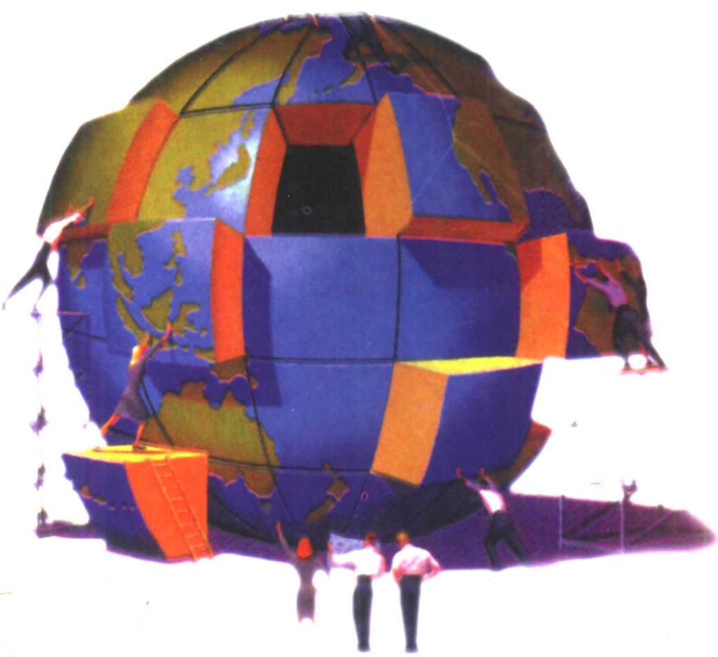
高等工程专科学校教材

工程力学

下册



沈养中 主 编
石 静 副主编

机械工业出版社

高等工程专科学校教材

工　程　力　学

下　册

沈养中　主　编
石　静　副主编
范黎光　主　审

机　械　工　业　出　版　社

本书是在参照高等工程专科学校力学教学基本要求和总结各参编学校力学教学改革经验的基础上组织编写的。

全书内容包括点的运动，刚体的基本运动，点的合成运动，刚体的平面运动，动力学基本方程、动量定理、动量矩定理，动能定理，达朗伯原理，动载荷及疲劳强度。每章后均有习题，全书后附有习题答案。

本书与上册一起为高等工程专科学校理论力学、材料力学和工程力学等课程的教学用书，也可供有关工程技术人员参考。

工 程 力 学

下 册

沈养中 主编

*

责任编辑：王世刚 冯 铁 版式设计：霍永明

封面设计：海之帆 责任校对：韩 晶

责任印制：何全君

*

机械工业出版社出版（北京市百万庄大街22号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

北京交通印务实业公司印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 8.25·字数 200 千字

1999 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

印数：0 001－3 000 定价：13.00 元

*

ISBN 7-111-06849-1/TB·270（课）

前　言

本书是在参照1996年国家教育委员会组织制定的高等工程专科学校力学教学基本要求和总结各参编学校力学教学改革经验的基础上组织编写的。本书与上册一起可作为高等工程专科学校理论力学、材料力学和工程力学等课程的教学用书。

本书力求贯彻“以应用为目的”、“以必需、够用为度”和“掌握概念、强化应用”的原则，以提高读者分析问题和解决问题的能力为宗旨，对课程内容进行了精心选取和编排，体现了高等工程专科力学教学的应有特色。

参加本书编写的有河北工程技术高等专科学校沈养中（第五、六、七章），石静（第八、九章），承德石油高等专科学校蔡广新（第一、二章），赵国军（第三、四章）。全书由沈养中任主编，石静任副主编，由沈养中进行统稿。承德石油高等专科学校范黎光担任主审。

限于编者水平，书中难免有不足或错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

1998年8月

目　录

第一章　点的运动

运动学的任务是研究物体在空间的位置随时间变化的规律，而不涉及运动产生的原因。

物体的运动都是相对的。物体在空间的位置和描述物体的运动必须相对于某给定的物体来确定。这个给定的物体称为参考体。固连在参考体上的坐标系称为参考系。在不同的参考系上观察同一物体的运动，其结果是不相同的，所以运动具有相对性。在研究大多数工程实际问题时，总是将固连于地球上的坐标系作为参考系，称为静参考系或定参考系。

描述物体在空间的位置和运动时，常用到瞬时和时间间隔两个概念。瞬时是指物体运动经过某一位置所对应的时刻，用 t 表示；时间间隔是两瞬时之间的一段时间，记为 $\Delta t = t_2 - t_1$。

本章讨论点的运动，是以矢径法作为点的运动分析的理论基础，用直角坐标法与自然法来建立起它的工程应用形式。

第一节　用矢径法表示点的位置、速度和加速度

一、点的运动方程

设动点在空间作曲线运动，任取一点 O 作为参考点，在某瞬时 t 动点所处的位置 M 可由点 O 至 M 的矢量 $\overline{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{r}$ 唯一确定（图 1-1）。矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为动点 M 的矢径。动点运动时，矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小、方向随时间 t 而改变，故矢径 $\boldsymbol{r}$ 可写成时间 t 的单值连续函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1-1}$$

