

O 12

H 51

《数学高考能力题》

胡炯涛 陈竞如 徐小玉 沈裕方 编

上海交通大学出版社

数学高考能力题

出版：上海交通大学出版社
(淮海中路1984弄19号)

发行：新华书店上海发行所

印刷：常熟市印刷二厂

开本：787×1092(毫米) 1/32

印张：12.375

字数：275000

版次：1989年2月第1版

印次：1989年3月第1次

印数：1—17000

科目：

ISBN7—313—00439—7/G·635

定价：4.00元

前 言

一九八七年初，国家教委修订并公布了《全日制中学数学教学大纲》，明确地指出中学数学的教学目的是：“使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力、逻辑思维能力、和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力。”简言之，一要学点知识，二要培养能力。而对数学学科来说，后一点更为重要。

众所周知，全面检查教学效果的准绳是一年一度的高考，它的考查内容当然也以上述两点为基础，由于高考所独具的“选拔人才”的显著特点，决定了它更偏重对学生能力的测试。

经过十年来的探索，数学高考试卷的结构逐渐趋向于定型，一般都沿用“二、五”结构——前两道是客观命题（采用填空、选择等形式），后五道则由检查能力为主的传统题组成，这就是所谓的“数学高考能力题”。无可讳言，它事实上决定着数学答卷的优劣，从而很大程度上影响着考生的命运。于是，志在必得的中学生沉溺于“题海”而疲于奔命；怀着拳拳之心的园丁们热衷于猜题、押题而流连忘返。可是在大多数情况下事与愿违，劳而无功。年复一年，怨声载道，正常的教学秩序受到了严重的干扰。

能力题真是不可捉摸的吗？这，就是本书要探索的课题。

首先，作者从十年来的入学试卷中选编了七十多道题目，逐题进行了全方位的分析，从中发现能力题不仅在思路上有其内在的规律性，且其内容的覆盖面也有着相对的稳定性。诸如对数、不等式、复数、数列、二次曲线这些能力上要求较高、思路较广的内容，常常反复登台唱着“主角”。

对照上述这面“镜子”，作者凭藉多年的教学实践中悟得对《数学教学大纲》的理解，把《数学教学大纲》中的“具体要求”进行了过细的提炼，而后有针对性地分专题介绍了一些“能力题”所涉及的知识范畴，旨在回答被人们视为畏途的一个问题：如何解数学高考能力题？

至此，你一定会问：“看了这本书就会解能力题吗？”

我想，这个回答只能留给看完这本书的读者。

目 录

第1章 什么叫数学高考能力题	1
第1节 数学高考能力题的提出	1
第2节 数学高考中的能力要求	1
第3节 数学高考能力题的覆盖面	4
第2章 历届高考能力题分析	5
第1节 代数(1—32题)	5
第2节 解析几何(33—52题)	60
第3节 立体几何(53—67题)	117
第4节 三角(68—72题)	141
第3章 如何解数学高考能力题	150
第1节 数与式的大小比较	152
第2节 如何证明代数不等式	160
第3节 最大值与最小值	176
第4节 递推数列的解题方法	188
第5节 复数代数运算的几个问题	201
第6节 复数的几何意义及其应用	208
第7节 三角恒等式的证明	220
第8节 三垂线定理及其应用	233
第9节 两面角与折叠形	248
第10节 多面体与它的体积	263
第11节 旋转体及侧面展开图	275
第12节 曲线的参数方程	288

第13节	如何求轨迹的方程.....	299
第14节	极坐标系中的轨迹方程.....	313
第15节	判别式和韦达定理在解析几何中的应用	320
第16节	解析几何中的最值问题.....	327
第17节	数学归纳法及其应用.....	340
第18节	怎样做证明题?	355
第19节	怎样做综合题?	363
第20节	数学解题中的“常见病”	376

第1章 什么叫数学高考能力题

第1节 数学高考能力题的提出

1987年初，国家教委新颁布的教学大纲指出：“数学是研究现实世界形式和数量关系的科学。……在中学阶段，数学是重要的学科之一。”“中学数学的教学目的是：使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能，培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，以逐步形成运用数学知识来分析和解决问题的能力。”

