数学物理方程

理科数学

●欧维义 编

吉林大学出版社

理科数学

数学物理方程

欧维义

吉林大学出版社

理科数学

数学物理方程

欧维义

责任编辑：陈维钧	封面设计：张沭沉
吉林大学出版社出版	吉林省新华书店发行
(长春市东中华路 29 号)	长春大学印刷厂印刷
开本：850×1168 毫米 1/32	1991 年 12 月第 1 版
印张：11.375	1991 年 12 月第 1 次印刷
字数：283 千字	印数：1—1000 册
ISBN 7-5601-1061-4/O·120	定价：3.70 元

序

本书是和吉林大学出版社已出版的复变函数论、特殊函数及其应用两书配套的教材，它们一起组成《数学物理方法》课程的教学内容。

本书主要讲述求解数学物理问题的经典方法，包括行波法、分离变量法、积分变换法、Green 函数法和变分方法等。

本书注重物理和数学的渗透，注重运用物理、力学模型，以便把方法写得直观、形象。在内容结构上，做到层次清晰、结构严谨，以培养学生分析和解决实际问题的能力。

本书讲授时间约 54—60 学时。各专业还可根据需要和学时情况，组成若干个独立单元进行教学。

编　者

1991 年 4 月于吉林大学

目　　录

第一章　典型方程与典型定解问题

数学物理方程的主要研究对象，是来自各种数学物理问题的偏微分方程. 本章我们将从一些简单的物理、力学问题出发，引出本课程讨论的三种典型方程，以及关于它们的一些典型定解问题.

学习这一章，应该搞清楚每个方程及其定解问题的实际背景，知道每个数学符号的物理意义；明确推导偏微分方程的定解问题，就是从数量形式上去刻划由相应的物理定律所确定的某些物理量之间的制约关系.

§1　偏微分方程举例和基本概念

1.1　偏微分方程举例

所谓**偏微分方程**，是指含有未知的多元函数及其某些偏导数的关系式. 例如，导热物体的温度函数 $u=u(x, y, z, t)$ 满足的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x, y, z, t) \tag{1.1}$$

描写定常过程的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.2}$$

弦振动时其位移函数 $u=u(x, t)$ 满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

梁的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t) \tag{1.4}$$

出现于水波研究中的 KdV(Korteweg de Vries)方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{1.5}$$

等等都是偏微分方程.

就一个 $n(\geqslant 2)$ 元函数 $u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 而言，关于它的偏微分方程的一般形式是

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, \mathrm{D}u, \mathrm{D}^2 u, \cdots, \mathrm{D}^m u) = 0 \tag{1.6}$$

其中 F 是其变元的已知函数.

$$\mathrm{D}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$\mathrm{D}^k u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}}$$

$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 均为非负整数，$\sum_{i=1}^{n} k_i = k$, $k = 1, 2, \cdots, m$.

1.2 基本概念

包含在偏微分方程中的未知函数的偏导数的最高阶数，称为方程的**阶**. 如果一个偏微分方程关于未知函数及其所有偏导数都是线性的，我们就称它为**线性偏微分方程**. 如果方程只是关于最高阶偏导数为线性的，则称之为**拟线性方程**；不是线性的方程，称为**非线性方程**.

在线性偏微分方程中，不含未知函数及其偏导数的非零项称为**非齐次项**，或简称为**非齐项**. 不含非齐次项的线性偏微分方程称为**齐次方程**，也称为**齐方程**，否则称为**非齐次方程**，或**非齐方程**.

在前面列举的那些例子中，方程(1.1)是二阶线性非齐次方程，方程(1.2)和(1.3)是二阶线性齐次方程，方程(1.4)是四阶线性非齐次方程，方程(1.5)是三阶拟线性方程，大范围几何中提出的 Monge-Ampere 方程

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = f(x_1, \cdots, x_n)$$

则是二阶非线性方程.