方程（1-1）称为动点 M 的矢径形式的运动方程，其矢端曲线即称为动点的运动轨迹。

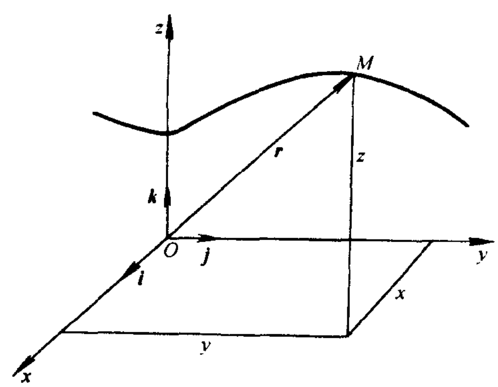


图 1-1

二、点的速度

速度是表示动点运动快慢和方向的物理量。设瞬时 t 动点在 M 处，其矢径为 $\boldsymbol{r}(t)$，经过 Δt 时间后，动点运动到 M' 处，其矢径为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$（图 1-2）。动点在 Δt 时间内的位移为

$$\overline{\boldsymbol{MM'}} = \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

由此可得动点在 Δt 时间内的平均速度

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\overline{\boldsymbol{MM'}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

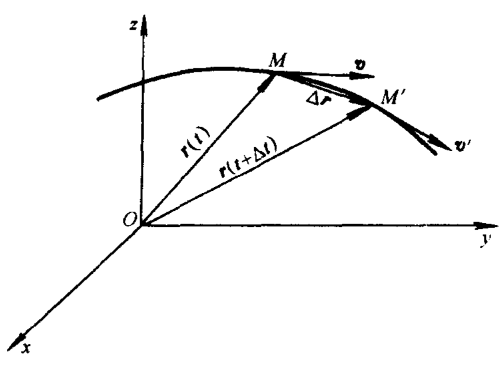


图 1-2

当 Δt 趋于零时，可得动点在瞬时 t 的瞬时速

度（简称速度）

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

即动点的速度等于动点的矢径对时间的一阶导数。

动点的速度是矢量，动点速度的方向为其轨迹曲线在 M 点的切线方向并指向运动的一方。速度的单位为 m/s，有时也用 km/h。

三、点的加速度

动点沿曲线运动，其速度的大小和方向都可能随时间而改变。加速度是表达动点的运动速度对时间变化率的物理量。

设在某瞬时 t，动点位于 M，其速度为 $\boldsymbol{v}$。在瞬时 $t+\Delta t$，动点位于 M'，此时，其速度变为 $\boldsymbol{v}'$（图 1－3）。在时间间隔 Δt 内速度的改变量为

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$$

$\Delta \boldsymbol{v}$ 与相应的时间间隔 Δt 的比值，即速度对时间的平均变化率，称为动点在时间 Δt 内的平均加速度，记为 $\boldsymbol{a}^*$，即

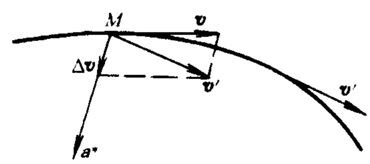


图 1－3

$$\boldsymbol{a}^*=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

平均加速度亦是矢量，其方向与 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的方向一致（图 1－3）。

当 Δt 趋近于零时，点 M' 趋近于 M，而平均加速度 $\boldsymbol{a}^*$ 趋近于一个极限。此极限称为动点在瞬时 t 的加速度，记为 $\boldsymbol{a}$，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-3}$$

因此，动点的加速度等于其速度对时间的一阶导数，或等于其矢径对时间的二阶导数。

加速度的单位是 $\mathrm{m/s^2}$。

第二节　用直角坐标法确定点的位置、速度和加速度

当点的运动轨迹未知时，常用直角坐标法描述点的运动，即根据投影原理，通过动点的位置、速度、加速度矢量在直角坐标轴上的投影，将其矢量形式变为代数量形式。这种方法便于运算，在工程实际中得到了广泛的应用。

一、点的直角坐标运动方程

由矢径法可知，动点 M 的位置可由其矢径 $\boldsymbol{r}$ 确定。若在原点 O 建立一个直角坐标 $Oxyz$，如图 1－1 所示，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x、y、z 三个坐标轴正向的单位矢量，则矢径 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

x、y、z 为 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴上的投影，它们也可视为 M 点的三个位置坐标。

当点运动时，坐标 x、y、z 都是时间 t 的单值连续函数，即

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\ (t) \\ y &= f_2\ (t) \\ z &= f_3\ (t) \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