简言之，中学数学教学的核心是：传授知识与培养能力。这是两个密切不可分的方面，又是深浅不同的两个思维层次，它们是衡量教学效果优劣的主要标志。

按照教学目的两个层次分档，高考数学试题也相应地分为客观题（即选择、填空等形式题）与传统题（问答题与计算题）。一般来说，前者主要检验知识，后者着重考查能力。因此，人们常常把这些传统题称为“数学高考能力题”。

分析并探讨能力题的解法，是本书的宗旨。

第2节 数学高考中的能力要求

纵观1978年（特别是近几年）以来的高考试题，除了全面考查学生的基础知识外，“出活题、考能力”已成为命题的

方向。以1987年上海高考试题为例，反映在逻辑推理、论证方面要求的考分为46分，占总分的38.3%；反映在空间想象、几何作图、作曲线等方面要求的考分为12分，占总分的10%，反映在运算方面要求的考分为62分，占总分的51.7%。为此，在数学教学中大力加强学生能力的培养，已成为众所关注的一个重要问题。

高考中着重考查学生的三大基本能力，即运算能力，空间想象能力和逻辑推理能力。运算能力体现在运算要迅速、正确而且完备。例如，在解“已知圆柱侧面展开图是边长为2和4的矩形，求此圆柱体积”时，应该有二解。又如“解不等式 $\sqrt{2x+5} > x+1$ ”时，不能把 $\sqrt{2x+5} > x+1$ 与

$$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 2x+5 > (x+1)^2 \end{cases}$$

等同起来，而应讨论 x 取值的不同情况，即 $x \geq -1$ 与 $-\frac{5}{2} \leq x < -1$ 两种情况。每一个进入高校的新生都必须具

备较强的空间想象能力，否则很难接受多维空间中抽象的数学知识，很难适应多元函数微积分的学习，对今后工作中的创造精神也会带来不利的影响。近几年来，考查空间想象能力的试题，往往要求学生能把论证与计算结合起来。例如，在计算二面角的平面角时，题目中有时不标出平面角，则需自己作出一个平面角，并证明它就是二面角的平面角。而这一步骤的证明，则往往容易被忽略。逻辑推理能力体现在推理论证要正确，思考问题要周密，表达要确切完整。例如在解“设 c 、 d 、 x 为实数， $c \neq 0$ ， x 为未知数，讨论方程 $\log_{(cx+\frac{d}{x})} x = -1$ 在什么情况下有解。”的试题时，必须对字母 c 、 d 应满足的条件进行探究，并根据 $c > 0$

与 $c < 0$ 的不同情况进行讨论。这种逻辑推理法一般学生是较难做到的。

近几年的高考命题中,要求学生把代数、几何、三角知识沟通起来综合加以应用的试题逐渐增多,难度也逐步提高。它要求学生具有较强的审题能力和理解能力,综合运用多学科、多方面的知识加以分析,从中找出合理简便的解题方法。考查学生分析问题和解决问题的能力。每一张高考试卷的最后两题往往就是属于这种类型的题目。此外,作图能力也是考查学生分析和解决问题能力的另一种表现形式。

高考试题一般都能紧扣教学大纲,重视基础知识和基本运算,但也往往会在试题中设置一些“障碍”,以考查学生思维的敏锐性与严密性。例如,“求函数 $y = 2 \left| \sin \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) \right|$ 的最小正周期。”题中的绝对值符号就是一个“障碍”。若不考虑绝对值,其周期为 $\frac{\pi}{2}$;若考虑绝对值符号这个“障碍”,周期应为 $\frac{\pi}{4}$ 。

1986 年高考试题第 6 题:已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素,试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数:

- (i) $C \subset A \cup B$, 且 C 中含有 3 个元素;
- (ii) $C \cap A \neq \emptyset$ ($\emptyset$ 表示空集)。

这个题目是从集合的角度提出的组合问题,是近几年来突破常规模式,改变提出问题角度的一个典型试题。这类题目要求学生克服思维定势,认真理解题意,从多方面去考察问题,探索解决问题的方法。是考查学生思维灵活性的新

题目。

初等数学，从它的总体来说是研究常量的数学，但其中也充满了运动和变化的思想，如曲线与方程，轨迹的探求，函数的研究等等。1987年上海高考题的第5、6、7题即属此例。为了适应今后学习高等数学的需要，为了适应数学这门学科的发展及现代化的需要，运用“变换”、借助“参数”、从递推的角度研究数列问题以及集合等反映近代数学观点的内容，在高考试题中均有出现，这种反映学生对数学思想理解水平的题目，自然是考察学生能力的试金石。

