

● 欧维义 编

# 数学物理方程

● 理科数学

吉林大学出版社

理科数学

# 数学物理方程

欧维义

吉林大学出版社

理科数学  
数学物理方程  
欧维义

---

责任编辑：陈维钧

封面设计：张沐沉

吉林大学出版社出版  
(长春市东中华路 29 号)

吉林省新华书店发行  
长春大学印刷厂印刷

---

开本：850×1168 毫米 1/32

1991 年 12 月第 1 版

印张：11.375

1991 年 12 月第 1 次印刷

字数：283 千字

印数：1—1000 册

---

ISBN 7-5601-1061-4/O·120

定价：3.70 元

## 序

本书是和吉林大学出版社已出版的复变函数论、特殊函数及其应用两书配套的教材,它们一起组成《数学物理方法》课程的教学内容。

本书主要讲述求解数学物理问题的经典方法,包括行波法、分离变量法、积分变换法、Green 函数法和变分方法等。

本书注重物理和数学的渗透,注重运用物理、力学模型,以便把方法写得直观、形象。在内容结构上,做到层次清晰、结构严谨,以培养学生分析和解决实际问题的能力。

本书讲授时间约 54—60 学时。各专业还可根据需求和学时情况,组成若干个独立单元进行教学。

编者

1991 年 4 月于吉林大学

# 目 录

第一章 典型方程与典型定解问题	( 1 )
§ 1 偏微分方程举例和基本概念	( 1 )
1.1 偏微分方程举例	( 1 )
1.2 基本概念	( 2 )
习 题	( 3 )
§ 2 热传导方程及其定解问题	( 4 )
2.1 热传导问题的提出	( 4 )
2.2 热传导方程	( 5 )
2.3 热传导方程的定解条件	( 8 )
2.4 热传导方程的典型定解问题	( 10 )
2.5 低维热传导方程及其定解问题	( 12 )
习 题	( 13 )
§ 3 波动方程及其定解问题	( 14 )
3.1 波动方程的物理背景	( 14 )
3.2 弦的微小横振动方程	( 15 )
3.3 弦振动方程的定解条件	( 18 )
3.4 弦振动方程的典型定解问题	( 21 )
3.5 二维和三维波动问题	( 22 )
习 题	( 23 )
§ 4 位势方程及其定解问题	( 23 )
4.1 位势方程	( 23 )
4.2 典型定解问题	( 24 )
习 题	( 25 )
§ 5 衔接条件和方程的分类与标准型	( 26 )

5.1	衔接条件	(26)
5.2	二阶线性偏微分方程的分类与标准型	(28)
	习 题	(33)
§ 6	适定性概念和课程的基本内容	(34)
6.1	适定性概念	(34)
6.2	课程的基本内容	(35)
§ 7	叠加原理	(36)
7.1	方程型的叠加原理	(37)
7.2	定解问题型的叠加原理	(38)
	习 题	(39)
<b>第二章</b>	<b>行波法</b>	<b>(40)</b>
§ 1	Duhamel 原理	(40)
1.1	Duhamel 原理	(40)
1.2	Duhamel 原理的物理背景	(41)
	习 题	(42)
§ 2	一维波动问题	(43)
2.1	无界弦的自由振动	(43)
2.2	无界弦的强迫振动	(45)
	习 题	(46)
§ 3	空间波动方程	(47)
3.1	球面波方程	(47)
3.2	空间齐次波动问题	(49)
3.3	空间非齐次波动问题	(52)
3.4	二维波动问题	(54)
	习 题	(56)
§ 4	波动问题解的物理性质	(57)
4.1	d'Alembert 公式的物理意义	(57)
4.2	依赖区域、决定区域和影响区域	(59)
4.3	空间波传播的物理性质	(62)

