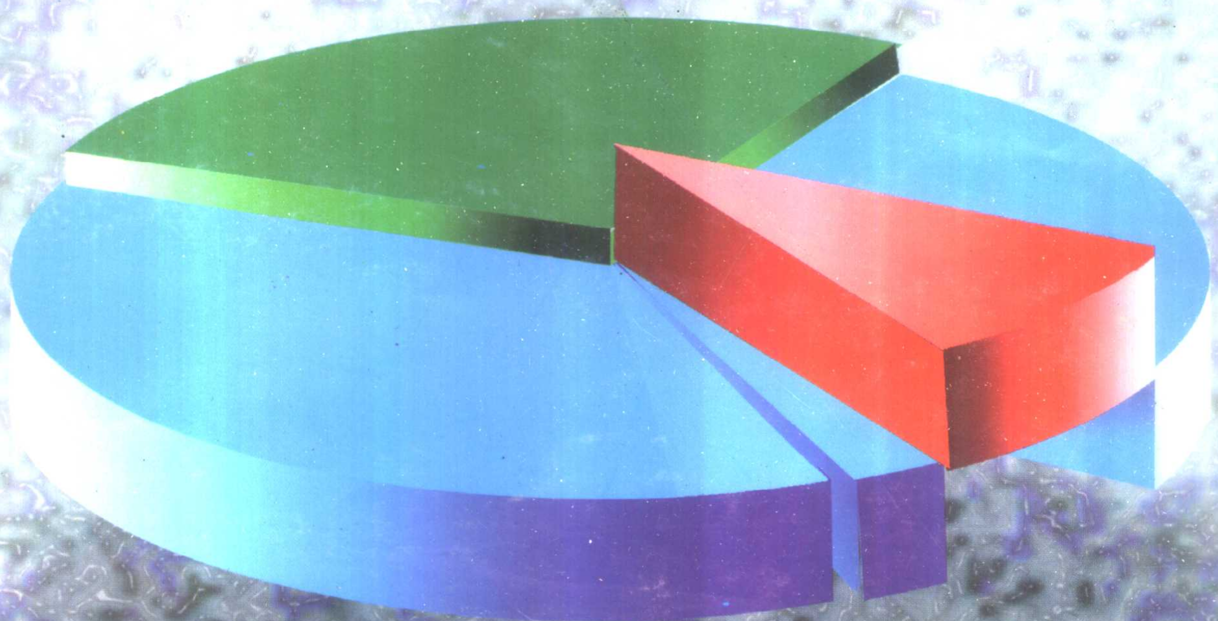
工程运筹学

GONGCHENG YUNCHOUXUE

肖维品　主编



重庆大学出版社

内容提要

全书共分10章。书中系统地介绍了在工程管理和经济管理中常用的运筹学方法及其典型的应用实例，其中包括线性规划、对偶问题与灵敏度分析、运输问题、整数规划、动态规划、非线性规划、存贮论、网络计划、排队论、多目标规划及其应用等。每章末都配有一定数量的习题。本书坚持运筹学"源于实践，归于实践"的指导思想，广泛地探索运筹学教学由数学纯思维向实务转化的改革模式。因此，本书具有深入浅出，实例丰富，数据翔实，学以致用等特点，可以供技术、经济、经营、管理等部门的工程技术人员和经济管理人员参考；也可以作为工程管理、经济管理相关专业本专科师生及干部培训的教学参考用书。

工程运筹学

肖维品　主编

责任编辑　谭　敏

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

四川外语学院印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/16　印张：16.75　字数：418千

1999年1月第1版　　1999年1月第1次印刷

印数：1—4000

ISBN 7-5624-1883-7/O·170　定价：18.00元

前　言

自 20 世纪 70 年代末，随着我国“管理热”的兴起，运筹学已成为各高等院校经济及管理专业的一门必修课程。经济与管理专业教学改革的深化，将运筹学课程体系改革推上了一个新的台阶。《管理运筹学》、《经济运筹学》、《工程运筹学》和《实用运筹学》等各种名目的著作纷纷出版问世，推动着运筹学学科建设由数学的纯思维向实务的运用模式的转换，使运筹学正在恢复“源于实践，归于实践”的本来面目，更加增强了运筹学的针对性、实践性和应用性，巩固了运筹学学科建设在管理学科建设体系中的重要地位。

