

新题在线

XINTI ZAIXIAN

高中数学新题

总主编：张奠宙 国家高中数学课程标准研制组组长
欧亚科学院院士
华东师范大学数学系教授
闻金铎 中国教育学会物理教学专业委员会理事长
全国中小学教材审查委员会物理教材审查委员
北京师范大学教育科学研究所教授
吴国庆 全国中学化学竞赛指导小组组长
北京师范大学化学系教授
主 编：马岷兴 吴绍安

课标精神的新体现
中高考题的新走向
中学新题的新解法

广西教育出版社

NEW



序 言

《新题在线》数学部分终于完稿了,很觉欣慰.一年前,广西教育出版社的黄力平副总编来沪访问,谈起数学教育出版物的选题,我建议编新问题集.理由很简单:数学问题是数学教学改革的风向标.

各个时代都有自己的数学问题.中国古代数学的经典著作《九章算术》,是246个数学问题的集锦,内容涉及土地丈量、劳役分配、运输安排,以及距离、面积、体积的计算等,大多和政府的管理有关.这是典型的“数学问题”解决的模式,它崇尚实用和计算,讲究“如何(How)”解决实际问题.

古希腊的数学问题则以抽象的公理化的几何体系为特征,闪耀着人类理性思维的光芒.欧几里得的《几何原本》采用“公理—定义—定理—证明”的模式,崇尚演绎推理,讲究“为什么(Why)”要这样做.诸如“对顶角相等”、“等腰三角形底角相等”等直观的命题,都需要证明.著名的“用圆规、直尺三等分任意角”问题,和实际应用没有什么关系,但是,它的科学价值却是不朽的.

牛顿时代的数学问题,以处理无穷小量为特征.他用独创的微积分方法,处理了大量的实际问题,包括极大极小、变力做功、酒桶体积等一系列理论与实际并重的数学问题.他们大踏步前进,而暂时不管理论是否严谨.博大精深的微积分思想体系,紧密联系科学实践的数学问题,为工业革命开辟了道路.

19世纪的数学问题呈现严密化的趋势.群论、非欧几何、复数、微积分的严密化,构成了数学的新篇章.数学家以追求数学的纯粹、抽象、形式化为时尚,一切数学问题都在沿着“绝对严格”的道路前进,这

一趋势一直延续到 20 世纪上半叶。

第二次世界大战把所有的数学家,无论是纯粹的、应用的,都引向为战争服务的道路。密码破译用数论方法,喷气式飞机用偏微分方程计算,运筹学诞生在战场,火炮自动控制为控制论催生。更为重要的是,电子计算机开辟了人类的信息时代,再次使数学走进实际应用的广阔天地,影响社会生活的方方面面。以发表论文为目标的数学家渐成少数,多数的数学家将在各行各业用数学技术进行服务。联系科学和生产实践的数学问题再次成为时代的特征。

但是,应当看到,纯粹数学和应用数学的问题在任何时候都是互相交织在一起的。纯粹数学有意想不到的用处,应用数学又可以抽象为非常纯粹的数学问题。但是,宏观地看,数学的历史有“实用—纯粹—实用—纯粹—实用”5 个轮回的大趋势。我们正处在计算机技术大显威风,数学随之发生重大变化的时代。数学应用,正如水银泻地,无所不在地改变着数学本身。

2 让我们回到数学教育。

中国数学教育是从西方传入的,因此没有《九章算术》的实用主义传统。西方数学中的古希腊传统立刻征服了中国的思想界和数学界,直至 20 世纪 40 年代的教科书,一定包括“九点圆”、“西摩松线”等平面几何的精品,而且往往是“考高中”的试题。代数方面,因子分解难煞人,三角恒等式满天飞。数学教师的声誉,或者在于善解几何难题,或者在于能够兜出三角恒等变换的迷宫。1949 年之后,苏联数学教育观念进入中国,几何内容严密而较浅显,代数内容则以函数观念和方程思想并重,矫揉造作的数学题废止不用。但是,苏联学派的数学教育思想是把数学作为“思想的体操”(苏联加里宁语),数学问题的呈现,多以纯粹数学问题的严密证明为重。这一趋势,其实是 19 世纪数学追求纯粹、严密、形式化倾向的反映。以计算机技术为代表的信息时代数学观,则还来不及反映到数学教育中来。