4.4 二维波传播的物理性质 .....	(64)
<b>第三章 分离变量法</b> .....	(66)
§1 常微分方程的本征值问题 .....	(66)
1.1 第一齐边值条件的本征值问题 .....	(66)
1.2 第二齐边值条件的本征值问题 .....	(68)
习 题 .....	(69)
§2 弦振动方程的第一边值问题 .....	(70)
2.1 齐方程齐边值条件的情形 .....	(70)
2.2 非齐方程齐边值条件的情形 .....	(73)
2.3 非齐方程非齐边值条件的情形 .....	(77)
2.4 解的物理意义 .....	(78)
习 题 .....	(80)
§3 热传导方程的第二边值问题 .....	(82)
3.1 齐边值条件的情形 .....	(82)
3.2 非齐边值条件的情形 .....	(85)
习 题 .....	(86)
§4 位势方程的第一边值问题 .....	(87)
4.1 矩形域上的第一边值问题 .....	(87)
4.2 圆域上的第一边值问题 .....	(89)
习 题 .....	(93)
<b>第四章 积分变换法</b> .....	(95)
§1 积分变换的一般概念 .....	(95)
1.1 基本定义 .....	(95)
1.2 常见的积分变换 .....	(96)
1.3 积分变换的作用 .....	(98)
§2 Fourier 积分公式 .....	(98)
2.1 Fourier 积分公式的形式推导 .....	(98)
2.2 Fourier 积分公式成立的充分条件 .....	(101)
习 题 .....	(104)

§ 3	Fourier 变换	(105)
3.1	Fourier 变换的概念	(105)
3.2	Fourier 变换的基本性质	(106)
3.3	多重 Fourier 变换	(108)
	习 题	(109)
§ 4	Fourier 变换的应用	(111)
4.1	齐方程的初值问题	(111)
4.2	非齐方程的初值问题	(112)
4.3	半无界区间上的边值问题	(114)
	习 题	(117)
§ 5	Laplace 变换	(118)
5.1	Laplace 变换的形式推导	(118)
5.2	存在定理与反演公式	(120)
5.3	展开定理	(124)
	习 题	(135)
§ 6	Laplace 变换的基本性质及其应用	(135)
6.1	Laplace 变换的基本性质	(135)
6.2	热传导方程的初值问题	(144)
6.3	热传导方程的混合问题	(149)
	习 题	(151)
<b>第五章</b>	<b>Green 函数法</b>	<b>(153)</b>
§ 1	$\delta$ -函数	(153)
1.1	$\delta$ -函数的定义	(153)
1.2	$\delta$ -函数的物理意义	(154)
1.3	$\delta$ -函数作为普通函数的弱极限	(155)
1.4	弱相等概念和 $\delta$ -函数的性质	(159)
1.5	高维 $\delta$ -函数	(163)
	习 题	(163)
§ 2	解初值问题的 Green 函数法	(164)



2.1	基本思想	(164)
2.2	解一维初值问题的 Green 函数法	(166)
2.3	解三维初值问题的 Green 函数法	(169)
	习 题	(173)
§ 3	解混合问题的 Green 函数法	(174)
3.1	Green 函数的概念及其表达式	(174)
3.2	Green 函数法	(175)
	习 题	(175)
§ 4	解 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数法	
	.....	(176)
4.1	Green 第一公式和第二公式	(176)
4.2	点源场	(177)
4.3	Green 函数及其物理意义	(178)
4.4	Green 函数法	(180)
4.5	求 Green 函数的静电源象法	(184)
4.6	Green 函数的对称性	(189)
	习 题	(192)
<b>第六章</b>	<b>变分原理与变分方法</b>	(196)
§ 1	单积分型泛函的变分问题	(197)
1.1	模型问题	(197)
1.2	变分问题的确切提法	(198)
1.3	变分原理——Euler 方程	(201)
1.4	泛函的变分	(206)
1.5	二阶变分和极值函数的充分条件	(207)
1.6	多个函数的变分问题	(209)
	习 题	(212)
§ 2	重积分型泛函的变分问题	(213)
2.1	极小曲面问题	(213)
2.2	变分问题及其原理	(214)

2.3 $J(u)$ 的一阶变分	(218)
习 题	(219)
§ 3 条件极值	(220)
3.1 等周问题	(220)
3.2 一般变分问题	(220)
3.3 等周问题的解	(223)
习 题	(225)
§ 4 自然边值条件	(227)
4.1 变动端点问题的自然边值条件	(227)
4.2 变动边值问题的自然边值条件	(229)
4.3 更一般的泛函的自然边值条件	(231)
习 题	(234)
§ 5 变分法与数学物理定解问题	(234)
5.1 极值原理	(234)
5.2 膜的微小横振动方程	(235)
习 题	(237)
§ 6 边值问题与变分问题	(237)
6.1 变分方法大意	(237)
6.2 常微边值问题对应的变分问题	(238)
6.3 Poisson 方程对应的变分问题	(241)
§ 7 解变分问题的直接方法	(242)
7.1 一个常微分方程边值问题解的存在与唯一性	(242)
7.2 直接方法的基本思想	(244)
7.3 作极小函数列的 Ritz 方法	(244)
7.4 解变分问题的 Ritz 方法	(252)
7.5 解变分问题的 Galerkin 方法	(254)
习 题	(256)
§ 8 解本征值问题的变分方法	(259)

