成人高等教育教材

高等数学

教学参考书

上册

重庆大学成人教育学院编

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

重庆大学出版社

教学参考书

参编：谢树艺　王代先　邓竞秀

金金诺　万象明　曾繁蓉

重庆大学出版社

内　容　提　要

与重庆大学成人教育学院编"成人高等教育教材《高等数学》"配套的《教学参考书》是供教师在教学和学生在学习过程中参考的。全书分上、下册。上册共七章：函数、极限、连续；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用；微分方程等。每章内容：一、习题、思考题（教材中的习题及思考题）及解答；二、参考题及解答。三、参考内容。

成人高等教育教材

高等数学

教学参考书

上　册

王　杰　主编

责任编辑　王季康

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆师范学院印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：11.375　字数：256千

1992年7月第1版　　1992年7月第1次印刷

印数0001--6000

标准书号：ISBN 7-5624-0544-1 / O·76　　定价：4.05元

（川）新登字020号

编者的话

本书是与“成人高等教育教材《高等数学》上册”（重庆大学成人教育学院编）配套的《教学参考书》，是供教师在教学和学生在学习过程中参考的。全书分上、下册，上册共有七章：函数、极限、连续；导数与微分；中值定理与导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用；微分方程。每章内容：一、习题、思考题（教材中的习题及思考题）及解答；二、参考题及解答；三、参考内容。参考题比习题的难度要大些，供教师选用或辅导时向学员讲解。参考题中，有的题的解答用到后面章节的内容 （例如求极限的问题用到级数知识），可待后面的内容讲过后才向学员讲。参考内容也是供教师参考的，通常不宜作为教材内容向学员讲授，但可在辅导时向学员介绍，以扩大知识面。

本书由王　杰副教授主编，谢树艺教授参加了本书的编写工作，并提供了宝贵的意见，其他编者有：王代先副教授、邓竞秀副教授、万象明副教授、曾繁蓉副教授及退休老教师余金诺同志

限于编者水平，书中缺点错误之处在所难免，恳切地请使用本书的教师和广大读者批评指正，我们由衷地表示感谢。

编者1988年3月于重庆大学系统工程及应用数学系

前　言

本书经过从1988—1991年三个学年试用，所有编者及全体使用本书的数学教师，不断提出修改意见，反复进行讨论和改进，现在正式出版。

在试用阶段，不仅重庆大学成人教育学院所有本科、专科都使用本书而且函授班也使用本书。实践说明，本书很适合成人教育特点，深受成人教育的教师和学生欢迎，使用本书有利于提高教学质量和完成教学任务。

《教学参考书》，不仅教师可用，函数生可用。本科、专科生同样可用。它有利于教师更好地掌握教材，可以帮助学员学到更多的知识，取得更好的成绩。

重庆大学系统工程及应用数学系杨万年教授、刘　松教授、何良材副教授、谈骏渝副教授和已退休的罗国光教授审阅了全书，并提出了宝贵的意见，我们表示衷心的感谢。

重庆大学成人教育学院副院长邹维勤副研究员对本书的编写和出版，给予了强有力的组织领导、支持和严格要求，我们表示最衷心的感谢。

编者1991年7月于重庆大学系统工程及应用数学系

目　　录

编者的话…………………………………………（1）
前言……………………………………………（2）
第一章　函数、极限、连续…………………………（1）
一、习题、思考题及解答…………………………（1）
二、参考题及解答………………………………（35）
三、参考内容…………………………………（49）
第二章　导数与微分……………………………（55）
一、习题、思考题及解答…………………………（55）
二、参考题及解答………………………………（84）
三、参考内容…………………………………（99）
第三章　中值定理与导数的应用…………………（101）
一、习题、思考题及解答…………………………（101）
二、参考题及解答………………………………（137）
三、参考内容…………………………………（153）
第四章　不定积分………………………………（157）
一、习题、思考题及解答…………………………（157）
二、参考题及解答………………………………（197）
三、参考内容…………………………………（207）
第五章　定积分…………………………………（210）
一、习题、思考题及解答…………………………（210）
二、参考题及解答………………………………（241）
三、参考内容…………………………………（259）
第六章　定积分的应用…………………………（262）
一、习题、思考题及解答…………………………（262）