方程（1－5）称为动点 M 的直角坐标运动方程。从方程（1－5）中消去时间 t，可得到动点 M 的轨迹方程。

例 1－1 在图 1－4 所示的椭圆规机构中，已知连杆 AB 长为 l，连杆两端分别与滑块铰接，滑块可在两互相垂直的导轨内滑动，角 $\alpha=\omega t$，$AM=\dfrac{2}{3}l$。求连杆上 M 点的运动方程和轨迹方程。

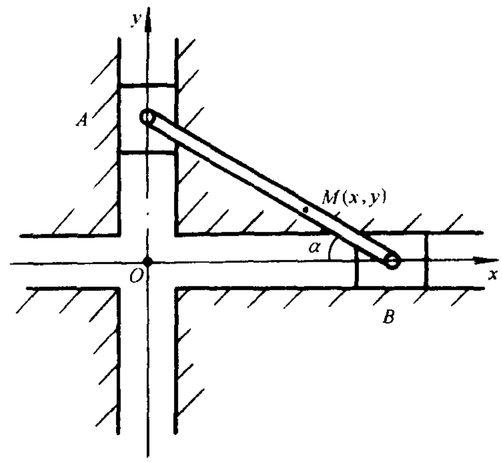


图 1－4

解 以垂直导轨的交点为原点，作直角坐标系 Oxy 如图 1－4 所示。设 M 点的坐标为 x、y。由图可得

$$x=\frac{2}{3}l\cos\alpha$$

$$y=\frac{1}{3}l\sin\alpha$$

将 $\alpha=\omega t$ 代入上式，得点 M 的运动方程为

$$x=\frac{2}{3}l\cos\omega t$$

$$y=\frac{1}{3}l\sin\omega t$$

从运动方程中消去时间 t，得点 M 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{4}+y^2=\frac{l^2}{9}$$

上式表明，点 M 的运动轨迹为一椭圆。

二、点的速度和加速度在直角坐标轴上的投影

将式（1－4）代入式（1－2），由于 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为方向不变的单位矢量，得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ (x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\ =\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-6}$$

而速度在坐标轴上投影的表示式可写成

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-7}$$

比较上述两式，得

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{1-8}$$

式（1－8）表明，动点的速度在各坐标轴上的投影，分别等于对应的位置坐标对时间的一阶

导数。速度的大小及方向余弦为

$$
\left.\begin{aligned}
v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}) &= \frac{v_x}{v},\ \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v},\ \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k}) = \frac{v_z}{v}
\end{aligned}\right\} \tag{1-9}
$$

将式（1－7）两边对时间 t 求一阶导数，并利用式（1－8），可得加速度矢量为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

式中，

$$
\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\
a_y &= \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \\
a_z &= \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1-10}
$$

式（1－10）表明，动点的加速度在各坐标轴上的投影，分别等于对应的速度投影对时间的一阶导数，或等于对应的位置坐标对时间的二阶导数。

加速度的大小及方向余弦为

$$
\left.\begin{aligned}
a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} \\
\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}) &= \frac{a_x}{a},\ \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a},\ \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}) = \frac{a_z}{a}
\end{aligned}\right\} \tag{1-11}
$$

例 1－2 跨过起重架上滑轮 C 的绳子，一端挂有重物 B，另一端 A 被拖着沿水平方向匀速运动，速度为 $v_0 = 1\mathrm{m/s}$，而 A 点到地面的距离 $h = 1\mathrm{m}$，滑轮离地面的高度 $H = 9\mathrm{m}$，滑轮半径及重物尺寸略去不计。运动开始时，重物在地面上 B_0 处，绳子 A 端在 A_0 处。求重物 B 上升的运动方程、速度和加速度方程以及重物上升到架顶所需的时间。

解 以地面 B_0 处为坐标系原点 O，作 x 轴铅垂向上，如图 1－5 所示。设在瞬时 t 重物 B 的坐标为 x，因绳长保持不变，故绳绕过轮 C 拉过的长度等于重物 B 上升的高度

$$x = BB_0 = CA - CA_0 \tag{a}$$

在 $\triangle A_0AC$ 中，$AA_0 = v_0 t$，$CA_0 = H - h = 8\mathrm{m}$，故

$$CA = \sqrt{(CA_0)^2 + (AA_0)^2} = \sqrt{8^2 + t^2}$$

代入式（a），可得 B 重物上升的运动方程为

$$x = \sqrt{64 + t^2} - 8$$

则重物 B 的速度方程为

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{\sqrt{64 + t^2}}$$

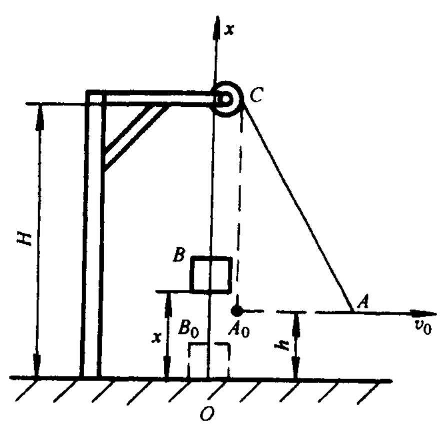


图 1－5

重物 B 的加速度方程为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{64}{\sqrt{(64+t^2)^3}}$$