20 世纪 80 年代的“拨乱反正”,数学教育回到 20 世纪 60 年代。由于高考的社会压力增加,数学问题以考试题目的类型为依归,奥林匹克数学竞赛脱离实用的趋势也影响到一般数学教育,于是一种单一



的、逻辑的、纯粹的中学数学问题模式终于形成了,这就是“化归”.数学确实要用逻辑链条把未知和已知联系起来,但是这毕竟只是数学思维的一种重要形式,绝不是全部.认为数学问题都是“化归式数学题”,显示出中国数学教育的贫困.

20世纪90年代开始了数学教育的改革,先是素质教育的口号,后是创新教育的提倡,对数学问题的要求也随之发生变化,例如:

●数学应用题重新受到重视.1995年高考数学试卷出现了大型数学应用题,此前的数学考试已经多年没有应用题.

●数学开放题从无到有,进入课堂,出现于考卷,现已成为一种教学模式,形成共识.

●国外的新型数学题影响国内,情境题首当其冲.一道向玻璃瓶注水的高考题,不用算,不必证,只凭理解与思考做出判断.数学建模题,无非是把实际情境数学化.

●数学创新的口号,使得数学题更加丰富多彩.阅读题、思想实验题、一种特定的思维题以及数学作文题,呈现出百花齐放的局面.

以上的变化,仅仅是开始.当新的数学课程标准在全国实行之后,数学题型还会进一步地丰富和变化.比如,概率统计一旦进入课程,其问题的呈现方式具有不同的形态.科学型计算器进入课堂和考场之后,许多老式问题不能用了,新的问题又会出现.

总而言之,数学题型也要“与时俱进”,不能例外.

编习题集,不是什么新鲜事,但是编新问题集,则并非多见.记得1993年,受当时国家教委课程研究中心游铭钧同志的委托,我和几位研究生合编过《中学数学问题集》,除了自编一些题目之外,主要到国外的资料中去寻找.这大概是这一轮编写数学新问题的开始.近年来,戴再平先生又编写了5本一套的《中小学数学开放题》丛书,也是这方面的新收获.此后若干年,全国的高考和地方的中考,出现了许多精彩的数学问题,凝聚了我国广大数学教育工作者的心血.因此,现在编写数学新问题,更多地立足于国内,比1993年的情况要好得多了.这是值得高兴的事.

我和广西教育出版社订立协议之后,即将本书的编写工作交给当

时在华东师范大学访问的马岷兴、高建新、木振武等 5 位老师合作完成。他们收集了一些现成的材料,然后统由四川师范大学的马岷兴老师处理。但是,把各种类型的数学问题整合起来,谈何容易,至于要增加几个新编的数学问题,更是要花大力气。马老师和她的合作者下了许多功夫。我想,此书的出版,是时代的产物,它记录了 20 世纪 90 年代以来数学教育改革脚步,应该有一定的意义。

上面的话,从古代数学讲到当代数学,又叙述 20 世纪中国数学教育的一些变迁,不免有点啰唆。依我的本意,是想把编写数学新问题集的意义说得充分些,于是把一些自我感受写了下来,以求教于大方之家,并权作为本书之序。

