangle u \triangleq C \cdot \triangle x + D \cdot \triangle u\end{cases} \tag{1.17}$$

当非线性系统在工作点附近运动时，式 (1.17) 所示线性系统可以足够的精度代替式 (1.13)

所示原非线性系统。式（1.17）中诸系数矩阵可由列向量对行向量的求导规则导出，它们分别为

$$A=\left(\frac{\partial f}{\partial x^T}\right)_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

$$B=\left(\frac{\partial f}{\partial u^T}\right)_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_p}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_p}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

$$C=\left(\frac{\partial g}{\partial x^T}\right)_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial g_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_q}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

$$D=\left(\frac{\partial g}{\partial u^T}\right)_{x_0,u_0}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_p}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial g_q}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_q}{\partial u_p}\end{bmatrix}_{x_0,u_0}$$

当工作点变化时，诸系数矩阵各元的数值将更新。

需要指出的是，当所选状态变量不同时，所得状态方程也不同，故状态方程也不是唯一的。为了保证状态方程解的存在和唯一性，即满足初始条件 $x(t_0)$、在 $u(t)(t\geqslant t_0)$ 作用下的解 $x(t)$，在 $t\geqslant t_0$ 时存在且只有一个，$x(t)$ 不产生继电式的跳跃现象，也不存在某时刻变为∞，故对函数 $f(x,u,t)$ 应加以限制。解唯一存在的充分条件是应满足利普希茨（Lipschitz）条件[32]，对线性时变系统而言，$A(t)$、$B(t)$、$u(t)$ 的元都是 t 的分段连续函数；对于线性定常系统而言，A、B 都是元为有限值的常数矩阵；状态方程中不含 $u(t)$ 的导数项。有些实际系统的微分方程是含有输入导数项的，为使导出的状态方程不含输入导数，需适当的选取状态变量。

式（1.15）和式（1.16）表示了多输入-多输出线性系统的动态方程，当 $p=1$、$q=1$ 时，即单输入-单输出线性系统的动态方程变为

$$\begin{cases}\dot{x}=A(t)x+b(t)u\\ y=c(t)x+d(t)u\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=cx+du\end{cases}\tag{1.18}$$

这时 u、y 均为标量；b 为 $(n\times1)$ 维，c 为 $(1\times n)$ 维，d 为标量。

系统的状态空间描述的优越性在于：能揭示处于系统内部的状态信息并加以利用；一阶微分方程组比高阶微分方程宜于在计算机上求解；采用向量-矩阵形式，当各种变量数目增加时，并不增加数学表达的复杂性；可适于单变量或多变量、线性或非线性、定常或时变、确定性或随机性各类系统的描述。

物理系统状态空间方程的建立 根据物理系统所含元件遵循的定律列写出微分方程组，选择可以量测的物理量作为状态变量，便可导出状态方程；根据系统的任务或给定可确定输出量与状态变量间的输出方程。下面通过举例来说明建立系统状态空间方程的步骤。

例 1.1 研究图 1.3 所示电网络，输入变量为 e_1 和 e_2，输出变量为 u_C，试列写该双输入-单输出系统的状态空间方程。

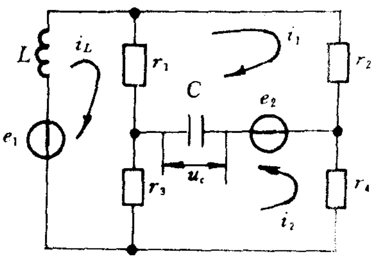


图 1.3 例 1.1 电网络

解 运用回路电流法列出三个回路的方程：

$$e_1 = L\frac{di_L}{dt} + i_L(r_1 + r_3) - i_1 r_1 + i_2 r_3$$

$$e_2 = u_C - i_L r_1 + i_1(r_1 + r_2)$$

$$e_2 = u_C + i_L r_3 + i_2(r_3 + r_4)$$

式中 u_C 满足

$$C\frac{du_C}{dt} = i_1 + i_2$$

消去中间变量可得网络的二阶微分方程，故网络的独立状态变量为 2 个。由回路方程显见，若选取流过电感的电流 i_L 和电容器端电压 u_C 作为状态变量既有明确物理意义又便于导出状态方程。电感、电容器都是储能元件，它们未分布在一个回路网孔内，一定是独立的储能元件，独立储能元件的个数即独立状态变量的个数。