当重物 B 升到架顶时，$x=H=9\mathrm{m}$，代入运动方程可解得所需时间 $t=15\mathrm{s}$。

第三节　用自然法确定点的位置、速度和加速度

一、用自然法建立点的运动方程

当点的运动轨迹已知时，常以弧坐标来确定点的位置、描述点的运动，这种方法称为自然法。

设动点 M 沿图 1－6 所示的已知轨迹运动。在点的轨迹上，任取一点 O' 为原点，将其两侧分别规定为正、负方向，点 O' 到动点 M 的弧长为 $\overset{\frown}{O'M}=s$，这个带正、负号的弧长 s 便确定了动点在轨迹上的位置。s 为代数量，称为点 M 的弧坐标。

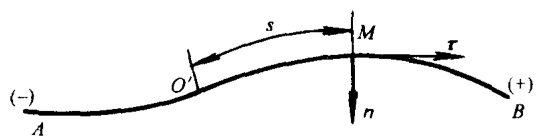


图　1－6

当点 M 沿已知轨迹运动时，弧坐标 s 是时间 t 的单值连续函数，记为

$$s=f(t) \tag{1-12}$$

该式称为以自然法表示的点的运动方程。

二、自然轴系

如图 1－6 所示，动点 M 沿已知轨迹 AB 运动。自然轴系不是固定的坐标系，它随着动点在轨迹曲线上的位置而改变。这个坐标系是以动点 M 为坐标原点，以轨迹上过 M 点的切线和法线为坐标轴，并规定切线坐标轴（简称切向轴）以指向弧坐标正的方向为其正向，法线坐标轴（简称法向轴）以指向曲线内凹的方向即指向曲率中心的一方为其法向轴的正向。此正交坐标系称为自然坐标轴系，简称自然轴系。切向轴和法向轴的单位矢量分别用 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示，其大小为 1，但方向随动点 M 在轨迹上的位置变化而变化，故为变矢量。

顺便指出，当动点 M 的轨迹为空间曲线时，自然轴系还有一个副法线轴，单位矢量用 $\boldsymbol{b}$ 表示，其方向按右手法则由 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$ 决定。

三、用自然法确定点的速度

如图 1－7 所示，在瞬时 t，动点 M 的矢径为 $\boldsymbol{r}(t)$，经时间间隔 Δt，动点 M 沿已知轨迹运动至 M' 处，其矢径为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$。矢径的增量称为位移，点 M 的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与弧坐标增量 Δs 相对应。

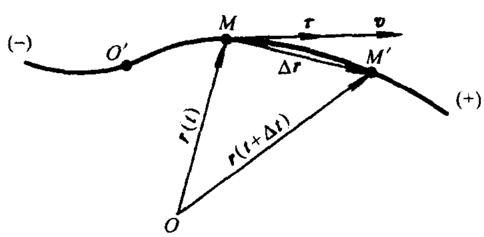


图　1－7

由式（1－2）知，点的速度 $\boldsymbol{v}=\lim\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$。将分子、分母同时乘以 Δs，可得

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta s}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}$ 的大小趋于 1，方向趋近于轨迹的切向，并指向弧坐标的正向，故 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} = \boldsymbol{\tau}$，而 $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$，故

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau} \tag{1-13}$$

式（1-13）表明，点的速度的方向沿轨迹的切线方向，大小等于点的弧坐标对时间的一阶导数，即

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1-14}$$

当 $\frac{ds}{dt} > 0$ 时，s 随 t 而增加，速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 同向；当 $\frac{ds}{dt} < 0$ 时，s 随 t 而减小，速度 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 反向。

四、用自然法确定点的加速度

将点的速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$ 代入式（1-3），得

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau}) = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \tag{1-15}$$

下面分别讨论式（1-15）等号右边的两项。

（1）切向加速度

式（1-15）等号右边的第一项 $\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$ 的方向沿轨迹的切线方向，故加速度的这一个分量称为切向加速度，用 $a_\tau \boldsymbol{\tau}$ 表示，其中

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \tag{1-16}$$

当 $\frac{dv}{dt} > 0$ 时，v 的代数值随时间而增加，此时 $\boldsymbol{a}_\tau$ 的方向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相同，反之，当 $\frac{dv}{dt} < 0$ 时，$\boldsymbol{a}_\tau$ 的方向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相反，可见，切向加速度反映了速度大小的瞬时变化率。

（2）法向加速度

现在分析式（1-15）等号右边的第二项 $v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$。如图 1-8 所示，在瞬时 t，动点 M 上的自然轴系的单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}$ 和 $\boldsymbol{n}$。经过时间间隔 Δt，自然轴系随动点 M 移至 M'。此时的切向单位矢量为 $\boldsymbol{\tau}'$，其增量 $\Delta\boldsymbol{\tau}$ 为等腰三角形 $\triangle MAB$ 中的 $\overline{AB}$。由图 1-8 中的几何关系可知