长期以来，作者从事运筹学课程教学，使运筹学超越数学王国的境界而迈入实务的技术方法领域，是作者从事运筹学课程体系改革的主攻方向，也是广大的运筹学教育工作者和运筹学实务者们共同关心、探索、实践、追求的关键问题。作者曾先后撰写了《实用运筹学》、《工程运筹学》等教材并发表了较多有关工程运筹问题的科学论文，其目的都是为了探索运筹学理论教学与应用实践，实现有机的统一，闯出一条运筹学教学改革的新途径，扩展运筹学的适用性领域，使学生能学以致用，举一反三，真正体现运筹学“源于实践，归于实践”的最终目标。

《工程运筹学》作为对物质工程和非物质工程管理的一门工程技术基础学科，它是以“广义”工程运筹问题为其研究对象，故本书具有如下几方面的特色：

第一、“源于实践，归于实践”是本书创作的宗旨，实践——运筹——实践是本书的指南。

第二、超越数学思维境界，代之以比较通俗的逻辑推理，以简化严谨的运筹学数学理论的论证。

第三、从技术方法角度面向读者，使读者易于掌握理解，便于操作，介绍了具有较为广泛应用前景的运筹学方法。

第四、以解决工程运筹问题为核心，案例分析与读者习作相结合，收集了若干典型的工程运筹问题供读者学习参考。

全书共分 10 章，由肖维品主编。绪论、第一章、第六章、第九章、第十章由肖维品执笔；第二章由陈安明执笔；第三章由李远坪执笔；第四章由欧阳安执笔；第五章由杨宜庆执笔；第七章由常陆军执笔；第八章由贺勇执笔。全书插图由柴雪芳绘制。

虽然，本书作者力图在“实践”二字上狠下功夫，但因工程技术与经济管理的复杂性，物质工程与非物质工程运筹问题研究及开发的艰巨性，以及作者对运筹学“源于实践，归于实践”认识的肤浅性，使本书难免存在着这样或那样的缺陷，甚至贻误，盼同行专家及读者赐教。

最后，作者对本书编写出版过程中给予大力支持、提供宝贵意见及相关资料的有关同行专家一并表示谢意。

肖维品

一九九八年六月　于重庆

目　录

绪 论

在现代工商企业、工程建设和政府部门的各项活动中，存在着大量的社会、经济、生产、经营、技术、流通、分配、组织和政策等方面的问题。例如：市场竞争激烈，工程规模宏大，生产资源紧缺，环境污染严重，产品换代频繁，新技术和新工艺不断涌现，企业内外关系复杂，资金筹集与合理流通，生产日益社会化，企业与社会的公平分配，社会经济协调发展等，使领导者在组织生产经济活动与社会物质文化活动中，面临着越来越多的管理决策问题。对于这种管理对象的复杂性和管理环境可变性的严峻挑战，领导者不得不高度重视如何卓有成效地进行科学决策，以达到管理的最终目标。现代管理科学为领导者统筹兼顾地进行科学决策提供出众多的管理科学技术。大量的事实表明，对复杂系统的决策问题，组织高智能的统筹咨询集团(或小组)，是领导者作出科学决策的可靠助手。这种高智能的咨询集团(或小组)，能为领导者从事科学决策提供各种运筹技术(其中包括对确定型决策问题，风险型决策问题和不确定型决策问题的运筹技术)，以及对复杂系统的分析和评价技术，以此作为领导者进行科学决策的依据，从而可以避免因决策失误所造成的严重损失。

运筹学作为一门现代管理科学的基础理论，有着极其丰富的学科内容，是当今运筹分析人员和领导者不可缺少的科学管理技术。而工程运筹学则是专门为从事工程技术、生产和经营管理人员提供出一些常用的运筹技术和有关工程运筹问题的分析示范，以普及和推广运筹学在工程经济技术管理领域内的应用。