消去中间变量 i_1，i_2，可整理得到 2 个一阶微分方程

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_L - \frac{R_2}{L}u_C + \frac{R_2}{L}e_2 + \frac{1}{L}e_1$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{R_2}{C}i_L - \frac{R_3}{L}u_C + \frac{R_3}{C}e_2$$

式中

$$R_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}, \quad R_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} - \frac{r_3}{r_3 + r_4}, \quad R_3 = \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_3 + r_4}$$

写成向量-矩阵形式，有

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{u}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{R_2}{L} \\ \frac{R_2}{C} & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{R_2}{L} \\ 0 & \frac{R_3}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$u_C = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$$

例 1.2 试确定图 1.4 (*a*)、(*b*)、(*c*) 所示网络的独立状态变量。图中 u、i 分别为输入电压、输入电流，y 为输出电压，x_i 为电容器端电压或流过电感的电流。

解 并非所有的电网络中的电容端电压和电感电流都是独立的状态变量。据电路定律，图 1.4 (*a*) 有 $x_1 - x_2 - x_3 = 0$，已知其中任意两个变量，第三个随之确定，故独立状态变量为 x_1、x_2，或 x_1、x_3，或 x_2、x_3。图 1.4 (*b*) 及 (*c*) 恒有 $x_1 = x_2$，独立状态变量只有一个。

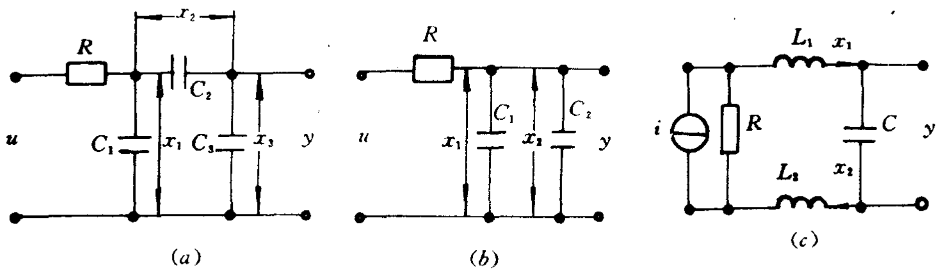


图 1.4 网络独立状态变量的确定

例 1.3 设有一倒立摆安装在传动车上，见图 1.5，图中 z 为小车相对参考系的位置，θ 为倒立摆偏离垂直位置的角度；摆杆长度 l，忽略其质量；m 为摆的质量；给质量为 M 的小车在水平方向施加控制力 u，以便保证倒立摆竖立在垂直位置而不倾倒。假定摆轴、车轮轴、车轮与轨道之间的摩擦均忽略不计。试列写倒立摆装置的线性化状态空间方程。

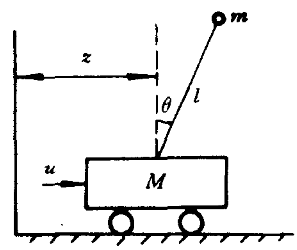


图 1.5 倒立摆装置

解 摆的水平位置为 $(z+l\sin\theta)$，在控制力 u 作用下小车与摆一起将产生加速运动，据力学原理，小车与摆在水平直线运动方向的惯性力应与控制力平衡，故有

$$M\frac{d^2z}{dt^2}+m\frac{d^2}{dt^2}(z+l\sin\theta)=u$$

即

$$(M+m)\ddot{z}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=u \qquad ①$$

摆绕摆轴旋转运动的惯性力矩应与重力矩平衡，故有

$$\left[m\frac{d^2}{dt^2}(z+l\sin\theta)\right]l\cos\theta=mgl\sin\theta \qquad ②$$

