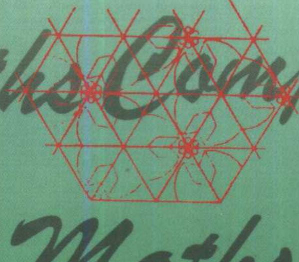
初中数学活动课程研究丛书

全国初中数学竞赛辅导 1

（初一分册）

全国初中数学竞赛命题组　编



北京大学出版社

全国初中数学竞赛辅导 1（初一分册）北京大学出版社

初中数学活动课程研究丛书

全国初中数学竞赛辅导

第一册（初一分册）

全国初中数学竞赛命题组　编

主　编　孙瑞清

副主编　熊　斌

北京大学出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

全国初中数学竞赛辅导　第一册/孙瑞清主编. —北京：北京大学出版社，1998.12

ISBN 7-301-03937-9

Ⅰ.全…　Ⅱ.孙…　Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料
Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 34233 号

书　　　名：**全国初中数学竞赛辅导**　第一册（初一分册）
著作责任者：孙瑞清
责 任 编 辑：王　艳
标 准 书 号：ISBN 7-301-03937-9/G・488
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752021
排　印　者：中国科学院印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787mm×1092mm　32 开本　8 印张　180 千字
1998 年 12 月第一版　　2002 年 9 月第 7 次印刷
定　　　价：9.00 元

《全国初中数学竞赛辅导》编委会

序

1998年春，中国教育学会中学数学教学专业委员会举办了全国初中学生的数学竞赛。赛后，在各方面都取得了良好的反映。首先是参加竞赛的学生人数，远远超出始料。其次是各省、市、区对竞赛的组织系统而严密，工作的同志是高度负责的。参赛的学生赛后反映说，赛题比预料的容易些、简单些，但又不是仅凭摹仿解过习题的方法而易于解出的。参赛学生的老师反映说，赛题反映出与课内教学的实际结合得较紧密。从赛题的解法上说，需要参赛学生具有灵活运用所学基础知识的技能和能力。这样的赛题，从参赛的学生方面来说，可使他们深刻体会学好基础知识的重要性，同时也体会到老师经常所说的“学数学要学习、练好‘举一反三’应用的本领”的重要性。此外，可增强他们学好数学的信心和决心。从参赛学生的数学老师方面来说，在应该与如何重视及加强基础教学方面，受到一定的启发；在训练学生的技能、培养学生的能力，特别是在解题上，对应该与如何进行训练及培养，也受到一定的启发。有的参赛学生的家长反映说，这次赛题与学生课内学习的内容结合得比较紧密，繁简、难易的层次也较为鲜明，竞赛按这样的标准命题，学生准备起来，心中有底也费不了多少时间，而收获又是很实际的。这样的数学竞赛应该继续办下去。

分析取得良好反映的原因，主要的首先在于这次数学竞赛的举办宗旨对初中数学教育而言是正确的。举办这次数学竞赛的宗旨是：“积极推进素质教育，根据原国家教委（现在的

教育部)颁布的《义务教育初中数学课程计划》和《初中数学教学大纲》提出的要求,促进初中数学课外活动的开展和初中数学活动课的实施,激发学生学习数学的兴趣,培养学生应用数学的意识和能力,满足学有余力的学生学习数学的愿望,发展他们的数学才能。”如果与多年来开展的高中学生数学竞赛的宗旨相比,则高中学生数学竞赛的首要宗旨在于发现有特殊的数学才能,并对数学有浓厚兴趣的学生,给予一定的培养,作为研究数学的后备力量输送给国家。这次初中学生数学竞赛的首要宗旨在于普遍地激发初中学生对数学的学习兴趣;在于普遍地促进初中数学教学质量的提高。两者的宗旨是迥然不同的。而这次初中学生数学竞赛的赛题就是坚决按照后者命题的。

再一个取得良好反映的主要原因则是命题委员的组成。这次命题委员中,有大学、研究所的数学教育研究人员,有中学教学第一线的数学教师。他们都是各省、市、区数学教学研究会推荐而聘任的。他们不仅业务水平高,教学经验丰富,而且对中学数学教学大纲也有较深入的研究,对目前中学数学教学的实际情况更有较充分的了解。因而在仔细研究竞赛宗旨后,拟订的参赛题具有较强的针对性。