第一节 运筹学的形成与发展

“运筹帷幄”的思想可以追溯到远古时代。埃及的金字塔、中国的万里长城等浩大的工程建设，以及古代著名的军事战役都是光辉灿烂的运筹思想的具体体现。从我国众多的历史记载中，如齐王赛马，丁渭修复失火后的皇宫，沈括解决行军运粮问题，李冰父子修建宏伟的四川都江堰工程等都是应用运筹思想的光辉范例。

随着大工业生产的发展，对运筹技术的研究应用出现了一个新的阶段。1914 年英国人兰彻斯特发表了“关于人力和火力优势与胜利之间的关系”的论文；第一次世界大战期间，美国托马斯·爱迪生对商船运行策略的研究；20 世纪初期，哥本哈根电话公司的丹麦工程师爱尔朗进行了自动拨号设备对电话需求影响的实验等。这些都是运筹学早期形成所取得的重要成果，至今仍然是运筹学某些分支学科的基础理论。

运筹学作为一门新兴学科，人们普遍认为是在第二次世界大战期间和大战后才开始逐渐形成和发展起来的。现在它已成为现代科学管理理论的重要组成部分。由于运筹学在管理工程中所处的地位和作用，有时狭义地称管理科学为运筹学。

在第二次世界大战期间，军事运筹学开始形成，并得到发展。1937 年由英国杰出的物理学家布莱开特领导成立了世界上第一个运筹学小组。该组由三名生物学家、两名理论物理学家、

一名军官、一名普通物理学家、两名数学家和一名工程测量员等十一人组成。他们在英国皇家空军战斗指挥部领导下，从事运用雷达确定敌机位置和野外火炮控制设备效能等工作的应用研究。当时，英国人把这种活动称为“运筹学”(Operational Research)。随后，由罗伯特·华生·华特把运筹学引入美国陆军和海军作战部门，专门从事高水平的运筹问题研究。美国人称这种活动为“运行分析”或“运行研究与运行技术”。此后，这种技术陆续传到加拿大，法国等国家中，仍称“运筹学”为 Operations Research。

在第二次世界大战后，随着西方国家经济复兴和科学技术高速发展，工商企业发生了巨大变化，涌现出大量的复杂而新颖的管理问题。于是，工商企业管理者对应用运筹学为生产、经营、技术、流通、分配等方面管理活动服务的兴趣越来越浓厚，使运筹学逐步由军事运筹学转为工商运筹学。但是，在战后的初期，从事工商运筹学的人员较少，进展缓慢。直到 50 年代中期，运筹学在大型企业和大型工程建设中的应用研究才得到比较迅速的发展，出现了许多跨部门，跨企业的运筹组织。如美国联合钢铁公司成立了运筹小组，研究人员多达 100 人以上。电子计算机问世后，运筹学进入了一个新时期。据美国统计，在 500 个最大的工商企业公司中，大部分均采用运筹学理论和方法作为制定企业生产、技术、经营等决策问题的统筹技术。

与此同时，运筹学的学术交流和专业教育的发展更为活跃。1950 年，英国成立了世界上第一个运筹学会；以后美国、法国、加拿大、日本、前苏联等国先后成立了运筹学会。1957 年在英国牛津大学举行了第一届国际运筹学会议。1959 年由美、英、法三国运筹学会组成了国际运筹学联合会，到 1974 年已发展到 21 个国家的运筹学会作为团体会员，同时出版了《国际运筹学文摘》会刊。到目前为止，运筹学学术刊物层出不穷，具有各类特色的运筹学教材和专著大量涌现。随着现代科学管理教育的发展，运筹学已被列为众多国家管理专业教育的一门重要的必修课程。

我国是孕育着丰富的运筹思想的文明古国，但把运筹学作为一门学科加以研究是从 50 年代初期才开始的。60 年代及以后若干年，以华罗庚教授为首的运筹学小组，深入工厂、农村广泛地推广优选法和统筹法，为我国运筹学发展一开始就理论联系实际作出了光辉榜样。自党的十一届三中全会把工作重心转移到国家经济建设方面来后，我国运筹学理论研究及其应用取得了显著成果；学术组织和学术交流活动蓬勃发展；众多的高等院校建立了管理专业，运筹学已成为管理专业和管理干部培训的重要课程。随着政治体制和经济体制改革的深化，运筹学在经济管理、企业生产经营管理和工程建设项目管理诸方面将会发挥出越来越重要的作用。