张奠宙

2002 年 3 月 21 日



新题空间

第一章 数学探索题

1

综述..... 1

新题例解..... 4

新题及解答..... 10

第二章 数学情境题

39

综述..... 39

新题例解..... 40

新题及解答..... 52

第三章 数学开放题

80

综述..... 80

新题例解..... 82

新题及解答..... 92

第四章 数学应用题

110

综述..... 110

新题例解..... 112

新题及解答..... 117

第五章 数学建模题

142

综述.....	142
新题例解.....	149
新题及解答.....	155

第六章 数学作文题

181

综述.....	181
案例及范文.....	184

新题点评

第一章 数学探索题点评

204

第二章 数学情境题点评

209

第三章 数学开放题点评

213

第四章 数学应用题点评

216

第五章 数学建模题点评

220

第六章 数学作文题点评

223

新题索引

代数

228

三角

229

立体几何

229

解析几何

229





新题空间

第一章

数学探索题

1



所谓探索题就是从问题给定的题设条件中探究其相应的结论并加以证明,或从给定的题目要求中探究其相应的必须具备的条件、解决问题的途径等.

数学探索题的明显特征是问题本身具有开放性及问题的解决过程中带有较强的探索性.这类问题能有效地训练学生思维,考查学生

的数学文化素质.

数学探索题的常见题型有:

(1)条件探索型题.指问题中的结论明确,而需要完备使结论成立的充分条件.它要求学生要善于从所给结论出发,逆向探索,逐步探寻,推理得出应具备的条件,进而完成解答.这是一类变换思维方向、开拓逆向思维的好题型.解此类题的策略是:第一,模仿分析法,将题设和结论视为已知条件,分别进行演绎,再有机地结合起来,导出所寻求的条件;第二,设出题目中指定的探索条件,将此假设作为已知,结合题设条件列出满足结论的等量或不等量关系,通过解方程或不等式等,求出所需寻找的条件.

(2)结论探索型题.指问题中结论不确定、不惟一,或结论需通过类比、引申、推广,或给出特例需通过归纳得出一般结论.它要求学生充分利用已知条件或图形特征进行大胆猜想,透彻分析,发现规律,获取结论.此类题着重培养学生分析、归纳、综合、推理等能力.解此类题的策略是:有时可以根据定义和定理,由条件直接进行演绎、推理得出结论;有时可以通过具体到抽象,特殊到一般的归纳得出结论,再加以证明;有时结论需在两种可能中选取,可采用反证法的思想来确定;有时还可利用分类讨论法、数形结合法、命题转换法等.对于没有确定的结论的问题,应由浅入深,多角度进行探求,力求得到比较有意义的结论.

(3)规律探索型题,也称策略探索型题.指通过分析题目所给的条件,联想并利用有关概念、定理、公式、法则,探索解决问题的各种途径,制定多种解决问题的策略和方法.

探索题还可分为:

(1)活动型探索题.要求学生参与一种活动,或者是课外活动,但要通过自己的数学探究才能完成.例:要求学生用长方体、台体、锥体、球体制作运动会的奖杯,形状要美观,要把每个部件的方程写出来.

(2)构造性探索题.在数学上是一个崭新的课题,需要用自己的想像力和创造力,求得完美的结果.例:在四维欧氏空间中,四维的立方体有几个顶点?几条棱?几个二维面、三维体、四维体(详见例2)?





(3)猜想与证明型探索题.波利亚提倡教合情推理:猜想—证明.较好的例子有整数的等差分拆问题:30以内哪些正整数可以拆成一个等差级数之和(公差和首项都是正整数)?先用计算机将它打印出来,然后猜想定理(如可等差分拆的一定是合数),并加以证明.

(4)推广型探索题.给出一个很平凡的数学问题,然后加以推广,往往会得出很有趣的结果.

例如分苹果问题:某人把一堆苹果的一半加半个(整数)给他的弟弟,再将余下的一半加半个给他的弟弟,此时剩下两个.问:原来有几个苹果?

此题用算术或方程求解很容易,但推到一般:分 N 次,剩下 M 个苹果,就会得出许多有趣的结果.这和数列、迭代、函数等数学内容有关(详见例4).