式①和②都是非线性方程。由于控制目的在于保持倒立摆直立，只要施加的控制力合适，作出 θ、$\dot{\theta}$接近于零的假定将是正确的，即以 $\theta_0=0$，$\dot{\theta}_0=0$ 作为工作点．倒立摆相对该工作点进行线性化，其台劳级数展开的结果等价于令式①、②中 $\sin\theta=\theta$，$\cos\theta=1$，且忽略 $\dot{\theta}^2\cdot\theta$ 项，即有

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{z}+ml\ddot{\theta}=u\\ \ddot{z}+l\ddot{\theta}=g\theta\end{cases} \qquad ③$$

联立求解可得

$$\begin{cases}\ddot{z}=-\dfrac{mg}{M}\theta+\dfrac{1}{M}u\\ \ddot{\theta}=\dfrac{(M+m)g}{Ml}\cdot\theta-\dfrac{1}{Ml}u\end{cases} \qquad ④$$

经消元可得倒立摆系统微分方程

$$Z^{(4)}-\frac{(M+m)g}{Ml}\ddot{z}=\frac{1}{M}\ddot{u}-\frac{g}{Ml}u$$

这是四阶方程，独立状态变量为四个。选择小车位移 z，小车速度 $\dot{z}$，摆杆角位移 θ，摆杆角速度 $\dot{\theta}$这些易于量测的量作为状态变量，其状态向量 x 定义为

$$x = [z \quad \dot{z} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T$$

考虑恒等式

$$\dot{z} = \dot{z} \quad , \quad \dot{\theta} = \dot{\theta} \tag{5}$$

由式④和式⑤可得状态方程

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{6}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \end{bmatrix}$$

假定小车位移作为输出变量 y，故输出方程为

$$y = cx = z \tag{7}$$

式中

$$c = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

1.2 化输入-输出描述为状态空间描述

有些实际系统难于利用定律来导出数学方程，需通过实验手段取得输入、输出数据，以适当方法确定输入-输出描述，然后再由输入-输出描述转换成状态空间描述。至于由实验数据确定输入-输出描述的方法，涉及系统辨识与估计，已超出本书范围，这里仅讨论已知输入-输出描述如何导出状态空间描述的问题，且限于研究单输入-单输出线性定常系统的情况，以便对两种基本描述的关系有一个比较直观的了解。表征输入-输出描述的最常用的数学方程是系统微分方程或系统传递函数；传递函数方块图也可看作是一种输入-输出描述，本节将分别研究其导出状态空间方程的方法。研究中揭示了状态空间方程的某些典型结构，为后面章节的讨论作准备。由输入-输出描述确定状态空间描述称为实现问题，关于实现的一般理论和方法将在第四、九章系统地研究。

一、由系统微分方程或系统传递函数建立状态空间方程

设单输入-单输出线性定常连续系统的微分方程具有下列一般形式

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y \\ & = \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \beta_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + \beta_1\dot{u} + \beta_0 u \end{aligned} \tag{1.19}$$

式中 $y^{(i)}=\dfrac{d^i y}{dt^i}$，$u^{(i)}=\dfrac{d^i u}{dt^i}$，$u$、$y$ 分别为系统输入、输出变量。其系统传递函数 $G(s)$ 为严格真分式，有

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0} \triangleq \frac{N(s)}{D(s)} \tag{1.20}$$

显见微分方程中含有输入导数项（即 $G(s)$ 含有零点）。为寻求下列形式的状态空间方程

$$\dot{x}= Ax + bu \quad , \qquad y = cx + du \tag{1.21}$$

必须适当选取状态变量与确定各系数矩阵 A、b、c、d。若选取下列状态变量

$$x_1 = y \ , \quad x_2 = \dot{y}, \cdots , x_n = y^{(n-1)} \tag{1.22}$$

可求得下列状态方程

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= - a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + \beta_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + \beta_1\dot{u} + \beta_0u
\end{aligned}$$

上述一阶微分方程组中第 n 个方程右端含有 u 的各阶导数项，若 u 是阶跃或分段连续函数，则 u 的各阶导数项中将出现脉冲函数 $\delta(t)$ 及 $\dot{\delta}(t)$、$\ddot{\delta}(t)$ 等，使状态方程的解出现无穷大的跃变，从而破坏解的存在性和唯一性。为此必须适当选择状态变量，以使状态方程中不出现 u 的导数项。状态变量选取方法不同，所得状态空间方程便不同，下面介绍的四种方案是部分常见选择方法，它们的状态空间方程的结构呈某种规范或标准形式。