竞赛过后,几位命题委员根据各方面对这次竞赛的反映,并鉴于目前初中数学教育之所需,乃有“何不编写一套书”的动议,即编写一套既可供开展初中数学课外活动参考,又可供实施初中数学活动课参考,也供初中数学教师与学生熟习数学竞赛使用的辅助读物。经筹划、执笔、校订,于近日完成脱稿,并纳入《初中数学活动课程研究丛书》,定书名为《全国初中数学竞赛辅导》,即将付印。

为初中师生阅读方便,本书以现行《初中数学教学大纲》

的规定为基础，按初中三年的划分，分别编为第一册、第二册和第三册。每册均按课内、课外及理论、应用的划分，各编为三篇，即基础篇、提高篇和应用篇。

基础篇的内容，基本上就是《初中数学教学大纲》中规定的“基本要求”的教学内容。通过阅读基础篇的内容，不仅可使学生对课内所学习的知识得到再现、复习的机会，还可使他们对知识得到进一步的、系统的认识，同时也有利于继续阅读提高篇和应用篇。

提高篇是贯彻《初中数学教学大纲》中“对学有余力的学生，要通过讲授选学内容和组织课外活动等多种形式，满足他们的学习愿望，发展他们的数学才能”的规定之作。《初中数学教学大纲》中对选学内容未作（也不必作）规定，本书各册的提高篇的内容，都是作者根据多年的教学经验，根据对初中学生学习数学所需的认识而编写的。一方面具有范例的作用，而另一方面也还是只具参考的作用。

应用篇是贯彻《初中数学教学大纲》中“要训练学生的应用知识的技能与培养学生的应用知识的能力”之作；也是贯彻《初中数学教学大纲》中“要使学生受到把实际问题抽象成数学问题的训练，逐步培养他们的分析问题和解决问题的能力，形成用数学的意识”的规定之作。通过阅读应用篇及练习的实践，不仅可使学生提高应用的技能和能力，还可使他们了解更多的抽象理论知识的用途和用法。当然，和提高篇的作用一样，一方面具有范例的作用，而另一方面也还是只具参考的作用。

为了使用本书的方便，考虑到以本书作为教师给学生讲授的依据时，本书的编写均按“分讲”的体裁编写，以便更有利于教师的讲授与学生的学习。

值此《全国初中数学竞赛辅导》即将付印之际，略志数语如上，以对本书的出版，聊表祝贺之意。

钟善基

1998年8月于北京师大

前　言

根据原国家教委的批示，中国教育学会中学数学教学专业委员会于 1998 年 4 月 18 日举办了全国初中数学竞赛，这次竞赛的宗旨是："积极推进素质教育，根据原国家教委颁布的《义务教育初中数学课程计划》和《初中数学教学大纲》提出的要求，促进初中数学课外活动的开展和初中数学活动课的实施，激发学生学习数学的兴趣，培养学生应用数学的意识和能力，满足学有余力的学生学习数学的愿望，发展他们的数学才能。"

根据竞赛的宗旨，命题组本着"命题范围以义务教育《初中数学教学大纲》的内容、要求为基本依据，着重考查学生对数学知识的理解和应用数学知识解决实际问题的能力"进行了命题。实践表明，这次竞赛活动受到了全国广大参赛学生和指导老师们的欢迎。有不少同志提出，为满足学有余力的学生发展数学才能和开展初中数学活动课程的要求，有必要编写一套初中数学活动的辅导读物。为此，经命题组大多数成员的研究和交流，我们确定本书的编写目的是：

（1）为贯彻《初中数学教学大纲》、开展数学活动课程提供研究资料；

（2）为全国初中数学竞赛提供一套较好的辅导材料；

（3）为初中学有余力的学生和数学爱好者提供数学课外读物；

（4）为初中数学教学与学习提供扩展性背景材料，为数

学教师提供教学、辅导参考书。

为此，本书注重：使学生对初中数学基础知识的深刻理解和融会贯通；并力求通过灵活运用数学知识，在解决问题中提高数学能力；同时，加强理论与实际的联系，提高应用意识，发展创造才能。