中国数学教学中传统的“一题多解”、“系列题”、“解题方法”以及“数学思想方法论专题”等都是数学探索题,但是这些问题多半是封闭的,题目必有解,而且是惟一解,解法一定是化归式的.这类问题有许多局限性,因此需要在发扬传统的基础上改进和拓广.

3

探索题与课程内容有比较紧密的联系.如果离开课程内容太远,或者需要补充铺垫许多新知识,结果在实践中难以取得好的效果.但是又不能靠得太近,成为常规的习题.探索题必须具有启迪性,没有程式可以套用.

探索是数学的生命线.解探索题是一种富有创造性的思维活动,一种数学形式的探索绝不是单一思维方式的结果,而是多种思维方式的联系、渗透、融会在一起共同作用的产物.提倡解决探索题的目的,在于培养学生在数学上的创新精神,敢于质疑、提问、反思、推广,初步经历数学发现、数学探究、数学创造的过程,从而亲身体验数学探究的激情和愉悦.



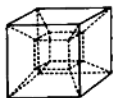
例 1 已知 $z_1 = x + \sqrt{5} + yi$, $z_2 = x - \sqrt{5} + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), 要使 $|z_1| + |z_2| = 6$, 还需增加什么条件?

分析与解 从结论入手进行探索, 要使 $|z_1| + |z_2| = 6$, 即使 $\sqrt{(x+\sqrt{5})^2 + y^2} + \sqrt{(x-\sqrt{5})^2 + y^2} = 6$, 此式表示的几何意义是: 点 (x, y) 到两定点 $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$ 的距离之和为 6. 而 6 是大于 $(-\sqrt{5}, 0)$ 到 $(\sqrt{5}, 0)$ 的距离的. 根据椭圆定义可知, 点 (x, y) 的轨迹是椭圆: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, 这就是所需增加的条件.

4

点评 本题为条件探索型题, 其结论明确, 需要完备使结论成立的充分条件. 可将题设和结论视为已知条件, 进行演绎推理, 推导出所需寻求的条件. 这类题要求学生变换思维方向, 有利于培养学生的逆向思维能力.

例 2 四维空间的 4-立方体(俄国) 二维的正方形有 4 个顶点、4 条棱、1 个面, 三维立方体有 8 个顶点、12 条棱、6 个面、1 个三维体. 试问: 四维空间中, 4-立方体有几个顶点? 几条棱? 几个二维面? 几个三维体? 几个四维体?



探索过程 4-立方体有 $2^4 = 16$ 个顶点是很容易想到的. 四维立方体有多少条棱呢? 观察四维立方体图可知其每个顶点上有 4 条棱, 总共有 64 条棱, 但每条棱被两个顶点重复地计算了一次, 所以四维立方体上的棱有 32 条.

四维立方体又有多少个二维面和多少个三维体呢? 4-立方体的每条棱是三个面的分界线, 所以会有 $24 \times 3 = 72$ 个二维面, 但是每一





个二维面被 4 条棱重复计算了一次,故有 18 个二维面.同理,4-立方体的每个二维面是两个三维体的交界,因此将有 36 个三维体,而每个三维体又被 6 个二维面重复使用,故有 6 个三维体.因为是在四维空间中,所以四维体只有一个.

点评 本例是苏联盖尔范德《代数学》中的一个题目.我们上面的探索过程不要算、不要证,只凭空间想像能力即可完成.当然,考虑的方法不只是这一个思路,可用点排列组合知识方便地求得,也可借助空间解析几何的知识理性地求得,甚至可借助几何画板直观地求得.本例还可推广到 5-立方体,6-立方体,……, n -立方体的情形.

