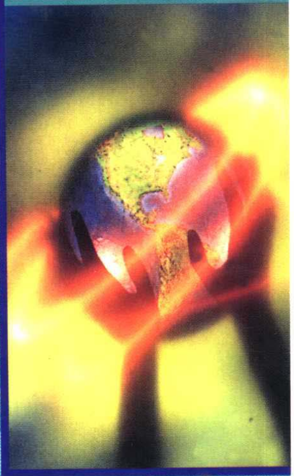
21世纪 自学·复习·考研系列丛书

运筹学试题精选与答题技巧

新大纲
新题型
新思路



YUNCHOUXUE SHITI JINGXUAN

YU DATI JIQIAO

徐永仁 主编

哈尔滨工业大学出版社

21 世纪自学·复习·考研系列丛书

运筹学试题精选与答题技巧

徐永仁　主编

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 简 介

本书按胡运权主编的《运筹学基础及应用》(哈尔滨工业大学出版社,1998年第3版)的内容体系编写。本书编者在哈尔滨工业大学管理学院长期从事运筹学教学工作。

本书根据高等学校管理工程类专业教学指导委员会所颁布的运筹学教学基本要求编写。各章首先明确基本要求,再分为两部分:第一部分为必备知识和考试要点,第二部分为典型例题精选与答题技巧。书末附有部分院校近年的研究生入学试题及答案。

本书旨在帮助高等学校经济管理类专业或其他专业学生学习运筹学课程以及报考经济管理类硕士研究生者复习运筹学,也可供自学运筹学的读者作为参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学试题精选与答题技巧/徐永仁主编.—哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2001.3

ISBN 7-5603-1587-9

Ⅰ.运... Ⅱ.徐... Ⅲ.运筹学-解题 Ⅳ.022-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第53655号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区教化街21号 邮编150006
传 真 0451—6414749
印 刷 地矿部黑龙江测绘印刷中心印刷厂印刷
开 本 787×1092 1/16 印张16 字数409千字
版 次 2001年3月第1版 2001年3月第1次印刷
书 号 ISBN 7-5603-1587-9/F·267
印 数 1~5 000
定 价 18.00元

前　言

运筹学作为高等学校经济管理类专业的一门骨干课程，与其他课程如高等数学、力学、电工学等有所不同，一是前者作为一门科学，其历史仅有五十余年，远不及后者那样悠久；二是运筹学教学在不同的高等学校所开设的内容不尽相同，不像后者那样，在各校的讲授内容几乎相同；三是前者在国内使用的教材更杂一些。

应当指出，决心考研的学生，不论是考硕士生，还是考博士生，必须首先搞清楚所报考学校使用的教材是哪一本或哪几本，要搞清他们所讲课程的内容、体系范围，最好再将近几年来该校招考研究生用过的入学试题找来精心地研究一番，认真地做一做。像运筹学等一些较新的学科，各校讲授的内容、重点都不尽相同，即所谓"各有特色"，各校总有独自的兴趣所在，命题也大都有自己的规律和特点，所以考生首先要解决这个"知己知彼"的问题，接下来才是专心致志地钻研、复习、总结、备考。

作为有 40 年丰富的运筹学教学经验的博士生导师胡运权教授，他担任原国家教委高等学校管理工程类教学指导委员会、教材委员会委员多年。他主编的《运筹学基础及应用》(哈尔滨工业大学出版社出版)是国内最早推出的高等学校供经济管理类专业使用的教材，影响较大，使用面较广(1995 年 6 月的《新闻出版报》曾分几期以整版篇幅连续介绍过我国新兴学科的发展建设及教材专著的出版使用情况，其中 6 月 7 日用整版评介运筹学，对此书曾予评价)。该书 1985 年初版，1993 年再版，1998 年推出第 3 版，先后七次共印发 7 万余册，被多所高等院校选作教材，1995 年荣获国家教委优秀教材二等奖。胡运权教授主编的《运筹学习题集》(清华大学出版社出版)等运筹学教材、教学参考书在国内也获得了广泛赞誉。有鉴于此，当出版社与我们商量选用质量高且影响广泛的配套教材时，我们选定了这本书，自认是恰当的。