第二节　运筹学的定义

运筹学从初期形成到目前发展应用时期，由于学科内容的丰富性和实际应用的广泛性，至今尚无统一的科学定义。下面仅介绍几种典型定义，以加深对运筹学学科性质的理解。

美国罗伯特·瑟罗夫撰写的最早的运筹学专著《运筹学导论》中称：“运筹学利用计划方法和多学科专家组合成综合队伍，把复杂功能关系表示成数学模型，其目的是通过定量分析为决策者和揭露新问题提供数据依据。”

英国运筹学会认为：“运筹学是把科学方法应用在指导和管理有关人员、机器、物资及商业、政府、国防方面的资金的大系统中所发生的各种问题，其独特的方法是发展一个科学的系

统模式，列入随机和风险的各种因素的尺度，并应用这种模式预测和比较各种决策、战略、控制方案的效果，其目的是帮助主管人员科学地决定方针和政策。”

美国运筹学会认为：“运筹学所研究的问题，通常是在要求分配有限资源的条件下，科学地决定如何最好地设计和运营人机系统。”

运筹学权威人士丘奇曼认为：“运筹学是运用科学方法、技术和工具来处理系统运行中的问题，使系统的控制得到最优的解决方法。”

我国管理百科全书对运筹学作了如下定义：“运筹学是应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人力、物力、财力等资源进行统筹安排，为决策者提供可靠的最优方案，以实现最有效的管理。”

由上述看出，无论对运筹学作出何种定义，但在描述中都离不开“科学的”、“系统的”、“管理的”、“最优化的”、“决策的”、“模型的”、“数量的”、“分析的”等词语。因此，目前对运筹学的学科性质尚无严格的科学划分。从数学家的角度，把运筹学视为应用数学的一门学科；但从管理工程师角度，则把运筹学视为以数学作为重要定量分析手段的、系统科学范畴内的一门现代管理决策技术，本书是基于后一种观点作为安排全书内容的出发点和最终目标，以向广大的工程技术人员和管理人员提供学习和运用运筹学的参考。故本书取名为《工程运筹学》是比较适宜的。

第三节　运筹学的特点

运筹学是现代管理科学中的一门管理决策技术。从它的研究对象，研究方法、研究目的和内容诸方面都有着自身的明显特点。

一、运筹学是以系统思想和系统方法作为研究解决问题的出发点

任何一种现代管理问题，无论是政府部门的行政管理，或是工商企业生产经营管理，或是对某一建设项目的工程项目管理，都是一项复杂的系统管理过程。这类过程的复杂性表现在过程组成要素的多样性和内外相互影响因素的可变性。因此，人们研究这类问题总是期望能获得良好的效果，以达到管理者的既定目标。这就有必要应用系统思想和方法，把管理过程作为一个整体系统加以研究，其中包括对系统目标、功能、结构、环境等进行详细的探讨，通过建立系统模型，借助于优化技术和计算机技术，以寻求系统的最佳运行方案。

所谓系统是指由若干个单元相互影响、相互联系、相互作用所组成具有一定功能的有机综合体。例如，一个企业，一项生产活动，一项工程建设项目等都可以作为一类系统加以研究。各类系统的复杂性随组成该系统的单元多少、相互影响程度，以及系统与外界环境关系的不同而异。

任何一种系统都具有如下的共同特点：

集合性：表明组成系统要素的总体。单个要素不可能组成一种系统，任何一种系统都必须由两个或两个以上的要素组成。组成要素的多少将直接影响系统的复杂程度。如一支自来水笔，由笔尖、笔管、笔帽等组成，是一种简单系统，而一台自控车床则是一种复杂系统，一项大型工程建设则是一种极复杂系统或巨系统。