本例属构造性探索题,它在数学上是一个崭新的课题,需要用自己的想像力和创造力求得完美的结果,有利于培养学生的空间想像力.本例是一个好题,有些人以为这超出了大纲范围,但是我们应当“不拘泥于大纲”.它所用的数学知识并未脱离中学数学知识,而对我们生活的四维宇宙有些了解,并不算过分.“空间想像能力=做传统几何题”,恐怕是太狭隘了.

例 3 一个几何问题的探讨过程

过 $\odot O$ 外一点 A 作 $\odot O$ 的一条切线 AB 和任意一条割线 ACD ,过点 B 作 $BE \perp AO$ 于 E ,则有 $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$.

探索过程 我们都知道,平面几何中的相交弦定理、割线定理、切线长定理都统一于圆幂定理之中.圆幂定理反映出平面上任意一点与任意圆之间的一种本质关系.由于它的图形结构简单,但结果却是如此的奇妙,再次体现出数学美!因此,它激起人们再去研究它的兴趣.

打开几何画板,作了一个圆 $\odot O$,过 $\odot O$ 外一点 A 作 $\odot O$ 的一条切线 AB 和任意一条割线 ACD (如图).从而有 $AB^2 = AC \cdot AD$. ①

连接 BO 、 AO ,则有 $\triangle ABO$ 为 $\text{Rt}\triangle$. 结合①式的左边 AB^2 ,自然想到过点 B 作 $BE \perp AO$ 于 E ,由射影定理知 $AB^2 = AE \cdot AO$. ②



由①、②得: $AC \cdot AD = AE \cdot AO$, 从而 $C、D、O、E$ 四点共圆, 即 O 在由 $C、D、E$ 三点所确定的圆上. 由于 O 的特殊性, 有 $OC = OD$, 但是显然 $EO \neq ED$, 且 $EC < ED$. 又有 $AC < AD$, 是否有 $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$ 这种对称形式成立呢?

当点 $A、B、O$ 一定时, 点 E 为点 B 在 AO 上的射影, 也是一个定点. 对于不同的割线 ACD 都有 $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$ 成立. 是否它的逆命题: 过圆 $\odot O$ 外一点 A 作 $\odot O$ 的任意一条割线 ACD , B 为 $\odot O$ 上任意一点, 过点 B 作 $BE \perp AO$ 于 E , 且有 $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$, 则 AB 是 $\odot O$ 的一条切线也成立呢? 要解决这个问题, 需要解决以下两个问题:

(I) 根据题目所给条件, 在 $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$ 成立的前提下有 $C、D、O、E$ 四点共圆;

(II) 过点 E 作 AO 的垂线, 与 $\odot O$ 的交点为 $\odot O$ 的切点.

通过证明, 我们发现以上两个命题都成立. 综合起来, 便得到下面这个美妙的结果: 若 A 为 $\odot O$ 外一点, B 为 $\odot O$ 上任意一点, 过 B 作 $BE \perp AO$ 于 E , ACD 为 $\odot O$ 的任意一条割线, 连接 $AB、CE、DE$, 则 $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$ 成立的充要条件是 AB 为 $\odot O$ 的切线.

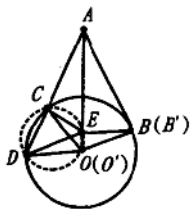
下面我给出这个结果的证明:

证明:(必要性) 由 AB 为 $\odot O$ 的切线知 $OB \perp BA$, 而 $BE \perp AO$ 于 E , 由射影定理知 $OC^2 = OB^2 = OE \cdot OA$, 即 $\frac{OC}{OA} = \frac{OE}{OC}$, 又 $\angle COA = \angle EOC$, 所以 $\triangle COA \sim \triangle EOC$. 从而 $\frac{AC}{CE} = \frac{AO}{CO} = \frac{AO}{BO} = \frac{AB}{BE}$.

同理, $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BE}$. 所以 $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DE}$.

(充分性) 作 $\triangle CDE$ 的外接圆交 AO (或其延长线) 于 O' .