8.1 本征值和本征函数的一些性质 .....	(259)
8.2 本征值问题与变分问题 .....	(261)
8.3 本征值和本征函数的求法举例 .....	(263)
<b>第七章 定解问题的唯一性与稳定性</b> .....	(267)
§ 1 弦振动方程混合问题解的唯一性 .....	(267)
1.1 能量守恒原理 .....	(267)
1.2 唯一性定理 .....	(269)
习 题 .....	(271)
§ 2 位势方程边值问题的适定性 .....	(273)
2.1 调和函数的积分表达式 .....	(273)
2.2 极值原理 .....	(276)
2.3 唯一性与稳定性定理 .....	(279)
2.4 可微性定理 .....	(281)
习 题 .....	(282)
§ 3 热传导方程混合问题解的唯一性与稳定性 .....	(283)
3.1 极值原理 .....	(283)
3.2 唯一性与稳定性 .....	(285)
习 题 .....	(287)
§ 4 不适定问题的例子 .....	(287)
4.1 Laplace 方程的不适定例子 .....	(287)
4.2 弦振动方程的不适定例子 .....	(288)
§ 5 广义解 .....	(289)
5.1 解的概念应当推广 .....	(289)
5.2 广义解的概念 .....	(291)
5.3 广义解的进一步讨论 .....	(294)
5.4 广义解的求法 .....	(296)
<b>第八章 附录</b> .....	(301)
§ 1 Fourier 级数的逐项微商定理 .....	(301)
1.1 展开定理及其推论 .....	(301)

1.2 基本引理 .....	(302)
1.3 逐项微商定理 .....	(307)
§ 2 形式解为真解的条件 .....	(308)
2.1 第三章的定解问题(2.1)—(2.3) .....	(308)
2.2 第三章的定解问题(4.11)—(4.12) .....	(309)
§ 3 一个函数系的完全性证明 .....	(311)
§ 4 积分变换表 .....	(313)
提示和答案 .....	(317)

# 第一章 典型方程与典型定解问题

数学物理方程的主要研究对象，是来自各种数学物理问题的偏微分方程。本章我们将从一些简单的物理、力学问题出发，引出本课程讨论的三种典型方程，以及关于它们的一些典型定解问题。

学习这一章，应该搞清楚每个方程及其定解问题的实际背景，知道每个数学符号的物理意义；明确推导偏微分方程的定解问题，就是从数量形式上去刻划由相应的物理定律所确定的某些物理量之间的制约关系。

## § 1 偏微分方程举例和基本概念

### 1.1 偏微分方程举例

所谓偏微分方程，是指含有未知的多元函数及其某些偏导数的关系式。例如，导热物体的温度函数  $u = u(x, y, z, t)$  满足的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

描写定常过程的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

弦振动时其位移函数  $u = u(x, t)$  满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

梁的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(x, t) \quad (1.4)$$

出现于水波研究中的 KdV (Korteweg de Vries) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (1.5)$$

等等都是偏微分方程.

就一个  $n (\geq 2)$  元函数  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  而言, 关于它的偏微分方程的一般形式是

$$F(x_1, \dots, x_n, u, Du, D^2u, \dots, D^m u) = 0 \quad (1.6)$$

其中  $F$  是其变元的已知函数.

$$Du = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

$$D^k u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

$k_1, k_2, \dots, k_n$  均为非负整数,  $\sum_{i=1}^n k_i = k, k = 1, 2, \dots, m.$

## 1.2 基本概念

包含在偏微分方程中的未知函数的偏导数的最高阶数, 称为方程的阶. 如果一个偏微分方程关于未知函数及其所有偏导数都是线性的, 我们就称它为**线性偏微分方程**. 如果方程只是关于最高阶偏导数为线性的, 则称之为**拟线性方程**; 不是线性的方程, 称为**非线性方程**.

在线性偏微分方程中, 不含未知函数及其偏导数的非零项称为**非齐次项**, 或简称为**非齐项**. 不含非齐次项的线性偏微分方程称为**齐次方程**, 也称为**齐方程**, 否则称为**非齐次方程**, 或**非齐方程**.