二、参考题及解答…………………………………（278）
三、参考内容……………………………………（289）
第七章　微分方程…………………………………（294）
一、习题、思考题及解答……………………………（294）
二、参考题及解答…………………………………（326）
三、参考内容……………………………………（347）
附录：高等数学中常用的初等数学公式………（351）

第一章　函数、极限、连续

一、习题、思考题及解答

思考题 1-1

1．表格

x	1	5	12
y	0	-1	3

是否确定 x 与 y 之间有函数关系？可否说 x 是 y 的函数？为什么？

答　x 与 y 之间有函数关系。x 是 y 的函数。因为 y 取表中的一个值时，可从表中确定出 x 的值。

2．某一昼夜的温度图（图 1—1），是否确定温度 T 与时间 t 之间有函数关系？曲线弧 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度是否是变量 t 的函数？为什么？

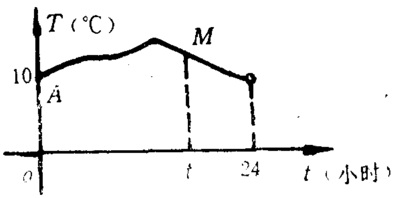

图1-1

答　温度 T 与时间 t 之间有函数关系。曲线弧 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度是变量 t 的函数。因为当 t 在区间〔0,24)上取定一个值时，T 有确定的值对应。曲线弧 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度有确定的值对应。（至于读者现在是否会求曲线弧的长度，那是另外的问题）。

3. $\sin x$是不是x的函数？为什么？

答 $\sin x$是x的函数。因x取定任何一个值时，$\sin x$有确定的值对应。

4. $y=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{取有理数；}\\ 0, & \text{当}x\text{取无理数。}\end{cases}$ 是否确定y是x的函数？为什么？

答 能确定y是x的函数。因x取定任何一个值时，y有确定的值对应。例如当$x=3$时，$y=1$；当$x=\sqrt{2}$时，$y=0$。

5. 方程$x^2+y^2+1=0$是否确定y是x的函数？为什么？

答 不能确定y是x的函数。因为x取定任何一个值时，y无实数值对应。

6. $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$是否构成复合函数？为什么？

答 不能构成复合函数。因为在$y=\arcsin u$中，$-1\leqslant u\leqslant 1$。而$u=x^2+2$中，$2\leqslant u<+\infty$。区间$[-1,1]$与$[2,+\infty)$没有公共部分。

7. $y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1;\\ \sin x, & x<1。\end{cases}$ 是一个函数？还是两个函数？

答 是一个函数。

8. 双曲函数、反双曲函数是不是基本初等函数？又是不是初等函数？

答 不是基本初等函数。而是初等函数。

9. 双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，$(x\geqslant a)$，可否写成参数

方程$\begin{cases} x = a\operatorname{ch}t; \\ y = b\operatorname{sh}t。\end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$？从而知双曲函数名 称 的由来。

答 可以。因$\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$。

10． $y = c$ （c 为函数）有没有反函数？为什么？

答 $y = c$ 没有反函数。如将$y = c$ 改写为$y = c + 0x$，则 $x = \dfrac{y-c}{0}$，这是没有意义的。

习　　题1-1

1．用各种方式表示下面所给的区间：

（1） $|x-2| < 3$；（2）以 10 和 20 为端点的开区间；（3）$x^2 > 4$；（4）3 的去心 5 邻域；（5）-5的 3 邻域；（6）以-1为中心，长度为4的左开、右闭区间；（7）$|x| \geqslant 3$。

解 （1）2的3邻域；$N(2, 3)$；$-3 < x-2 < 3$；$-1 < x < 5$；$(-1, 5)$；-1与 5 之间的数的全体；以-1与 5 为端点的开区间；集$\{x \mid -1 < x < 5\}$。