如右图, 易知 $\triangle CEA \sim \triangle O'DA$. 从而 $\frac{AC}{CE}$





$= \frac{AO'}{O'D}$. 又由 $\triangle DEA \sim \triangle O'CA$ 知 $\frac{AD}{DE} = \frac{AO'}{O'C}$. 由条件 $\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{CE}$ 知 $\frac{AO'}{O'D} = \frac{AO'}{O'C}$, 故 $O'D = O'C$. 即 O' 既在 CD 的垂直平分线上, 又在 AO 上, 于是必有 $O \equiv O'$.

又作 $\odot O$ 的切线 AB' , 切点为 B' , 连接 $B'E$. 由于 $AB'^2 = AC \cdot AD = AE \cdot AO$, 即有 $\frac{AB'}{AO} = \frac{AE}{AB'}$, 又 $\angle B'AO = \angle EAB'$, 所以 $\text{Rt} \triangle B'AO \sim \text{Rt} \triangle EAB'$. 从而易得 $\angle B'EA = 90^\circ$. 而过一点的垂线是惟一的, 于是 $B \equiv B'$. 所以 AB 为 $\odot O$ 的切线.

至此, 已经探讨并解决了一个几何问题. 从整个探讨和证明过程中, 始终以数学美作为探讨和解决问题的出发点, 以作为数学美的基本内容的对称、和谐为基础做出大胆猜想, 并用几何画板为辅助工具去验证猜想, 这样必然会大大增加所提出的数学猜想的可靠程度, 同时, 通过合理利用几何画板中的工具箱可以为我们解决几何问题提供一些解题思路.

点评 “以美启真”是数学思维的重要辩证策略. “以美启真”是指用美的思想去开启数学真理, 用美的方法去发现数学规律、解决数学问题. 本例运用“以美启真”这种辩证策略, 借助几何画板探讨出一个简单图形的一个“美妙”结果! (本题由李昌勇提供)

例 4 (一个加半个) 某甲把他的一堆苹果的一半加半个给他的弟弟, 此时他手里还剩下 2 个, 问: 甲原来有几个苹果?

分析与解 此题用代数方法求解, 很容易得到 $x = 5$. 没有什么太多的数学教育价值. 然而, 将这个平凡的问题加以推广, 会得到许多有趣的结果.

首先问: 如果“一半加半个”的过程是 m 次, 而最后剩下的苹果是 n 个, 情况会怎样?

再问: 上问求解过程中, 有什么特殊规律? 通过探索, 我们会注意到两点:

- (1) 每分过一次, 弟弟得到的比某甲多一个.
- (2) 每次某甲和弟弟分得的苹果数之和, 是上一次剩的苹果数, 于

是可得下表:

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6
1	1,2	3,4	7,8	15,16	31,32	63,64
2	2,3	5,6	11,12	23,24	47,48	95,96
3	3,4	7,8	15,16	31,32	63,64	127,128
4	4,5	9,10	19,20	39,40	79,80	159,160

表中只列了 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6; n = 1, 2, 3, 4$.

又问:上述数列有什么特征?

从表中可以看出:横向有许多等比数列,纵向有许多等差数列.它的一般项为 $[(n+1) \cdot 2^{m-1}] - 1$ 及 $[(n+1) \cdot 2^{m-1}]$.

点评 本问题可以在计算机上加以实现.这样的问题,我国的数学教学很少接触,学生没有尝试过.其价值在于使学生体会数学结果推广的过程,不断地提出问题和解决问题,体验从未知到已知的数学魅力.

8

例 5 某学生受伤,医生嘱服某种药物.每次服药量为 440mg,每日 3 次(间隔 8 小时),连服 10 天.已知学生身体每 8 小时吸收药物的 60%,试分析学生体内的药物含量.