由于国内此类教材较杂，所以以上说明是必要的。

无论在国内还是国外，运筹学的教学和研究都大致分成“数学”与“应用”两大走向，而后者主要是运筹学在经济管理中的应用。本书属于后一走向。运筹学作为一门分支众多、内容繁杂的一大学科，常使学生们学习时产生畏难情绪，戏称“运筹运筹，越学越愁”。为了帮助考研以及复习或自学运筹学的读者能更好地消化理解运筹学的基本理论、基本方法，掌握好解题技巧，获得更多的借鉴、学习、参考、锻炼的机会，我们编写了此书。

本书的特点是：

1．内容丰富。覆盖了高等学校经济管理类专业运筹学课程的基本内容。

2．重点突出。突出了经济管理中应用的运筹学的各种模型及相应理论、解法。

3．选题得当。数学专业和经济管理专业对运筹学的内容要求相去甚远，本书属于后者，并充分选择了各种类型的题目进行分析讲解。

本书的第一、二、六、八、十二章由徐永仁编写，第三、四、五、七章由钱国明编写，第九、十一章由李惠杰编写，第十章由胡运权编写。徐永仁任主编。

由于编者水平所限且时间仓促，缺点乃至错误在所难免，诚恳地请读者批评指正。

编　者

2000 年 10 月

目　　录

第一章　线性规划及单纯形法 …………………………… 1

1.1　一般线性规划问题的数学模型 …………………… 1

1.1.1　必备知识和考试要点 …………………… 1

1.1.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 2

1.2　图解法 ………………………………………… 3

1.2.1　必备知识和考试要点 …………………… 3

1.2.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 4

1.3　单纯形法原理 ………………………………… 6

1.3.1　必备知识和考试要点 …………………… 6

1.3.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 7

1.4　单纯形法的计算步骤 …………………………… 8

1.4.1　必备知识和考试要点 …………………… 8

1.4.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 9

1.5　单纯形法的进一步讨论 …………………………… 12

1.5.1　必备知识和考试要点 …………………… 12

1.5.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 13

1.6　改进单纯形法 ………………………………… 17

1.6.1　必备知识和考试要点 …………………… 17

1.6.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 19

1.7　应用举例 ……………………………………… 21

1.7.1　必备知识和考试要点 …………………… 21

1.7.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 22

第二章　线性规划的对偶理论 …………………………… 25

2.1　对偶问题的提出(略) …………………………… 25

2.2　原问题与对偶问题 ……………………………… 25

2.2.1　必备知识和考试要点 …………………… 25

2.2.2　典型例题精选与答题技巧 …………………… 27

2.3　对偶问题的基本性质 …… 29
2.3.1　必备知识和考试要点 …… 29
2.3.2　典型例题精选与答题技巧 …… 32
2.4　影子价格 …… 33
2.4.1　必备知识和考试要点 …… 33
2.4.2　典型例题精选与答题技巧 …… 34
2.5　对偶单纯形法 …… 34
2.5.1　必备知识和考试要点 …… 34
2.5.2　典型例题精选与答题技巧 …… 35
2.6　灵敏度分析 …… 36
2.6.1　必备知识和考试要点 …… 36
2.6.2　典型例题精选与答题技巧 …… 37
2.7　参数线性规划 …… 44
2.7.1　必备知识和考试要点 …… 44
2.7.2　典型例题精选与答题技巧 …… 44

第三章　运输问题 …… 53

3.1　运输问题的一般数学模型 …… 53
3.1.1　必备知识和考试要点 …… 53
3.1.2　典型例题精选与答题技巧 …… 54
3.2　表上作业法 …… 55
3.2.1　必备知识和考试要点 …… 55
3.2.2　典型例题精选与答题技巧 …… 55
3.3　产销不平衡运输问题及应用 …… 61
3.3.1　必备知识和考试要点 …… 61
3.3.2　典型例题精选与答题技巧 …… 62