在前面列举的那些例子中, 方程(1.1)是二阶线性非齐次方程, 方程(1.2)和(1.3)是二阶线性齐次方程, 方程(1.4)是四阶线性非齐次方程, 方程(1.5)是三阶拟线性方程, 大范围几何中提出的 Monge-Ampere 方程

$$\det \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) = f(x_1, \dots, x_n)$$

则是二阶非线性方程。

所谓一个  $m$  阶偏微分方程在某区域内的(古典)解,是指这样的函数,它具有直到  $m$  阶的一切偏导数,本身和这些偏导数都连续,将它及其偏导数替代方程中的未知函数及其相对应的偏导数后,这个方程对其全体自变量来说在该区域内成为一个恒等式。

一般来说,一个偏微分方程常常有许多解.为了从一个偏微分方程的许许多多解中找出某一特定的解,就必须引进适当的附加条件,称为定解条件,一个偏微分方程和附加于它的定解条件合在一起,称为定解问题.所谓定解问题的解,乃是相应的偏微分方程的解中之满足附加的定解条件者。

## 习 题

1. 对于下列各偏微分方程,试确定它是线性的,还是非线性的.如果是线性的,说明它是齐次的还是非齐次的,并确定它的阶。

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y} = y;$$

$$(2) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} - 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$(3) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial u}{\partial y} = 1;$$

$$(4) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0;$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x;$$

$$(6) \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \lg u = 0.$$

2. 设  $f(v)$  是一可微函数,证明函数  $u = f(xy)$  满足方程

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

3. 设  $f(x)$ ,  $g(y)$  二次可微, 证明函数  $u=f(x)g(y)$  满足方程

$$u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

4. 验证函数

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}$$

在区域  $\Omega = \{(x, y, t) | (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < a^2 t^2\}$  内满足薄模振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

式中  $a$  为非负数,  $\xi, \eta$  为任意实数.

5. 证明函数  $u(x, y) = \frac{1}{6} x^3 y^2 + x^2 + \cos y - \frac{y^2}{6} - 1$  是方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = x^2 y$$

之满足条件

$$u|_{y=0} = x^2, \quad u|_{x=1} = \cos y$$

的解.

## § 2 热传导方程及其定解问题

### 2.1 热传导问题的提出

当一导热物体内部各处的温度不一致时, 热量就要从高温处向低温处传递, 这种现象叫做“热传导”. 凡是要考虑温度变化影响的工程和物理问题, 都需要研究有关的热传导过程. 例如修建大型混凝土坝, 为了避免由于温度控制不当而产生裂缝, 必须分析它的发热和散热过程, 确定坝体内的温度分布和变化规律. 又如设计仪表的某些受热构件时, 为了计算热的效应,



也要确定构件的温度分布和变化规律。一般地说，可以这样提出热传导问题。

设有一个导热物体，它在 $(x, y, z)$ 空间内占据的区域为 $G$ ，边界面为 $\Gamma$ ，试确定它的内部各点 $(x, y, z)$ 在任意时刻 $t$ 的温度 $u(x, y, z, t)$ 。

作为解决这个问题的第一步，这节我们来建立温度函数 $u=u(M, t)$ 满足的方程，它就是通常说的热传导方程。

## 2.2 热传导方程

我们依据描述固体热传导的两个基本定律——热量守恒定律，Fourier热传导定律——来建立热传导方程。

设想从物体 $G$ 内任意割取一个由光滑闭曲面 $S$ 所围成的区域 $D$ (图1-1)。根据热量守恒定律， $D$ 内各点的温度由任一时刻 $t_1$ 的 $u(x, y, z, t_1)$ 改变为其后某一时刻 $t_2$ 的温度 $u(x, y, z, t_2)$ 所吸收(或放出)的热量，恰好等于从 $t_1$ 到 $t_2$ 这段时间内通过 $S$ 进入(或流出) $D$ 内的热量和热源提供(或吸收)的热量的总和。

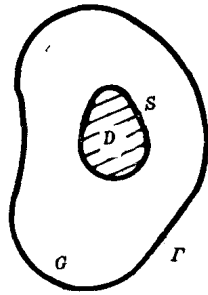


图 1-1

下面分别计算这些热量。

### 1) $D$ 内温度改变所需要的热量。

设物体 $G$ 的比热(使单位质量的物体温度改变 $1^\circ\text{C}$ 吸收或放出的热量)为 $c=c(x, y, z)$ ，密度为 $\rho=\rho(x, y, z)$ ，那么包含点 $(x, y, z)$ 的体积微元 $dV$ 的温度从 $u(x, y, z, t_1)$ 改变为 $u(x, y, z, t_2)$ 所需要的热量是

$$c\rho[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]dV$$