（2）$(10, 20)$；$10 < x < 20$；$|x-15| < 5$；$N(15,5)$；15的 5 邻域；集$\{x \mid x \in (10, 20)\}$。

（3）$|x| > 2$；$x < -2$或$x > 2$；$(-\infty, -2)$或$(2, +\infty)$；小于-2或大于 2 的数的全体；集$\{x \mid x < -2$或$x > 2\}$。

（4）$N(\overline{3}, 5)$；$0 < |x-3| < 5$；$-5 < x-3 < 0$或$0 < x-3 < 5$；$-2 < x < 3$或$3 < x < 8$；$(-2, 3) \cup (3,8)$，其中$\cup$表“并”是“或”的意思；3的去心5邻域；集$\{x \mid 0 < |x-3| < 5\}$。

（5）$N(-5, 3)$；$|x+5| < 3$；$-3 < x+5 < 3$；$-8 < x$

<-2；$(-8,\ -2)$；集$\{x\mid x\in(-8,\ -2)\}$。

(6) $-4<x+1\leqslant 4$；$-5<x\leqslant 3$；$(-5,3]$；以-5与3为端点的左开右闭区间；集$\{x\mid -5<x\leqslant 3\}$。

(7) $x\leqslant -3$或$x\geqslant 3$；$(-\infty,-3]$或$[3,+\infty)$；$x^2\geqslant 9$；集$\{x\mid x\leqslant -3$或$x\geqslant 3\}$。

2. 函数$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$是否相同？$y=x^2$与$x=y^2$是否相同？

解 因$f(-1)=-1$，$g(-1)=1$，于是$f(x)$与$g(x)$的对应法则不同，故$f(x)$与$g(x)$不相同。$y=x^2$与$x=y^2$是相同的函数。

3. 求函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\lg\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$的定义域。

解 由$\begin{cases}1-x^2>0\\ x+\dfrac{1}{2}>0,\end{cases}$ $\begin{cases}x^2<1\\ x>-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ $\begin{cases}-1<x<1\\ x>-\dfrac{1}{2}\end{cases}$。故定义域为$\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$。

4. $f(x)$的定义域为$[0,\ 1]$，求$f(x+a)+f(x-a)$($a>0$)的定义域。

解 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$ $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a,\end{cases}$ 函数$f(x+a)+f(x-a)$要有定义，必须$a\leqslant 1-a$，$a\leqslant\dfrac{1}{2}$，其定义域为$[a,\ 1-a]$，其中$a\leqslant\dfrac{1}{2}$。

5. 已知分段函数$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ 0, & |x|=1;\\ -1, & |x|>1。\end{cases}$ $g(x)=e^x$，

求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$并作出函数$f(x)$的图形。

解 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |e^x|<1;\\ 0, & |e^x|=1;\\ -1, & |e^x|>1。\end{cases}$$

即 $$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x>0。\end{cases}$$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1;\\ e^0, & |x|=1;\\ e^{-1}, & |x|>1。\end{cases}$$

即 $$g[f(x)]=\begin{cases}e, & -1<x<1;\\ 1, & x=1\text{或}x=-1;\\ e^{-1}, & x>1\text{或}x<-1。\end{cases}$$

$f(x)$的图形（图1-2）

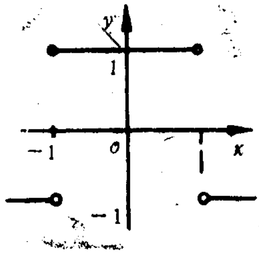

图1-2

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ 1, & 0<x<1。\end{cases}$ 求$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f(a)$（$|a|<1$）。

解 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$；$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$；$f(0)=0^2=0$；

当$-1<a\leqslant 0$时，$f(a)=a^2$；当$0<a<1$时，$f(a)=1$。

7. 设$\varphi(t)=t^3+1$，求$\varphi(t^2)$，$\varphi\left(\dfrac{1}{\varphi(t)}\right)$，