第四章　整数规划 …… 66

4.1　一般整数规划问题 …… 66
4.1.1　必备知识和考试要点 …… 66
4.1.2　典型例题精选与答题技巧 …… 67
4.2　0-1规划问题 …… 70
4.2.1　必备知识和考试要点 …… 70
4.2.2　典型例题精选与答题技巧 …… 70
4.3　分配问题与匈牙利法 …… 74
4.3.1　必备知识和考试要点 …… 74
4.3.2　典型例题精选与答题技巧 …… 75

第五章 目标规划 …… 79

5.1 必备知识和考试要点 …… 79
5.2 典型例题与答题技巧 …… 80

第六章 图与网络分析 …… 88

6.1 图的基本概念与模型 …… 88
6.1.1 必备知识和考试要点 …… 88
6.1.2 典型例题精选与答题技巧 …… 89
6.2 树图和图的最小部分树 …… 94
6.2.1 必备知识和考试要点 …… 94
6.2.2 典型例题精选与答题技巧 …… 95
6.3 最短路问题 …… 97
6.3.1 必备知识和考试要点 …… 97
6.3.2 典型例题精选与答题技巧 …… 98
6.4 中国邮路问题 …… 106
6.4.1 必备知识和考试要点 …… 106
6.4.2 典型例题精选与答题技巧 …… 106
6.5 网络的最大流 …… 107
6.5.1 必备知识和考试要点 …… 107
6.5.2 典型例题精选与答题技巧 …… 108

第七章 计划评审方法和关键路线法 …… 114

7.1 必备知识和考试要点 …… 114
7.2 典型例题精选与答题技巧 …… 115

第八章 动态规划 …… 122

8.1 多阶段的决策问题(略) …… 122
8.2 最优化原理与动态规划的数学模型 …… 122
8.2.1 必备知识和考试要点 …… 122
8.2.2 典型例题精选与答题技巧 …… 124
8.3 离散确定性动态规划模型的求解 …… 125
8.3.1 必备知识和考试要点 …… 125
8.3.2 典型例题精选与答题技巧 …… 126
8.4 离散随机性动态规划模型的求解 …… 139
8.4.1 必备知识和考试要点 …… 139
8.4.2 典型例题精选与答题技巧 …… 139
8.5 一般数学规划模型的动态规划解法 …… 141
8.5.1 必备知识和考试要点 …… 141
8.5.2 典型例题精选与答题技巧 …… 142

第九章 存贮论 …… 147

9.1 存贮论基础 …… 147
9.1.1 必备知识和考试要点 …… 147
9.1.2 典型例题精选与答题技巧 …… 147
9.2 经济订货批量的存贮模型 …… 147
9.2.1 必备知识和考试要点 …… 148
9.2.2 典型例题精选与答题技巧 …… 148
9.3 具有约束条件的存贮模型 …… 151
9.3.1 必备知识和考试要点 …… 151
9.3.2 典型例题精选与答题技巧 …… 152
9.4 动态的存贮模型 …… 152
9.4.1 必备知识和考试要点 …… 153
9.4.2 典型例题精选与答题技巧 …… 153
9.5 随机存贮模型 …… 155
9.5.1 必备知识和考试要点 …… 155
9.5.2 典型例题精选与答题技巧 …… 155

第十章 排队论 …… 157

10.1 排队系统的基本结构 …… 157
10.1.1 必备知识和考试要点 …… 157
10.1.2 典型例题精选与答题技巧 …… 159
10.2 几个常用的概率分布 …… 160
10.2.1 必备知识和考试要点 …… 160
10.2.2 典型例题精选与答题技巧 …… 161
10.3 生灭过程 …… 163
10.3.1 必备知识和考试要点 …… 163
10.3.2 典型例题精选与答题技巧 …… 165
10.4 最简单的排队系统的模型 …… 166
10.4.1 必备知识和考试要点 …… 166
10.4.2 典型例题精选与答题技巧 …… 171
10.5 M/G/1 的排队系统 …… 178
10.5.1 必备知识和考试要点 …… 178
10.5.2 典型例题精选与答题技巧 …… 179
10.6 服务机构串连的排队系统 …… 181
10.6.1 必备知识和考试要点 …… 181
10.6.2 典型例题精选与答题技巧 …… 181
10.7 具有优先服务权的排队系统 …… 183
10.7.1 必备知识和考试要点 …… 183
10.7.2 典型例题精选与答题技巧 …… 184