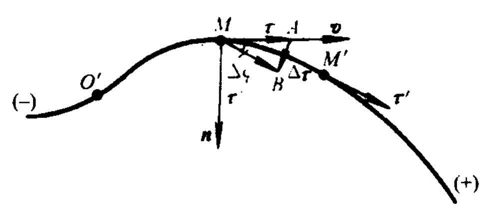


图 1-8

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}| = |\overline{AB}| = 2 \times |\boldsymbol{\tau}| \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \approx 2 \times 1 \times \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \Delta\varphi$$

因此

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \times \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \times \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

式中，$\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$；由微分知识可知，$\lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$（$\rho$ 为曲线在 M 点的曲率半径）。于是得到

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right| = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{\Delta t} = \frac{v}{\rho}$$

由图 1-8 可知，当 $\Delta t \to 0$ 时，$\Delta\varphi \to 0$，$\angle MAB$ 趋于$\frac{\pi}{2}$。因此，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 或$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$的极限方向与 $\boldsymbol{\tau}$ 垂直，且指向曲线在 M 点的曲率中心，即自然轴系法向轴单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向。

综上所述，式（1-15）等号右边的第二项 $v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}$的大小为$\frac{v^2}{\rho}$，方向为 $\boldsymbol{n}$ 的指向。加速度的这一个分量称为法向加速度，用 $a_n\boldsymbol{n}$ 表示，其中

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{1-17}$$

即法向加速度的大小 a_n 等于速度大小 v 的平方与轨迹曲率半径 ρ 之比。法向加速度越大，速度方向变化得越快；反之，速度方向变化得越慢。当点作直线运动时，点的法向加速度恒为零，点的速度方向将保持不变。

在自然表示法中，我们常称点的加速度为全加速度。根据以上的分析，全加速度 $\boldsymbol{a}$ 可写为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_n\boldsymbol{n} \tag{1-18}$$

全加速度的大小和方向可由下式求出

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \\ \tan\beta &= \frac{|a_\tau|}{a_n} \end{aligned}\right\} \tag{1-19}$$

式（1-19）中，β 为全加速度 $\boldsymbol{a}$ 与法向轴正向 $\boldsymbol{n}$ 所夹锐角，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 的哪一侧，由 a_τ 的正负号决定，如图 1-9 所示。

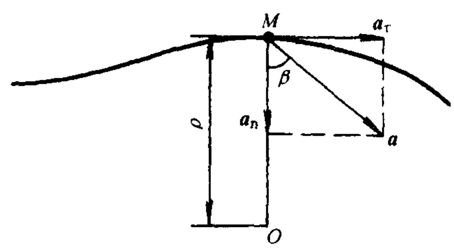


图 1-9

五、点的运动的几种特殊情况

1. 直线运动

当点作直线运动时，由于 $\rho \to \infty$，故 $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$，所以，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$。

2. 匀速曲线运动

当点作匀速曲线运动时，由于 v 为常量，故 $a_\tau = 0$，但 $a_n \neq 0$，此时 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n$。

3. 匀变速曲线运动

当点作匀变速曲线运动时，$a_\tau = \frac{dv}{dt} =$ 常数，$a_n = \frac{v^2}{\rho}$，加速度既有切向分量又有法向分量。若已知运动的初始条件：当 $t = 0$ 时，$v = v_0$、$s = s_0$，则将 $dv = a_\tau dt$、$ds = vdt$ 积分，可得

$$v = v_0 + a_\tau t \tag{1-20}$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_\tau t^2 \tag{1-21}$$

由以上两式消去 t，得

$$v^2 = v_0^2 + 2a_\tau (s - s_0) \tag{1-22}$$

式（1－20）至式（1－22）是匀变速曲线运动的三个常用公式。

例 1－3 图 1－10 为一曲柄摆杆机构，曲柄端点铰接一套管，套管套在摆杆 O_1M 上。当曲柄转动时，通过套管带动摆杆绕 O_1 轴摆动。已知曲柄长 $OA=10\text{cm}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}t^2$，φ 的单位为 rad，t 的单位为 s，摆杆长 $O_1M=24\text{cm}$，距离 $O_1O=10\text{cm}$，求 M 点的运动方程和 $t=1\text{s}$ 时的位置、速度和加速度。