所谓一个 m 阶偏微方分程在某区域内的(古典)**解**，是指这样的函数，它具有直到 m 阶的一切偏导数，本身和这些偏导数都连续，将它及其偏导数替代方程中的未知函数及其相对应的偏导数后，这个方程对其全体自变量来说在该区域内成为一个恒等式.

一般来说，一个偏微分方程常常有许多解. 为了从一个偏微分方程的许许多多解中找出某一特定的解，就必须引进适当的附加条件，称为**定解条件**，一个偏微分方程和附加于它的定解条件合在一起，称为**定解问题**. 所渭定解问题的**解**，乃是相应的偏微分方程的解中之满足附加的定解条件者.

习　题

1. 对于下列各偏微分方程，试确定它是线性的，还是非线性的. 如果是线性的，说明它是齐次的还是非齐次的，并确定它的阶.

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}=y$;

(2) $u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2xy\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

(3) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u\dfrac{\partial u}{\partial y}=1$;

(4) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$;

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x$;

(6) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\lg u=0$.

2. 设 $f(v)$ 是一可微函数，证明函数 $u=f(xy)$ 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

3. 设 $f(x)$，$g(x)$二次可微，证明函数 $u=f(x)g(y)$满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

4. 验证函数

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}$$

在区域 $\Omega=\{(x,y,t)\mid(x-\xi)^2+(y-\eta)^2<a^2t^2\}$内满足薄模振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

式中 a 为非负数，ξ，η 为任意实数.

5. 证明函数 $u(x,y)=\frac{1}{6}x^3y^2+x^2+\cos y-\frac{y^2}{6}-1$ 是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y}=x^2y$$

之满足条件

$$u\big|_{y=0}=x^2,\qquad u\big|_{x=1}=\cos y$$

的解.

§2 热传导方程及其定解问题

2.1 热传导问题的提出

当一导热物体内各处的温度不一致时，热量就要从高温处向低温处传递，这种现象叫做“热传导”. 凡是要考虑温度变化影响的工程和物理问题，都需要研究有关的热传导过程. 例如修建大型混凝土坝，为了避免由于温度控制不当而产生裂缝，必须分析它的发热和散热过程，确定坝体内的温度分布和变化规律. 又如设计仪表的某些受热构件时，为了计算热的效应，

也要确定构件的温度分布和变化规律．一般地说，可以这样提出热传导问题．

设有一个导热物体，它在(x, y, z)空间内占据的区域为G，边界面为Γ，试确定它的内部各点(x, y, z)在任意时刻t的温度$u(x, y, z, t)$．

作为解决这个问题的第一步，这节我们来建立温度函数$u=u(M, t)$满足的方程，它就是通常说的**热传导方程**．

2.2 热传导方程

我们依据描述固体热传导的两个基本定律——热量守恒定律，Fourier 热传导定律——来建立热传导方程．

设想从物体G内任意割取一个由光滑闭曲面S所围成的区域D(图 1-1)．根据热量守恒定律，D内各点的温度由任一时刻t_1的$u(x, y, z, t_1)$改变为其后某一时刻t_2的温度$u(x, y, z, t_2)$所吸收(或放出)的热量，恰好等于从t_1到t_2这段时间内通过S进入(或流出)D内的热量和热源提供(或吸收)的热量的总和．

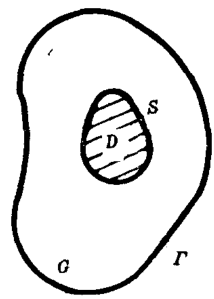

图 1-1

下面分别计算这些热量．

1) D内温度改变所需要的热量．

设物体G的比热(使单位质量的物体温度改变 1℃吸收或放出的热量)为$c=c(x, y, z)$，密度为$\rho=\rho(x, y, z)$，那么包含点(x, y, z)的体积微元$\mathrm{d}V$的温度从$u(x, y, z, t_1)$改变为$u(x, y, z, t_2)$所需要的热量是

$$c\rho[u(x, y, z, t_2)-u(x, y, z, t_1)]\mathrm{d}V$$