第十一章 决策分析 …… 186

11.1 不确定型的决策分析 …… 186

11.1.1 必备知识和考试要点 …… 186

11.1.2 典型例题精选与答题技巧 …… 187

11.2 风险情况下的决策 …… 189

11.2.1 必备知识和考试要点 …… 189

11.2.2 典型例题精选与答题技巧 …… 189

11.3 决策树 …… 193

11.3.1 必备知识和考试要点 …… 193

11.3.2 典型例题精选与答题技巧 …… 194

11.4 决策分析中的效用度量 …… 195

11.4.1 必备知识和考试要点 …… 195

11.4.2 典型例题精选与答题技巧 …… 196

第十二章 对策论 …… 198

12.1 引言(略) …… 198

12.2 二人零和对策的模型 …… 198

12.2.1 必备知识和考试要点 …… 198

12.2.2 典型例题精选与答题技巧 …… 199

12.3 对策问题的解和具有鞍点的对策 …… 200

12.3.1 必备知识和考试要点 …… 200

12.3.2 典型例题精选与答题技巧 …… 200

12.4 优势原则和具有混合策略的对策 …… 202

12.4.1 必备知识和考试要点 …… 202

12.4.2 典型例题精选与答题技巧 …… 203

12.5 用线性规划求解矩阵对策问题 …… 213

12.5.1 必备知识和考试要点 …… 214

12.5.2 典型例题精选与答题技巧 …… 214

附录 …… 218

1987 年哈尔滨工程大学研究生运筹学入学试题及答案 …… 218

1994 年复旦大学研究生运筹学入学试题及答案 …… 222

1997 年哈尔滨工业大学研究生运筹学入学试题及答案 …… 226

1998 年上海交通大学研究生运筹学入学试题及答案 …… 231

1999 年复旦大学研究生运筹学入学试题及答案 …… 236

2000 年哈尔滨工业大学研究生运筹学入学试题及答案 …… 241

第一章　线性规划及单纯形法

运筹学的一大分支是数学规划，而线性规划又是数学规划的重要组成部分。线性规划是数学规划乃至运筹学的最基本内容，相对于其他运筹学分支，线性规划理论完善，方法简便，应用广泛，是任何运筹学书籍首先要阐述的基础知识。

1.1　一般线性规划问题的数学模型

基　本　要　求

1. 理解线性规划的概念。
2. 理解线性规划的一般形式与标准形式，能够把前者转化为后者。
3. 掌握线性规划问题的可行解、最优解和标准形式的线性规划问题的基、基解、基可行解、可行基等重要概念。

1.1.1　必备知识和考试要点

1. 线性规划

定义　求一组变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值，使之满足关于这组变量的若干个线性等式或不等式的约束条件，而且使这组变量的一个线性函数取到极大值(或极小值)。这些变量称为决策变量，所要优化的函数称为目标函数，决策变量是取实数值的连续变量。这样的问题称为线性规划。

2. 线性规划的一般形式与标准形式

一般形式是指目标函数可以是求极大值，也可以是求极小值；约束条件可以是线性等式，也可以是用"≤"号或"≥"号连接左右两端的线性不等式；变量可以有也可以没有非负性的约束，也可以有非正性的约束。

标准形式则规定目标函数为求极大值，约束条件都是线性等式，对每个变量都有非负性要求。注意有的书中标准形式是规定目标函数为求极小值。

3. 线性规划问题的解的定义

可行解　满足线性规划所有约束条件的各变量的一组值 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解　使线性规划的目标函数达到最优值(依照具体问题,或者是极大值,或者是极小值)的可行解称为线性规划问题的最优解。