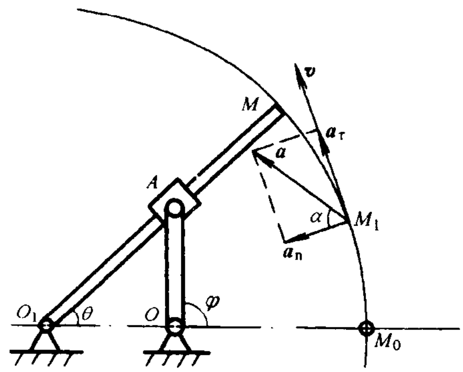


图 1－10

解 M 点的轨迹是以 O_1M 为半径的圆弧，$t=0$ 时，$\varphi=0$，动点在 M_0 位置。取 M_0 为弧坐标原点，并规定逆时针为正，则 M 点的弧坐标为

$$s = \overset{\frown}{M_0M} = O_1M\theta$$

因 $O_1O=OA$，$\triangle O_1OA$ 为等腰三角形，故 $\varphi=2\theta$，于是

$$s = O_1M\frac{\varphi}{2} = 24\text{cm}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}t^2 = 3\pi t^2\text{cm}$$

这就是以弧坐标表示的运动方程。根据式（1－14）、式（1－16）和式（1－17），求得

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6\pi t \quad \text{cm/s}$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6\pi \quad \text{cm/s}^2$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(6\pi t)^2}{24} = \frac{3}{2}\pi^2 t^2 \quad \text{cm/s}^2$$

当 $t=1\text{s}$ 时

$s=3\pi$ cm。又因 $s=O_1M\theta$，所以 $\theta=\frac{\pi}{8}=22.5°$，$s=9.4\text{cm}$ 处的 M_1 点，就是 $t=1\text{s}$ 时动点的位置。

$$v = 6\pi\ \text{cm/s} = 18.8 \quad \text{cm/s}$$
$$a_\tau = 6\pi\ \text{cm/s}^2 = 18.8 \quad \text{cm/s}^2$$
$$a_n = \frac{3}{2}\pi^2\text{cm/s}^2 = 14.8 \quad \text{cm/s}^2$$
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 23.9 \quad \text{cm/s}^2$$
$$\tan\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = 1.27,\ \alpha = 51.8°$$

例 1－4 列车沿圆弧轨道作匀减速运动，初速度 $v_0=54\text{km/h}$，经过 800m 后，车速降为 $v=18\text{km/h}$。如圆弧的半径 $R=1000\text{m}$，求列车经过这段路程所需的时间及通过起点和末点时的加速度。

解 将列车视为动点，设列车前进的方向为弧坐标的正向，取起点 O 为弧坐标的原点，如图 1－11 所示。当 $t=0$ 时，$s_o=0$。

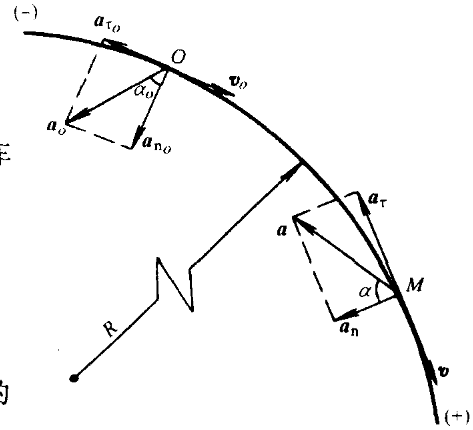


图 1-11

将初速度 $v_o=\left(\dfrac{54\times1000}{60\times60}\right)\text{m/s}=15\text{m/s}$

末速度 $v=\left(\dfrac{18\times1000}{60\times60}\right)\text{m/s}=5\text{m/s}$

以及路程 $s-s_o=800\text{m}$ 代入式（1-22），得列车的切向加速度为

$$a_\tau=\frac{v^2-v_o^2}{2\ (s-s_o)}=\left(\frac{5^2-15^2}{2\times800}\right)\text{m/s}^2=-\frac{1}{8}\text{m/s}^2=-0.125\text{m/s}^2$$

再由式（1-20），可求得列车经过这段路程所需的时间为

$$t=\frac{v-v_o}{a_\tau}=\left(\frac{5-15}{-0.125}\right)\text{s}=80\text{s}$$

列车在起点和末点时的法向加速度分别为

$$a_{n_o}=\frac{v_o^2}{R}=\left(\frac{15^2}{1000}\right)\text{m/s}^2=0.225\text{m/s}^2$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\left(\frac{5^2}{1000}\right)\text{m/s}^2=0.025\text{m/s}^2$$

于是，列车在起点时的全加速度为

$$a_o=\sqrt{a_\tau^2+a_{n_o}^2}=\sqrt{[\ (-0.125)^2+\ (0.225)^2]}\text{m/s}^2=0.257\text{m/s}^2$$

a_o 与法线正向间的夹角为

$$\alpha_o=\arctan\frac{|a_\tau|}{a_{n_o}}=\arctan\frac{0.125}{0.225}=29.05°$$

列车在末点时的全加速度为

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\sqrt{[\ (-0.125)^2+\ (0.025)^2]}\text{m/s}^2=0.127\text{m/s}^2$$

a 与法线正向间的夹角为

$$\alpha=\arctan\frac{|a_\tau|}{a_n}=\left(\arctan\frac{0.125}{0.025}\right)°=78.69°$$