分析与解 这是一个迭代与递归问题,它反映事物的动态变化过程,以 8 小时为一时间段,共 30 个时刻.用 x_k 表示 k 个时间段的药物含量.可得迭代公式:

$$x_{k+1} = x_k \times 0.6 + 440.$$

若将 x_k 理解为第 k 个 8 小时后身体内吸收的药物含量.可得迭代公式:

$$x_{k+1} = (x_k + 440) \times 0.6.$$

用计算器或计算机编程可得上述两个方程的解,下面以 C 语言程序为例[左为 $x_{k+1} = x_k \times 0.6 + 440$,右为 $x_{k+1} = (x_k + 440) \times 0.6$ 的运行结果].





```
for( k = 1, x = 0; k <= 30; k + + )  
{ x = x * 0.6 + 440;  
printf("k = %d \ tx = %f \ n",  
k, x);  
}
```

```
k = 1  x = 440.000000  
2  x = 704.000000  
3  x = 862.400024  
4  x = 957.240002  
5  x = 1014.463959  
6  x = 1048.678345  
7  x = 1069.207031  
8  x = 1081.524170  
9  x = 1088.914551  
10 x = 1093.348755  
11 x = 1096.009277  
12 x = 1097.605591  
13 x = 1098.563354  
14 x = 1099.482788  
15 x = 1099.689697  
16 x = 1099.813843  
17 x = 1099.888306  
18 x = 1099.932983  
19 x = 1099.959839  
20 x = 1099.975953  
21 x = 1099.985596  
22 x = 1099.991333  
23 x = 1099.994751  
24 x = 1099.996826  
.....
```

```
for( k = 1, x = 0; k <= 30; k + + )  
{ x = ( x + 440 ) * 0.6;  
printf("k = %d \ tx = %f \ n",  
k, x);  
}
```

```
k = 1  x = 264.000000  
2  x = 422.399994  
3  x = 517.440002  
4  x = 574.463989  
5  x = 608.678406  
6  x = 629.207031  
7  x = 641.524231  
8  x = 648.914551  
9  x = 653.348755  
10 x = 657.605591  
11 x = 658.563354  
12 x = 659.138000  
13 x = 659.482788  
14 x = 659.689691  
15 x = 659.813843  
16 x = 659.888306  
17 x = 659.932983  
18 x = 659.959778  
19 x = 659.975891  
20 x = 659.985535  
21 x = 659.991333  
22 x = 659.994812  
23 x = 659.996887  
24 x = 659.998108
```

由此可见,大约在 7 天以后,药物含量(或吸收量)稳定在一定水平.

点评 本题来自美国课程标准,迭代与递归问题反映事物的动态变化过程,在数学、生物学、计算机科学等领域中都有广泛深入的应用,此模型的分析解决给我们数学教学以丰富的启迪:

(1)这是一个完全真实的、有应用背景并从科学数据导出的模型,使人觉得身临其境,引起强大的创造性冲动.

(2)它和计算机科学的应用相联系.现代数学有一个特点是非线性,数值计算量非常大,应用计算机已是必然.用计算机程序设计语言的循环语句实现迭代和递归过程,已成为一种基本的算法.为什么无论服多久的药物,人体内药物含量用两种分析法得出,最终会稳定?从算法和数学模型分析可得出结论,因为 x_k/x_{k+1} 的绝对值是 $0.6 < 1$,所以迭代过程是稳定和收敛的.

(3)本题用计算机程序设计解决数值计算,非常简捷,也可认为是按时间步长法的计算机仿真.

10



1-1 对任意函数 $f(x)(x \in D)$,可按图所示构造一个数列发生器,其工作原理如下:

①输入数据 $x_0 \in D$,经数列发生器输出 $x_1 = f(x_0)$.

②若 $x_1 \in D$,则数列发生器结束工作;若 $x_1 \notin D$,则将 x_1 反馈回输入端,再输出 $x_2 = f(x_1)$,并依此规律继续下去.现定义:

$$f(x) = \frac{4x-2}{x+1}.$$