上述两个概念,对于一般形式、标准形式都适用,而下述五个概念,仅适用于标准形式。

基　设标准形式线性规划的约束方程组为 $AX=b$, $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $r(A)=m$, $m<n$。若 B 是系数矩阵 A 的 m 阶满秩子矩阵,则称 B 是线性规划问题的一个基。B 中的每一个列向量称为基向量,共 m 个,与基向量对应的变量称为基变量。B 以外的列向量称为非基向量,对应的变量称为非基变量,共 $(n-m)$ 个。

基解　在标准形式线性规划的约束方程组中,对应基 B,令所有非基变量都等于零,求解约束方程组 $AX=b$,可惟一得出基变量的一组值,这些值和取零的非基变量的值合起来,称为线性规划问题的基解或基本解。

基的个数不超过 C_n^m,一个基对应一个基解,故基解的个数也不超过 C_n^m。基解中非零分量的个数不会大于约束方程的个数 m。若一个基解的基变量中有取零值的,则此基解称为退化的,否则称为非退化的。

基可行解　对于标准形式的线性规划,如果一个基解 X 还满足变量取值非负性的约束条件 $X\geqslant 0$,则称此基解为基可行解或基本可行解。

可行基　对应于基可行解的基称为可行基。

最优基　如果一个基可行解是最优解,则它所对应的可行基叫做最优基。

1.1.2　典型例题精选与答题技巧

【例 1】　找出如下线性规划问题的所有的基本解,指出哪些是基本可行解。

$$\min z=5x_1-2x_2+3x_3+2x_4$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=3\\x_j\geqslant 0,j=1,\cdots,4\end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&2&1&2\end{pmatrix}=(P_1\ P_2\ P_3\ P_4),$$

$$C_4^2=6$$

因为

$$|P_1\ P_2|=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=2-4=-2\neq 0$$

所以

$$B_1=(P_1\ P_2)\text{构成基,令 } x_3=x_4=0$$

$$\begin{array}{c}x_1\quad x_2\quad b\\ \begin{pmatrix}1&2&7\\2&2&3\end{pmatrix}\end{array}\to\begin{pmatrix}1&2&7\\0&-2&-11\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&\frac{11}{2}\end{pmatrix},\text{得基本解 } X_1=(-4,\frac{11}{2},0,0)^{\mathrm T}$$

用同样的方法,可求出另外 5 个基本解

$$X_2=(\frac{2}{5},0,\frac{11}{5},0)^{\mathrm T}$$

$$X_3=(-\frac{1}{3},0,0,\frac{11}{6})^{\mathrm T}$$

$$X_4=(0,\frac{1}{2},2,0)^T$$
$$X_5=(0,-\frac{1}{2},0,2)^T$$
$$X_6=(0,0,1,1)^T$$

其中 X_2、X_4、X_6 为基本可行解。

注意：虽然基、基解、基本可行解的定义是对标准形式的线性规划而给出的，但不难看出它与目标函数是求极大值还是求极小值并无关联，故此题不必将目标函数改成求极大值，直接计算即可。

【例 2】 线性规划问题是否可算作条件极值问题，它与微积分中讲的条件极值问题有何不同？

解 线性规划问题也可以看成是条件极值问题，即要在满足所有约束的条件下，求目标函数的极值。它与微积分中讲到的条件极值是不同的：(1) 它的约束条件中可以有不等式约束，而后者的限制条件都是等式；(2) 它的约束条件的个数一般地都多于变量的个数，而后者恰恰相反；(3) 它的目标函数与约束条件都是线性的，而后者不必如此。