习　　题

1-1　已知点的运动方程，求其轨迹方程。

(1) $x=2t^2+4$　　(2) $x=4t-2t^2$

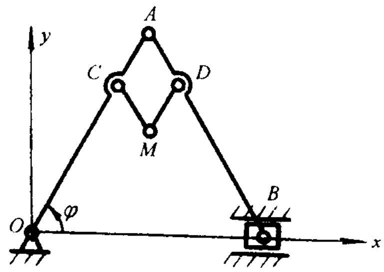
$y=3t^2-3$　　$y=3t-1.5t^2$

(3) $x=t^2$　　(4) $x=5\cos\dfrac{\pi}{4}t$

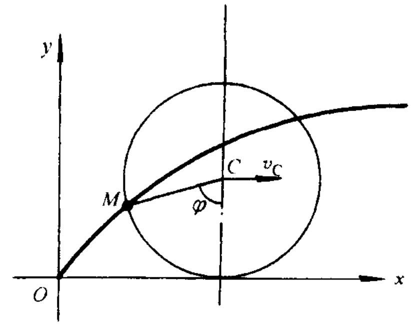
$y=2t$　　$y=4\sin\dfrac{\pi}{4}t$

1-2　如题1-2图所示曲线规，当 OA 杆绕 O 点转动时，M 点即画出一曲线。已知 $OA=AB=l$，$CM=DM=AC=AD=a$，试求当角度 $\varphi=\omega t$ 时，M 点的运动方程和轨迹方程。

1-3　如题1-3图所示，半径为 r 的车轮在直线轨道上滚动而不滑动。已知轮心的速度 v_C 是常量，求轮缘上一点 M 的轨迹、速度和加速度。



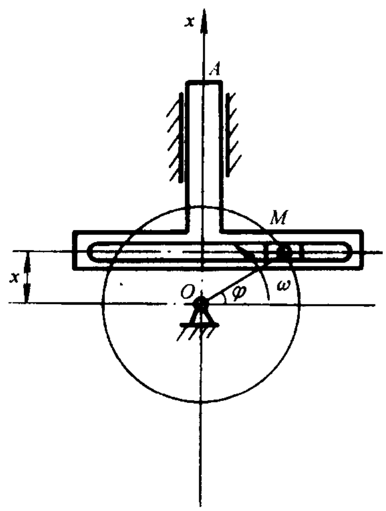
题 1-2图



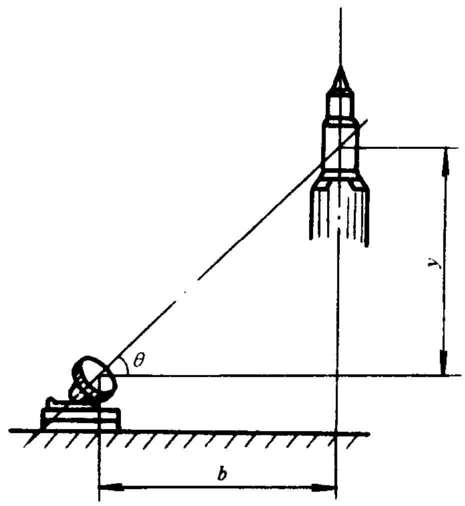
题 1-3图

1-4 曲柄导杆机构如题1-4图所示，曲柄 OM 长为 l，从 O 点右侧水平位置开始，以匀角速度 ω 转动，即 $\varphi=\omega t$。曲柄通过滑块 M 带动导杆上下运动。试求导杆上 A 点的运动方程、速度和加速度。

1-5 如题1-5图所示，雷达在距离火箭发射台 b 处，观察铅垂上升的火箭发射，测得 θ 角的规律 $\theta=kt$。试计算火箭的运动方程及 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 时火箭的速度和加速度。



题 1-4图



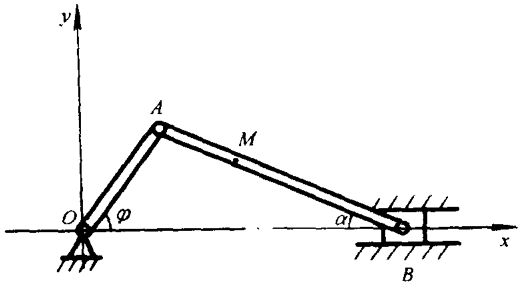
题 1-5图

1-6 题1-6图所示，曲柄连杆机构的曲柄 $OA=r$，连杆 $AB=l$，连杆上有一点 M，$AM=b$。如曲柄转动时 $\varphi=\omega t$（ω 为常量），求 M 点的运动方程及 $t=0$ 时的速度。