$\varphi[\varphi(t)]$。

解 $\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1$；$\varphi\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)=\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)^3+1=\left(\frac{1}{t^3+1}\right)^3+1$；$\varphi[\varphi(t)]=[\varphi(t)]^3+1=[t^3+1]^3+1$。

8. 已知$f(x^3+1)=\sin x$，求$f(x^2)$。

解 令$u=x^3+1$，则$x=\sqrt[3]{u-1}$，于是

$f(u)=\sin\sqrt[3]{u-1}$，故$f(x^2)=\sin\sqrt[3]{x^2-1}$。

9. 已知$y=\sqrt{1+u^2}$，$u=\sin v$，$v=\log_a x$，试将y表示为x的函数。

解 $y=\sqrt{1+\sin^2(\log_a x)}$。

10. 函数$y=\ln\sin e^{x+1}$是由哪些函数复合而成的。

解 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=e^w$，$w=x+1$。

11. 证明$y=\ln x$在其定义域内为单调增加函数。

证 在$(0,+\infty)$内任取两点x_1，x_2，且$x_1<x_2$，$\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$，于是$\ln x_2>\ln x_1$，故$\ln x$在$(0,+\infty)$内单增。

12. （1）作出函数$f(x)=|\sin x|$的图形并指出其周期。（2）$y=\sin^2x$的周期是多少？为什么？

解 （1）图形(图1-3)周期为π。

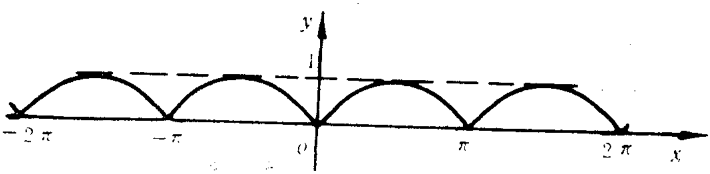

图1-3

（2） 因$y=\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}$，故周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$。

13. 在同一平面直角坐标系中，先画出$y=x$，$y=\sin x$的图形，然后利用这两图，作出$y=x+\sin x$的图形，这种方法叫做图形的"叠加"。

解 图形(图1-4)。

作法：$y=x$与$y=\sin x$的图形的对应的纵坐标相加。

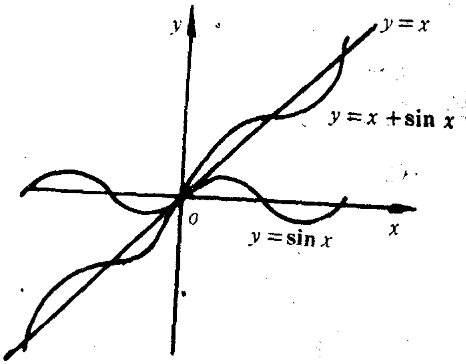

图1-4

14. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l, l)$上的，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

(3) 判别$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及$\phi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$的奇偶性，并由此说明任一函数$f(x)$可表示为一个奇函数与一个偶函数之和。

证 (1)设$f_1(x)$与$f_2(x)$都是偶函数。$g_1(x)$与$g_2(x)$都是奇函数，令$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，则$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)$ $=f_1(x)+f_2(x)=f(x)$。即二偶函数之和仍为偶函数。

令$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$，则$g(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)$ $=-g_1(x)-g_2(x)=-[g_1(x)+g_2(x)]=-g(x)$。即二奇函

数之和仍为奇函数。

(2)设 $h(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,则 $h(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=h(x)$，即两个偶函数之积仍为偶函数。

设$I(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$，则$I(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)=I(x)$。即两个奇函数之积为偶函数。

设$J(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)$,则$J(-x)=f_1(-x)\cdot g_1(-x)=f_1(x)[-g_1(x))]=-f_1(x)g_1(x)=-J(x)$。即偶函数与奇函数之积为奇函数。

(3) $\varphi(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$。即$\varphi(x)$是偶函数。$\phi(x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f[-(-x)]\}=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\phi(x)$。即$\phi(x)$为奇函数，又$f(x)=\varphi(x)+\phi(x)$，即任一函数$f(x)$，可表示为一个奇函数与一个偶函数之和。