【例 3】 X^0 是线性规划问题

$$\max z=CX$$
$$\begin{cases}AX=b\\X\geqslant 0\end{cases}$$

的最优解。以上问题中若目标函数中的 C 换成 C^* 后，则问题的最优解变为 X^*。求证：$(C^*-C)(X^*-X^0)\geqslant 0$。

证明 X^0、X^* 在目标函数的系数变化之前之后都是问题的可行解，故有 $CX^0\geqslant CX^*$，即

$$C(X^0-X^*)\geqslant 0,\ -C(X^*-X^0)\geqslant 0 \tag{1.1}$$

同理
$$C^*X^*\geqslant C^*X^0,\text{即 } C^*(X^*-X^0)\geqslant 0 \tag{1.2}$$

(1.1) + (1.2)
$$C^*(X^*-X^0)-C(X^*-X^0)\geqslant 0$$

即
$$(C^*-C)(X^*-X^0)\geqslant 0$$

1.2 图 解 法

基 本 要 求

能正确地按图解法的步骤画出图来解答题目，并会判定解的类型。

1.2.1 必备知识和考试要点

(1) 图解法仅适用于两个变量的线性规划问题，求解时按原来题目对目标函数的优化

要求去求解即可，不必将求极小值化为求极大值。

三个变量的线性规划问题用图解法求解时，可行域是三维空间的多面体，很难用平面上的图形画得清晰准确，目标函数对应的是三维空间中的平面，难以通过平面上画出的立体图形求出最优解。所以，从理论上讲，三个变量的线性规划也有图解法，但实际上不可行。多于三个变量的线性规划涉及到在高于三维的向量空间中求解优化问题，而三维以上的空间已无直观的几何意义，故不存在相应的图解法。

(2) 线性规划问题的解的情况共有四种：

$$\text{有最优解}\begin{cases}\text{i. 有惟一最优解}\\ \text{ii. 有无穷多组最优解}\end{cases}$$

$$\text{无最优解}\begin{cases}\text{iii. 有无界解(有可行解但无最优解)}\\ \text{iv. 无可行解}\end{cases}$$

(3) 线性规划问题如果有最优解，则可行域的某个顶点必定是最优解。为求最优解，可以先计算可行域某个顶点处的目标函数值，再考察它周围相邻顶点的目标函数值是否比这个值更优，如果为否，则该顶点就是最优解（或最优解之一），否则转到比这个点的目标函数值更优的另一顶点，重复上述过程，直到找出对应最优解的顶点。

1.2.2 典型例题精选与答题技巧

【例 4】 对线性规划问题

$$\max\ z = cx_1 + dx_2$$
$$\begin{cases}3x_1 + 4x_2 \leqslant 9\\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

讨论 c、d 的值如何变化，才使该问题可行域的每个顶点依次使目标函数达到最优值。

解 分成下面四种情形分别讨论：

1. $c = d = 0$ 时，显然，此时点 O、A、B、C 都是最优解（此时任何可行解都是最优解）。

2. (1) $c = 0, d > 0$ 时，目标函数等值线为 $x_2 = \frac{z}{d}$，显然，点 C 为最优解。

(2) $c = 0, d < 0$ 时，目标函数为 $x_2 = \frac{z}{d}$，显然，点 O、A 为最优解。

3. (1) $c > 0, d = 0$ 时，目标函数为 $x_1 = \frac{z}{c}$，显然，A 为最优解。

(2) $c < 0, d = 0$ 时，目标函数为 $x_1 = \frac{z}{c}$，显然，O、C 为最优解。

4. (1) $c > 0, d > 0$ 时，目标函数为 $x_2 = -\frac{c}{d}x_1 + \frac{z}{d}$。易知 $\frac{c}{d} > \frac{5}{2}$ 时，点 A 为最优解；$\frac{c}{d} = \frac{5}{2}$ 时，点 A、B、为最优解；$\frac{3}{4} < \frac{c}{d} < \frac{5}{2}$ 时，点 B 为最优解；$\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ 时，点 B、C 为最优解；$\frac{c}{d} < \frac{3}{4}$ 时，点 C 为最优解。

(2) $c > 0, d < 0$ 时，目标函数为 $x_2 = -\frac{c}{d}x_1 + \frac{z}{d}$，点 B 为最优解。

(3) $c<0,d<0$ 时，$x_2=-\frac{c}{d}x_1+\frac{z}{d}$，点 O 为最优解。

(4) $c<0,d>0$ 时，$x_2=-\frac{c}{d}x_1+\frac{z}{d}$，点 C 为最优解。

【例 5】 考虑下述线性规划问题

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2 & ② \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