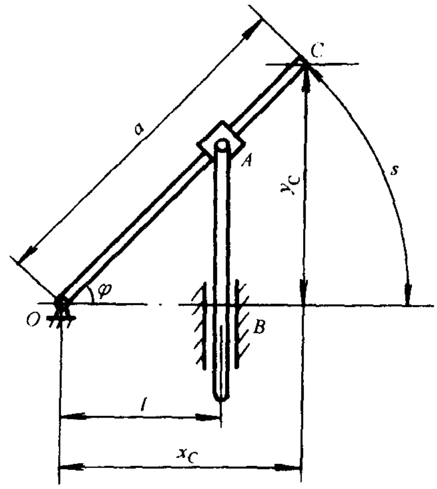
1-7 摇杆机构的滑杆 AB 在某段时间内以等速 u 向上运动（题1-7图），试建立摇杆上 C 点的运动方程（分别用直角坐标法及自然法），并求此点在 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时速度的大小（假定初瞬时 $\varphi=0$，摇杆长 $OC=a$）。

1-8 如题1-8图所示，在半径 $R=0.5\text{m}$ 的鼓轮上绕一绳子，绳子的一端挂有重物，重物以 $s=0.6t^2$（t 以s计，s 以m计）的规律下降并带动鼓轮转动，求运动开始1s后，鼓轮边缘上最高点处 M 点的加速度。

1-9 飞轮加速转动时，轮缘上一点按 $s=0.1t^3$ 的规律运动（t 以s计，s 以m计），飞轮半径 $R=0.5\text{m}$。求当此点的速度 $v=30\text{m/s}$ 时的法向加速度和切向加速度。



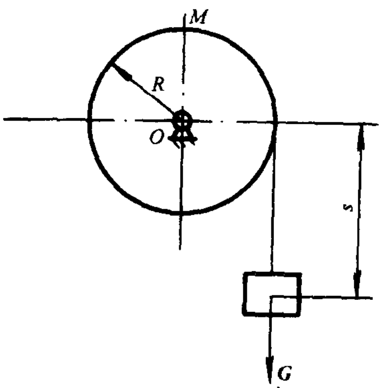
题 1-6图



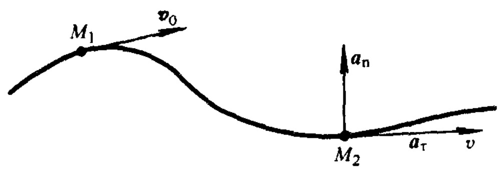
题 1-7图

1-10 飞轮以 $\varphi=4t^2$ 的规律绕 O 轴转动，飞轮的半径 $R=0.75$m。求轮缘上点 M 的运动方程和当 $t=1$s 时点 M 的位置、速度和加速度。

1-11 列车沿曲线轨道行驶，其轨迹如题 1-11 图所示，在 M_1 处速度为 $v_0=18$km/h，设速度均匀增加，经过 $s=1$km 后到达 M_2 处，此时速度为 $v=54$km/h。若轨迹在 M_2 处的曲率半径 $\rho=800$m，试求列车从 M_1 到 M_2 所需的时间以及在 M_2 处的切向、法向加速度。



题 1-8图



题 1-11图

1-12 已知点的运动方程为 $x=50t$，$y=500-5t^2$（x，y 的单位为 m，t 的单位为 s）。当 $t=0$ 时，求点的切向加速度、法向加速度及轨迹的曲率半径。

1-13 点 M 的运动由下列方程给定：$x=t^2$，$y=t^3$（x、y 以 cm 计，t 以 s 计）。试求轨迹在点（1，1）处的曲率半径。

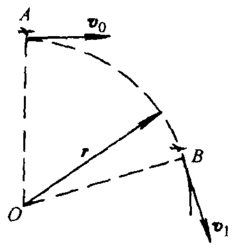
1-14 如题 1-14 图所示，某飞机由点 A 平稳地进入俯冲曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 时的速度为 $v_0=414$km/h，到达曲线段的终点 B 时的速度 $v_1=468$km/h，所经历的时间 $t=3$s。设 $\overset{\frown}{AB}$ 是半径 $r=800$m 的圆弧，且由 A 到 B 的运动是匀加速的，求飞机在位置 B 时的全加速度，以及由 A 到 B 所经过的路程。

1-15 如题 1-15 图所示，M 点在空间作螺旋运动，其运动方程为

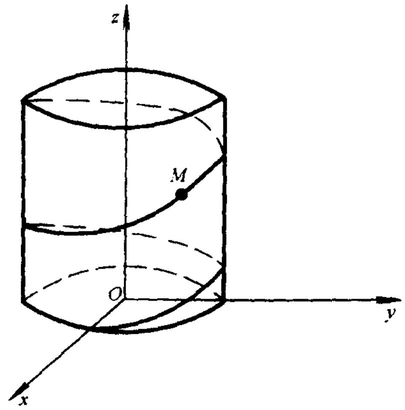
$$x=2\cos t$$
$$y=2\sin t$$

$$z = 2t$$

其中 x、y 和 z 以 cm 计，t 以 s 计。求（1）M 点的轨迹；（2）M 点的切向和法向加速度；（3）轨迹的曲率半径。



题 1-14 图



题 1-15 图