1. 能观测规范型状态空间方程的导出

按如下规则设置一组状态变量

$$\begin{cases} x_n = y \\ x_i = \dot{x}_{i+1} + a_iy - \beta_iu \qquad i = 1,\cdots,n - 1 \end{cases} \tag{1.23}$$

其展开式为

$$\begin{aligned}
x_{n-1} &= \dot{x}_n + a_{n-1}y - \beta_{n-1}u = \dot{y} + a_{n-1}y - \beta_{n-1}u \\
x_{n-2} &= \dot{x}_{n-1} + a_{n-2}y - \beta_{n-2}u = \ddot{y} + a_{n-1}\dot{y} - \beta_{n-1}\dot{u} + a_{n-2}y - \beta_{n-2}u \\
&\vdots \\
x_2 &= \dot{x}_3 + a_2y - \beta_2u \\
&= y^{(n-2)} + a_{n-1}y^{(n-3)} - \beta_{n-1}u^{(n-3)} + a_{n-2}y^{(n-4)} - \beta_{n-2}u^{(n-4)} + \cdots + a_2y - \beta_2u \\
x_1 &= \dot{x}_2 + a_1y - \beta_1u \\
&= y^{(n-1)} + a_{n-1}y^{(n-2)} - \beta_{n-1}u^{(n-2)} + a_{n-2}y^{(n-3)} - \beta_{n-2}u^{(n-3)} + \cdots + a_1y - \beta_1u
\end{aligned}$$

故有 $\dot{x}_1 = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} - \beta_{n-1}u^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} - \beta_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + a_1\dot{y} - \beta_1\dot{u}$

考虑式（1.19），得

$$\dot{x}_1 = - a_0y + \beta_0u = - a_0x_n + \beta_0u$$

故状态方程为

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = - a_0x_n + \beta_0u \\
\dot{x}_2 = x_1 - a_1x_n + \beta_1u \\
\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_{n-2}x_n + \beta_{n-2}u \\
\dot{x}_n = x_{n-1} - a_{n-1}x_n + \beta_{n-1}u
\end{cases} \tag{1.24}$$

输出方程为

$$y = x_n \tag{1.25}$$

故各系数矩阵为（记下标 o）

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_o = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \quad c_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^T, \quad d_o = 0 \tag{1.26}$$

希读者注意 A_o、c_o 的形状特征有能观测规范型之称。

2. 能控规范型状态空间方程的导出

将式 (1.20) 所示 $G(s)$ 分解为两部分串联，并引入中间变量 $z(s)$，见图 1.6。由第一个方块可导出以 u 作输入，以 z 作输出的不含输入导数项的微分方程，由第二个方块可将 y 表为 z 及其各阶导数的线性组合，于是有

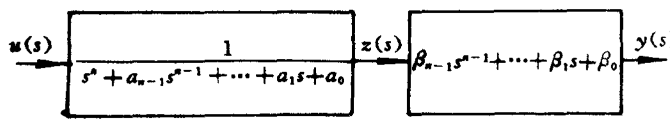


图 1.6　$G(s)$ 的串联分解

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{z} + a_0 z = u \\ y = \beta_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + \beta_1\dot{z} + \beta_0 z \end{cases} \tag{1.27}$$

按如下规则设置一组状态变量

$$x_1 = z\ ,\ x_2 = \dot{z},\ \cdots\ ,\ x_n = z^{(n-1)} \tag{1.28}$$

可得状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = z^{(n)} = -a_0 z - a_1\dot{z} - \cdots - a_{n-1}z^{(n-1)} + u \\ \quad = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u \end{cases}$$

输出方程为

$$y = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 + \cdots + \beta_{n-1}x_n \tag{1.30}$$

故各系数矩阵为（记下标 c）

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_c = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}^T, \quad d_c = 0 \tag{1.31}$$

希读者注意 A_c、b_c 的形状特征有能控规范型之称。形如 A_c 的矩阵称为友矩阵。