目的性：表示任何一种系统都具有确定的功能，以及由这些功能所应达到的一个或多个目标。目的性是建造系统或运营系统的出发点。

相关性：表示系统要素之间的相互联系、相互作用、相互制约的影响关系。由于系统的集合性和相关性，就构成了系统的有序结构，使系统才有可能具有确定的功能。

环境适应性：表示任何一种系统都存在于一定的环境之中。系统与环境之间存在着一定的物流、人流、经济流、能源流、信息流等交换。环境是系统赖以生存的条件，对系统运行提供各种制约条件，是系统的输入源。而系统则对环境产生输出，以实现系统的目标。

整体性：也是描述系统结构的一个重要特征。即是说，任何一个系统都可以分解成若干子系统，各子系统具有自身的功能和分目标。系统的整体性说明，研究系统不是追求局部最优，而是谋求系统整体结合效果最佳。

因此，运筹学正是应用系统的这些特点，通过研究系统结构、环境因素、相互影响，以寻求总体效果最佳。这就是运筹学应用系统观点和方法作为解决问题的出发点。

二、运筹学具有多种学科综合与交叉的特点

研究某种运筹问题，特别是一些比较复杂的运筹问题，不可避免地会涉及到多种学科知识，如数学、经济学、市场学、社会学、工程学、材料学、管理学、计算机科学等。因此，在进行某种运筹问题的探讨时，由于涉及知识的广泛性、综合性和交叉性，在理论研究和实际应用所取得的成果，都是由有关专家共同协作工作的结晶，只有这样才有利于运筹学理论的提炼，以及在实践中的应用和推广。

三、调查研究是运筹学应用的基础

通过对实际问题的调查研究，才有可能明确研究对象的目的、特征、内部结构，以及各种影响因素及其相关关系，从中索取建立运筹模型的有关资料和信息，然后借助于计算机技术和最优化方法，以求得实际问题的最佳解决方案。因此，调查研究是形成运筹问题的源泉，也是求解运筹问题的基础。

四、运筹学是进行科学管理的辅助决策技术

在大量的实际管理活动中，凭借管理者的聪明才干和丰富的管理经验进行决策固然十分重要。然而，对一些复杂问题，仅凭经验难于作出合理的、科学的、有效的决策。一旦决策失误必将造成重大损失。领导者依靠由具有各方面科学知识的人员组成统筹咨询集团，这种由领导者与运筹分析人员组成的有机结合，是当今解决重大社会、经济、生产、经营、技术等管理决策的最佳模式。在这种模式中，运筹人员将采用运筹学等管理科学知识，向领导者提供进行科学决策依据。因此，运筹学是一种辅助的决策技术，是实现决策科学化的重要手段和工具。

综上所述，运筹学是以系统为研究对象，通过调查研究，应用多种学科的综合知识，建立运筹模型，求解模型来获得研究问题的最佳方案，以此作为领导者进行科学决策的依据。这是运筹学研究和解决问题的特点，同时也决定了运筹学的学科性质。

第四节　运筹模型及其建模步骤

一、模型概述

利用模型来研究问题是运筹学的重要特点。模型是对现实事物的客观抽象，高于实际事物，是对实际事物的表示和体现。但是，模型决不是对现实事物的“摄影”，也不是现实事物的“再现”。运筹人员应用模型来研究事物的内在规律，有助于解决实际问题。

(一)模型特点

任何一类模型都必须具有下述特点：

现实性：反映事物现实是模型的首要特点。一旦模型“失真”，将会导致错误结论，造成决策失误的严重后果。

简洁性：运筹问题一般多属于比较复杂或复杂问题，影响问题的内外因素繁多，如果要毫无遗漏地把全部影响因素都考虑到模型中去，往往会造成建模困难或根本无法建立模型。所谓简洁性就是在模型中只考虑那些反映实际事物的主流和本质的因素，而忽略那些非主流非本质的因素，以简化模型结构，利于求解。简洁性与现实性是实现模型合理化的辩证统一。

适应性：是指模型应该具有较大幅度的可修改性，以适应实际事物内外因素变化，从而节省重复建模的时间和资金。

(二)模型种类

运筹学常采用下列主要模型类别：

形象模型：用符号、图表等来描述客观事物的发展规律，如流程图、网络图等。

模拟模型：用便于控制的一组条件来代表真实事物的特征，通过计算机模拟试验反映事物发展状态，以揭示现实事物的发展规律。如采用蒙特卡罗模拟法可以揭示库房物资变动规律等。