本书由第一册、第二册、第三册组成，分别供初一、初二、初三年级学生使用。在每册中都按基础篇、提高篇、应用篇编写，每篇由若干讲组成，每讲后配有练习题。有些较难或扩展视野的知识加了“*”号，以便于读者选读。每册后配有全书的复习题和自测题，并在书后备有参考答案。为了便于学生参加全国初中数学竞赛，在第三册书后，附有若干套综合训练题，并附有参考答案。这样，本书为使用者提供了自我评价和综合评价的测试资料，以便于学习与辅导。

我国著名数学家、中国科学院院士王梓坤教授和著名数学教育家、北京师范大学钟善基教授为本书顾问。钟善基先生特为本书写了序言，这是对我们的极大鼓励，在此，深表敬意。

本书的编写过程中，我们参阅了不少国内外有关资料，收益匪浅。本书编写成后，南京师范大学单墫教授审阅了部分稿件，提出了一些有益的意见。此外，北京大学出版社的王明舟先生、王艳女士对本书的出版给予了很多帮助。在此，一并表示感谢。

由于我们水平有限，尽管我们做了努力，但其中缺点、甚至错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1998 年 8 月

目　　录

基　础　篇

提　高　篇

应　用　篇

第一讲　有理数的巧算

有理数运算是中学数学中一切运算的基础.它要求同学们在理解有理数的有关概念、法则的基础上,能根据法则、公式等正确、迅速地进行运算.不仅如此,还要善于根据题目条件,将推理与计算相结合,灵活巧妙地选择合理的简捷的算法解决问题,从而提高运算能力,发展思维的敏捷性与灵活性.

1. 括号的使用

在代数运算中,可以根据运算法则和运算律,去掉或者添上括号,以此来改变运算的次序,使复杂的问题变得较简单.

例1　计算:

(1) $\left[47-\left(18.75-1\div\frac{8}{15}\right)\times2\frac{6}{25}\right]\div0.46$;

(2) $\dfrac{(-2)^{3}\times(-1)^{1998}-|-12|\div\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]}{(-1)\div\left(-\frac{4}{5}\right)\times1\frac{1}{4}}$.

分析　中学数学中,由于负数的引入,符号"+"与"－"具有了双重涵义,它既是表示加法与减法的运算符号,也是表示正数与负数的性质符号.因此进行有理数运算时,一定要正确运用有理数的运算法则,尤其是要注意去括号时符号的变化.

解　(1) 原式 $=\left[47-\left(18\frac{3}{4}-1\frac{7}{8}\right)\times2\frac{6}{25}\right]\div0.46$

$=\left[47-\frac{135}{8}\times\frac{56}{25}\right]\div\frac{23}{50}$

$$=\left[47-37\frac{4}{5}\right]\div\frac{23}{50}$$
$$=\frac{46}{5}\times\frac{50}{23}=20.$$

(2) 原式$=\dfrac{(-8)-12\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)}{\dfrac{5}{4}\times1\dfrac{1}{4}}=\dfrac{(-8)+12\times4}{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{5}{4}}$

$$=\frac{40}{\frac{25}{16}}=40\div\frac{25}{16}=40\times\frac{16}{25}=25\frac{3}{5}.$$

注意 在本例中的乘除运算中，常常把小数变成分数，把带分数变成假分数，这样便于计算.

例 2 计算下式的值：

$$211\times555+445\times789+555\times789+211\times445.$$

分析 直接计算很麻烦，根据运算规则，添加括号改变运算次序，可使计算简单. 本题可将第一、第四项和第二、第三项分别结合起来计算.

解 原式$=(211\times555+211\times445)$

$+(445\times789+555\times789)$

$=211\times(555+445)+(445+555)\times789$

$=211\times1000+1000\times789$

$=1000\times(211+789)$

$=1\ 000\ 000.$

说明 加括号的一般思想方法是“分组求和”，它是有理数巧算中的常用技巧.