式中，$1\leqslant c_1\leqslant 3$，$4\leqslant c_2\leqslant 6$，$-1\leqslant a_{11}\leqslant 3$，$2\leqslant a_{12}\leqslant 5$，$8\leqslant b_1\leqslant 12$，$2\leqslant a_{21}\leqslant 5$，$4\leqslant a_{22}\leqslant 6$，$10\leqslant b_2\leqslant 14$，试确定目标函数最优值的下界和上界。

解 因 $1\leqslant c_1\leqslant 3,x_1\geqslant 0$，所以 $x_1\leqslant c_1x_1\leqslant 3x_1$

同理可得：$4x_2\leqslant c_2x_2\leqslant 6x_2$

故 $x_1+4x_2\leqslant c_1x_1+c_2x_2\leqslant 3x_1+6x_2$

因此为求 $\max z$ 的上界，应取 $c_1=3,c_2=6$，此时目标函数等值线的斜率 $k=-\frac{1}{2}$。此等值线沿其法线方向向右上方平移是目标函数的优化方向，而可行域在第一象限，故可行域越是向右上方扩展，$\max z$ 的值就可以越大。

约束①的边界线 $x_2=-\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1+\frac{b_1}{a_{12}}$，它在纵轴上的截距大于零，最大值为 6，其斜率 $k_1\in\left[-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right]$。

约束②的边界线 $x_2=-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1+\frac{b_2}{a_{22}}$，它在纵轴上的截距大于零，最大值为$\frac{7}{2}$，截距 $k_2\in\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{3}\right]$。

于是尽可能大的可行域可认为仅由约束②确定，与①无关。

约束②的边界线又可写为 $x_1=-\frac{a_{22}}{a_{21}}x_2+\frac{b_2}{a_{21}}$，它在横轴上的最大截距为 7，只要取 $a_{21}=2,a_{22}=4,b_2=14$，便可使②的边界线在 x_1,x_2 轴上的截距同时达到最大，此时 $k_1=-\frac{1}{2}=k$，故 $\max z=3\times 7=21$，即为所求上界。

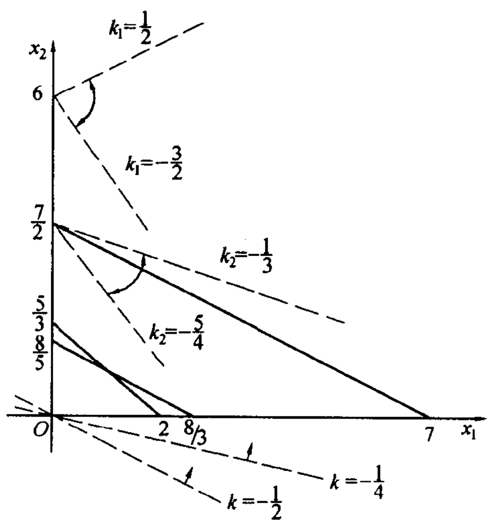


图 1.1

同理，为求 $\max z$ 的下界，应取 $c_1=1,c_2=4$，此时 $k=-\frac{1}{4}$。

约束①的边界线又可写为 $x_1=-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{b_1}{a_{11}}$

(注:$\frac{b_1}{a_{11}} \to +\infty$,当 $a_{11} \to 0^+$;而$\frac{b_1}{a_{11}} \to -\infty$,当 $a_{11} \to 0^-$)

约束①的边界线在横轴上的最小正截距为$\frac{8}{3}$,在纵轴上的最小截距为$\frac{8}{5}$。

约束②的边界线在横轴、纵轴上的最小截距分别为$\frac{8}{5}$,$\frac{5}{3}(>\frac{8}{5})$。

而只要取 $b_1=8, a_{11}=3, a_{12}=5, b_2=10, a_{21}=5, a_{22}=6$ 就可以出现上述截距,此时 $k_1=-\frac{3}{5}$,$k_2=-\frac{5}{6}$,均小于 $k=-\frac{1}{4}$,而$\frac{8}{5}<\frac{5}{3}$,故此时 $\max z=4\times\frac{8}{5}=\frac{32}{5}$,此即所求下界。