数学模型：用字母、数字及其他有关数学符号建立的各种数学表达式，以描述客观事物的特征及其内外影响因素的联系。

数学模型是运筹模型中最常用的形式，是实现数量分析的重要手段。下面将重点介绍数学模型的结构和建模步骤。

二、数学模型的结构

(一)模型要素

在数学模型中包含的基本要素有：

常数：是模型中具有确定数值的量。

参数：在模型中虽无确定数值，但具体取值是已知的量。

变量：在模型中未知的而尚待确定的量。一般分为决策变量和状态变量。决策变量是决策者需要达到预定目标而起控制作用的量，其取值表示出决策者的某种决策行为。状态变量表示研究对象可能发生的特征，其取值表示研究对象的某种既定的特性。状态变量可以分为确定型的、随机型的和不确定型的三种类别，视研究问题的特点而定。

（二）模型结构

数学模型一般由下列两部分组成：

约束条件（简记为S·T）：常用方程式和不等式表示。建立约束条件一般以研究对象内外所受到的限制而定。如物理限制、经济限制、经营限制、资源限制、工艺限制、问题组成结构限制等作为建立约束条件的依据。

目标函数：应用常数、参数和变量等组成表明研究对象功能效果的某些函数关系，以达到决策者预期实现的目标。这种目标可以是单一的，也可以是多个的，其中包含有求目标函数的最大化(max)或求目标函数的最小化(min)。例如生产总成本最小，生产总利润最大等。应用运筹学提供的优化技术，可以求出满足全部约束条件、且又能使目标函数取得最优值的解。这种解称为该问题的最优解。这是运筹分析人员向领导者提供科学决策的依据。

三、建模步骤

建立数学模型虽无确切的工作程序，但是一般可根据下述过程进行：首先阐明研究对象；分析系统内外影响因素，忽略次要的和非本质的因素，抽象出能代替实际问题的理想问题，这种理想问题是对实际问题的简化；然后在理想问题的基础上，采用一定的技术手段和数学方法建立数学模型；最后对所建立的数学模型进行检验，若模型能反映实际问题主要方面和达到一定精度，该模型可以作为辅助决策的分析工具付诸实现；否则，应对模型进行修正或重新建立模型。

对上述过程，可以归纳为如下的建立数学模型的步骤：第一，确定目标；第二，制定工作计划；第三，研究问题的描述；第四，调查研究，确定有关数据和信息；第五，数学模型研制；第六，计算手段的拟定；第七，模型检验，修改或重建；第八，模型实施。

一般来说，建立一个运筹问题的数学模型并非是一件容易的事情，往往比求解模型更为困难。因此，要建立一种比较完美的数学模型是科学的、艺术的和经验的综合结晶。

第五节　工程运筹学研究的内容

运筹学具有庞大的、丰富的学科体系，以国际运筹学联合会会刊《运筹学国际文摘》收编的论文内容为例，按技术分类就有50多种，其中主要包括决策论、对策论、图论、信息论、马尔柯夫过程、网络技术、规划论（含凸规划、分数规划、几何规划、目标规划、整数规划、线性规划、非线性规划、参数规划、二次规划、运输问题、分派问题等）、排队论、动态规划、模拟技术、统计回归、随机过程、时间序列、人工智能、模糊数集、成本-效益分析、数值分析、优化理论、控制过程、有限元分析等。由于理论研究的深化和应用领域的广泛，运筹学学科内容还在逐渐增加，而且正在不断形成许多新的分支学科，有的已从运筹学中独立出来自成体系，成为一门新兴学科。

在现代工程中存在着众多的运筹问题，诸如工程招投标、资金合理使用、稀有资源的最佳利用、市场经营对策、工程计划、工程技术、工程质量、设备组合、劳动力配备、厂址选择等。因此，工程运筹学是以工程系统为其研究对象，着重讨论工程系统的经济、经营、生产、技术等各类活动中的有关运筹问题。本书将致力于为工程类（特别是土木工程类）管理专业本科、专科教育，以及工程技术管理干部培训教育提供学习运筹学和应用运筹学的指导性读物。鉴于我国工