例 3 计算：$S=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n.$

分析 不难看出这个算式的规律是任何相邻两项之和或为“1”或为“-1”. 如果按照将第一、第二项，第三、第四项，…，

分别配对的方式计算，就能得到一系列的“-1”，于是一改“去括号”的习惯，而取“添括号”之法.

解 $S=(1-2)+(3-4)+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n$.

下面需对 n 的奇偶性进行讨论：

当 n 为偶数时，上式是 $n/2$ 个(-1)的和，所以有

$$S=(-1)\times\frac{n}{2}=-\frac{n}{2};$$

当 n 为奇数时，上式是$(n-1)/2$ 个(-1)的和，再加上最后一项$(-1)^{n+1}\cdot n=n$，所以有

$$S=(-1)\times\frac{n-1}{2}+n=\frac{n+1}{2}.$$

例 4 在数 1，2，3，…，1998 前添符号“+”和“－”，并依次运算，所得可能的最小非负数是多少？

分析与解 因为若干个整数和的奇偶性，只与奇数的个数有关，所以在 1，2，3，…，1998 之前任意添加符号“+”或“－”，不会改变和的奇偶性. 在 1，2，3，…，1998 中有 $1998\div2$ 个奇数，即有 999 个奇数，所以任意添加符号“+”或“－”之后，所得的代数和总为奇数，故最小非负数不小于 1.

现考虑在自然数 $n,n+1,n+2,n+3$ 之间添加符号“+”或“－”，显然

$$n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0.$$

这启发我们将 1，2，3，…，1998 每连续四个数分为一组，再按上述规则添加符号，即

$$(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(1993-1994-1995+1996)-1997+1998=1.$$

所以，所求最小非负数是 1.

说明 本例中，添括号是为了造出一系列的“零”，这种方

法可使计算大大简化.

2. 用字母表示数

我们先来计算(100+2)×(100－2)的值：

$$(100+2)\times(100-2)=100\times100-2\times100+2\times100-4$$
$$=100^2-2^2.$$

这是一个对具体数的运算，若用字母 a 代换 100，用字母 b 代换 2，上述运算过程变为

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2.$$

于是我们得到了一个重要的计算公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2, \quad ①$$

这个公式叫平方差公式，以后应用这个公式计算时，不必重复公式的证明过程，可直接利用该公式计算.

例 5 计算 3001×2999 的值.

解 $3001\times2999=(3000+1)(3000-1)$

$=3000^2-1^2=8\ 999\ 999.$

例 6 计算 103×97×10 009 的值.

解 原式 $=(100+3)(100-3)(10\ 000+9)$

$=(100^2-9)(100^2+9)$

$=100^4-9^2=99\ 999\ 919.$

例 7 计算：

$$\frac{24\ 690}{12\ 346^2-12\ 345\times12\ 347}.$$

分析与解 直接计算繁. 仔细观察，发现分母中涉及到三个连续整数：12 345，12 346，12 347. 可设字母 $n=12\ 346$，那么 $12\ 345=n-1$，$12\ 347=n+1$，于是分母变为 $n^2-(n-1)(n+1)$. 应用平方差公式化简得

$$n^2-(n^2-1^2)=n^2-n^2+1=1,$$

即原式分母的值是 1，所以原式 $=24\ 690$.

例 8 计算：

$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1).$$

分析 式子中 $2,2^2,2^4,\cdots$ 每一个数都是前一个数的平方，若在 $(2+1)$ 前面有一个 $(2-1)$，就可以连续递进地运用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 了.

解 原式
$$\begin{aligned}&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)\\&\quad\times(2^{16}+1)(2^{32}+1)\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&\quad\times(2^{32}+1)\\&=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)\\&=\cdots\cdots\\&=(2^{32}-1)(2^{32}+1)\\&=2^{64}-1.\end{aligned}$$

例 9 计算：

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right).$$

分析 在前面的例题中，应用过公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

这个公式也可以反着使用，即

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

本题就是一个例子.

解 原式
$$\begin{aligned}&=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\\&\quad\times\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\\&=\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\right]\end{aligned}$$