1.3 单纯形法原理

基 本 要 求

1. 掌握凸集及其顶点的定义;
2. 掌握书中介绍的几个定理;
3. 理解确定初始基可行解的方法,理解从一个基可行解转换为另一个基可行解的思路及方法;
4. 理解检验数的定义、由来,并会利用检验数判断解的情况(注意此时尚未讲到有人工变量的情形)。

1.3.1 必备知识和考试要点

1. 凸集及其顶点

定义 设 C 是 n 维向量的集合,如果 C 中任意两个点 X_1、X_2 的连结线段上的点都是 C 中的点,则称 C 为凸集。

由于连结点 X_1、X_2 的线段上的点可表为

$$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2 \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

因此凸集定义又可叙述为:若对任何的 $X_1\in C$,$X_2\in C$ 及任意实数 $\alpha\in[0,1]$,总有 $\alpha X_1+(1-\alpha)X_2\in C$,则称 C 为凸集。

定义 凸集 C 中的点 X 若满足下列条件就称为 C 的顶点(或极点):C 中不存在两个不同的点 X_1、X_2,使 X 成为连结 X_1、X_2 的线段的内点。即对任何的 $X_1\in C$,$X_2\in C$,$X_1\neq X_2$ 及任意实数 $\alpha\in(0,1)$,都不会使 $X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$,则称 $X\in C$ 为 C 的顶点。

2. 几个定理

定理 1 若线性规划问题存在可行解,则问题的可行域是凸集。

此定理对线性规划的一般形式、标准形式均适用。

引理 线性规划问题的可行解 $X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是 X 的正分量

所对应的系数列向量线性无关。

定理 2　线性规划问题的基可行解对应线性规划问题可行域的顶点,即二者等价。

定理 3　若线性规划问题有最优解,一定存在一个基可行解是最优解。

定理 4　线性规划问题的一般形式与标准形式等价。

即是说,二者解的情形是完全对应相同的。

3. 检验准则(适用于无人工变量的问题)

(1) 当所有检验数均小于或等于零时,表明现有顶点(基可行解)即为最优解;

(2) 当所有检验数均小于或等于零且某个非基变量的检验数等于零并且对应变量的系数中有正数,则表明该线性规划问题有无穷多最优解;

(3) 如果存在某个正的检验数,而相应变量的系数中没有正数,则表明该线性规划问题有无界解。

1.3.2　典型例题精选与答题技巧

【例 6】　有的书上规定线性规划标准形式的目标函数是求极小值,还有的书上定义检验数为 $z_j - c_j$。试述这种不同规定下的检验最优解的判别法。

解　对于目标函数求极大值的线性规划,若检验数规定为 $c_j - z_j$,则当所有 $c_j - z_j \leqslant 0$ 时为最优解;若检验数规定为 $z_j - c_j$,则当所有 $z_j - c_j \geqslant 0$ 时为最优解。

对于目标函数求极小值的线性规划,若检验数规定为 $z_j - c_j$,则当所有 $z_j - c_j \leqslant 0$ 时为最优解。若检验数规定为 $c_j - z_j$,则当所有 $c_j - z_j \geqslant 0$ 时为最优解。

【例 7】　线性规划的所有可行解的集合是凸集,线性规划的最优解的集合是不是凸集呢?

解　线性规划的最优解的集合也是凸集。这个结论对一般形式、标准形式均成立,只须按凸集定义验证一下便知。

【例 8】　找出如下线性规划问题的所有基本解、基本可行解,并确定最优解。

$$\max\ z = 3x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ 8x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 10 \\ 3x_1 - x_6 = 0 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

解　所给题目已是标准形式

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_3 \boldsymbol{P}_4 \boldsymbol{P}_5 \boldsymbol{P}_6)$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!\ (6-3)!} = 20$$

$$|\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{P}_3| = \begin{vmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times (-12 - 6) = -54 \neq 0,\text{故 } \boldsymbol{B}_1 \text{ 构成基。}$$