程管理的实际水平，以及在工程管理活动中推广应用运筹学的现状，结合作者多年从事工程运筹学教学实践和在推广应用中的体会，超越纯数学的思维模式，坚持运筹学“源于实践，归于实践”，实现理论与实践的有机统一，以推动运筹学在管理工程中的应用，是编写本书的主要指导思想。出于这些考虑，全书共分十章，其中包括线性规划、对偶问题和灵敏度分析、运输问题、整数规划、非线性规划及其应用、存贮论及其应用、网络计划技术、工程排队系统原理和多目标规划及其应用等。书中特别强调应用环节，对某些繁琐的数学论证作了适当的简化，并列举了大量的工程运筹问题的范例分析；各章末还收集了作者在研究工程运筹问题实践中所简化的若干练习题目，以供读者学习运筹学，应用运筹学时参考。

第一章 线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支。线性规划问题是最早研究、理论较为成熟、运用极其广泛的一类数学规划问题。

早在1936年，前苏联数学家兼经济学家康托诺维奇，在他所著的《管理中的数学方法》一书中，就详细地介绍了线性规划问题。1947年，美国贝尔电话公司工程师G·B·Dantrig提出了单纯形法，对线性规划理论提炼和算法改进作出了卓越的贡献。电子计算机的问世，为线性规划在管理工程各个领域的广泛应用创造了良好的条件。

线性规划问题广泛地存在于工程管理和经济管理的各个方面。它主要研究的问题是在稀缺资源的条件下，如何合理地组织经济活动，使其达到最佳的目标。对于这类问题所建立的数学模型，其目标函数和约束条件均由线性函数组成，则称这类数学规划为线性规划。

本章将介绍线性规划的基本原理、求解方法和在管理工程中的应用。

第一节 线性规划问题及其数学模型

一、问题的提出

下面以生产计划问题为例，说明线性规划的建模步骤、模型特点和模型类别。

例1-1 生产计划问题。

三种产品需经过三种不同加工工序。各种产品每单位需要的加工时间(分钟)、每天各道工序所用设备的加工能力(分钟)和每种产品的单位利润如表1-1所示。

表1-1

工　　序	单位产品加工时间(分钟)			设备加工能力(分钟/每天)
	产品1	产品2	产品3	
1	1	2	1	430
2	3	0	2	460
3	1	4	0	420
利　润(元/单位产品)	3	2	5	

由市场预测知，每天三种产品的总需求量不低于120单位，且所生产的产品都能销售完。问应如何安排三种产品的生产，才能使每天获得的利润最大？

设x_1,x_2,x_3分别为三种产品的每天产量，Z为每天生产的产品全部销售所获取的总利润。由题意知：

目标函数：　　$\max Z=3x_1+2x_2+5x_3$

约束条件(S・T)：

加工能力约束：

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 430$$
$$3x_1 \quad + 2x_3 \leqslant 460$$
$$x_1 + 4x_2 \leqslant 420$$

市场需求约束： $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 120$

非负约束： $x_j \geqslant 0, j = 1,2,3$

这就是一种线性规划问题。

二、线性规划的数学模型

线性规划问题的数学模型可以抽象成下列一般形式：

目标函数：

$$\max(\text{或}\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

约束条件(S・T)：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (\geqslant, =)b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (\geqslant, =)b_2 \\ \quad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (\geqslant, =)b_m \end{cases} \tag{1-2}$$

非负条件： $$x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n \tag{1-3}$$

其中 $b_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$。

由上看出，任何一个线性规划数学模型都由下述三部分组成：

第一，目标函数由线性函数构成，可以求最大值(max)或求最小值(min)；

第二，约束条件由线性函数构成，可以含有“≤”、“≥”或“＝”约束；

第三，全部变量均为非负连续变量。

下面介绍各组成部分的有关术语：

$x_j(j=1,2,\cdots,n)$为决策变量，又称为活动水平，它是待定的控制变量。

$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为结构系数或输入系数，它是已知常数。

$c_j(j=1,2,\cdots,n)$称为价格系数，已知常数。

$b_i(i=1,2,\cdots,m)$称为限定系数，已知常数。

在公式(1-1)至公式(1-3)中，若全部约束条件只含有“≤”约束，这种线性规划数学模型称为规范型；若全部约束条件只含有“＝”约束，则称为标准型。

三、标准型

线性规划标准型规定为求

$$\max(\text{或}\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-4}$$

S・T

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1-5}$$

及非负条件 $x_j \geqslant 0 \quad j = 1,2,\cdots,n$。 (1-6)