15. 设$F(x)=e^x$，证明：

(1)$F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$；(2) $\frac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$。

证 (1)$F(x)\cdot F(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y}=F(x+y)$。

(2)$\frac{F(x)}{F(y)}=\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}=F(x-y)$。

16. 设$G(x)=\ln x$，证明：当$x>0$，$y>0$时，下列等式成立。

(1)$G(x)+G(y)=G(xy)$；(2)$G(x)-G(y)=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

证　(1) $G(x)+G(y)=\ln x+\ln y=\ln(xy)=G(xy)$。

(2) $G(x)-G(y)=\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}=G\left(\frac{x}{y}\right)$。

17. 符号函数$y=\text{sgn}x$用下式定义：

$$\text{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0。\end{cases}$$ 试作出这个函数的图形，并证明：

$$x\cdot\text{sgn}x=|x|$$

证　图形(图1-5)

$$x\cdot\text{sgn}x=\begin{cases}x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -x, & x<0。\end{cases}$$

即$x\cdot\text{sgn}x=|x|$。

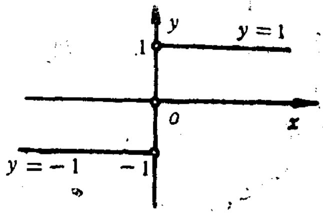

图1-5

18. 作出函数 $y=[x]$的图形。其中$[x]$表不超过$x(\leqslant x)$的最大整数。

解　图形（图1-6）。

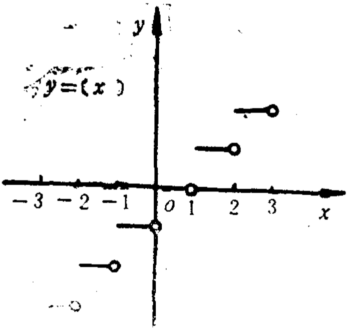

图1-6

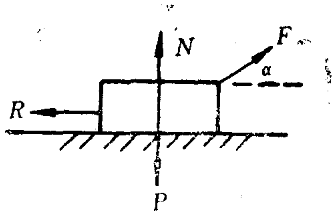

图1-7

19. 已知一物体与地面的摩擦系数是μ，重量是P，设与水平方向成α角的拉力下，使物体从静止开始移动(图1-7)，求物体开始移动时拉力F与α角之间的函数关系式。（提

示：摩擦力等于摩擦系数乘垂直压力；当R与水平方向拉力相等时，物体开始移动）。

解 $N=F\cdot\sin\alpha$，垂直压力$=P-N=P-F\sin\alpha$，摩擦力$R=\mu\cdot(P-F\sin\alpha)$，水平拉力$=F\cdot\cos\alpha$，于是$F\cdot\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha)$。即$F=\dfrac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}$。（注：这里说力，实际是力的大小）。

20. 把一块半径为R的圆形铁片从中心处剪去一块后，剩下的是中心角为α的扇形（图1-8），围成圆锥形容器，试将此容器的容积表成α的函数。

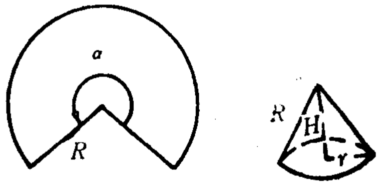

图1-8

解 设圆锥的底圆半径为r，圆锥高为H，于是有 $2\pi r=R\alpha$

$$R^2=H^2+r^2$$

$$r=\frac{R\alpha}{2\pi}$$

$$H=\sqrt{R^2-\frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}\text{。}$$

圆锥形容器的容积$V=\dfrac{1}{3}\pi\dfrac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}\cdot\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}$

$$=\frac{R^3\alpha^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}\text{。}$$

思考题1-2

1. 1，3，$\frac{1}{2}$，5是否叫数列？

答 不叫数列。因为高等数学中所定义的数列没有最后