其中 $b_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$。

标准型可以写成矩阵形式。求

$$\max(\text{或}\min)Z = CX \tag{1-7}$$

S·T

$$AX = b \tag{1-8}$$

及

$$X \geqslant 0 \tag{1-9}$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为结构系数矩阵。

$b=(b_1,b_2,\cdots b_m)^T$,

且 $b_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$,称为限定系数矩阵。

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$;

$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$

称为价格系数矩阵。

标准型还可以写成向量形式。求

$$\max(\text{或}\min)Z = CX \tag{1-10}$$

S·T

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b \tag{1-11}$$

及

$$x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \tag{1-12}$$

其中

$$P_j = (a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$$

四、将一般型改为标准型

由实际问题建立的线性规划数学模型往往并非标准型。但在讨论线性规划的代数解法时,首先应将非标准型改为标准型。

将非标准型改为标准型主要从事下列工作:

第一,将全部不等式约束改为等式约束条件。

设有一小于等于约束条件,如

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leqslant b_i$$

对每个小于等于的不等式约束,分别引入一个附加变量 $x_{n+i} \geqslant 0$,称为松弛变量,则原来的小于等于不等式约束改为等式约束:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

目标函数中相应于松弛变量 x_{n+i} 的价格系数取值为 0。松弛变量 x_{n+i} 的经济含义可以表示出未被投入生产活动的一部分资源。

又设有一大于等于约束条件,如

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

对每个大于等于约束,分别引入松弛变量 $x_{n+i} \geqslant 0$,则原来的大于等于约束改为等式约束条件:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$$

目标函数中相应于松弛变量 x_{n+i} 的价格系数取值为 0。松弛变量 x_{n+i} 的经济含义可以表示为扣除生产活动中超额投入的资源。

第二，将变量无非负约束改为有非负约束。

设线性规划数学模型中，变量 x_j 无非负要求，称为自由变量。引入附加变量 $x_j^+, x_j^- \geqslant 0$，取

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

代替原数学模型中的 x_j，则将无非负约束变量全部用有非负约束的变量代替。

第三，对某些问题，需要将求最小值问题改为求最大值问题。

若求 $\min Z = CX$

改为求 $\max(-Z) = -CX$

这是因为 $\min Z = -\max(-Z)$，即正量的最小值可以用绝对值相同的负量的最大值代替。

便于后面的讨论，本书所指的标准型均规定为求最大值。

例 1-2 将下列问题改为标准型。

求 $\min Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$

S·T

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \leqslant 10$$
$$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$$
$x_1, x_2 \geqslant 0$，x_3 为自由变量

解 取 x_3^+、x_3^-、x_4、$x_5 \geqslant 0$，且设 $x_3 = x_3^+ - x_3^-$，则可将原问题改为标准型：

求 $\max(-Z) = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^-$

S·T

$$x_1 + 2x_2 - x_3^+ + x_3^- - x_4 = 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_5 = 10$$
$$3x_1 + x_2 - 4x_3^+ + 4x_3^- = 2$$
$$x_1、x_2、x_3^+、x_3^-、x_4、x_5 \geqslant 0$$

第二节 二维问题图解法

图解法简单直观，便于说明线性规划的求解原理，但图解法一般只能求解二维问题。这里所谓“维数”是指数学模型中含有变量的个数。因此，图解法的应用并不广泛。

一、图解法的过程

下面举例说明图解法的步骤。

例 1-3 求 $\max Z = 40x_1 + 50x_2$ (1-13)

S·T

$x_1 \leqslant 10$ (1-14)

$x_2 \leqslant 7$ (1-15)

$2x_1 + 3x_2 \leqslant 24$ (1-16)

$x_1, x_2 \geqslant 0$ (1-17)