第3节 数学高考能力题的覆盖面

数学高考能力题的覆盖面是非常大的。作为重点考查能力的题目，又往往集中考查一些重点内容，这些内容都是与今后学习高等数学的需要相适应的。如对数、复数、不等式、直线方程、求轨迹方程、空间线面关系、数列、二次曲线、三角变换等，几乎每届必考。

下一章中选编了1978年以来各届高考试题中的能力题，并作了较为详尽的分析。

第2章 历届高考能力题分析

第3节 代数(1-32)题

1. 设1980年底我国人口以10亿计算。

(1) 如果我国人口每年比上一年平均递增2%，那么到2000年底将达到多少？

(2) 要使2000年底我国人口不超过12亿，那么每年比上一年平均递增率最高是多少？(1981年理科题)

下列对数值可供选用

$\lg 1.0087 = 0.00377$	$\lg 1.0092 = 0.00396$	$\lg 1.0096 = 0.00417$
$\lg 1.0200 = 0.00860$	$\lg 1.2000 = 0.07918$	$\lg 1.3098 = 0.11720$
$\lg 1.4568 = 0.16340$	$\lg 1.4859 = 0.17200$	$\lg 1.5157 = 0.18060$

解法：(1) 设所求人口数是 x (亿)

则 x 是等比数列： 10×1.02 , 10×1.02^2 , $\dots$ ，的第20项，

即 $x = 10 \times (1.02)^{20}$

上式两边取对数，得

$$\lg x = 1 + 20 \lg 1.02 = 1.1720$$

$\therefore x = 14.859$ (亿)；

(2) 设人口每年比上年平均递增率最高是 $y\%$ ，

按题意得： $10 \times (1 + y\%)^{20} \leq 12$ ，

即 $(1 + y\%)^{20} \leq 1.2$ 。

根据对数函数的单调递增性，对上式两边取对数得

$$20\lg(1+y\%) \leq \lg 1.2,$$

$$\text{即 } \lg(1+y\%) \leq 0.00396,$$

$$\therefore 1+y\% \leq 1.0092,$$

$$y\% \leq 0.0092.$$

答：到 2000 年底我国人口将达到 14.859(亿)，

每年比上年人口平均递增率最高是 0.92%。

分析：运用数列知识解决实际问题，不可乱套公式。应逐项分析、找出规律、再列计算式。此题若乱套公式 $x = a(1+q)^n$ 往往会把项数 n 搞错。

在解决有关等比数列的实际问题时，必须分清两点：一是求 a_n 还是求 s_n ；二是项数 n 应该是多少，学生在解此类题时错得最多的也就是这点。

从 $(1+y\%)^{20} \leq 1.2$ 变成 $20\lg(1+y\%) \leq \lg 1.2$ 时必须说明理由。

常用对数首数尾数的概念不清是解这类计算题时产生错误的重要原因。

2. 设对所有实数 x ，不等式

$$x^2 \cdot \log_2 \frac{4(a+1)}{a} + 2x \cdot \log_2 \frac{2a}{a+1} + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$$

恒成立，求 a 的取值范围 (1987 年全国考题)

解：由题意得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{a+1} > 0 \end{array} \right. \quad \text{①}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log_2 \frac{4(a+1)}{a} > 0 \end{array} \right. \quad \text{②}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(2 \log_2 \frac{2a}{a+1} \right)^2 - 4 \log_2 \frac{4(a+1)}{a} \cdot \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} < 0 \end{array} \right. \quad \text{③}$$

令 $z = \log_2 \frac{2a}{a+1}$ 则③式变为

$$z^2 - (\log_2 8 - z)(-2z) < 0.$$

化简为 $z(6-z) < 0$

则 $z > 6$ 或 $z < 0$ ④

由② $\log_2 8 - z > 0$,

$$\therefore z < 3$$
 ⑤

由④⑤有 $z < 0$

即 $\log_2 \frac{2a}{a+1} < 0$,

$$\therefore \frac{2a}{a+1} < 1$$

解之得 $-1 < a < 1$, ⑥

由① $a > 0$ 或 $a < -1$ ⑦

$\therefore$ 由⑥⑦得 a 的取值范围为

$$0 < a < 1.$$

分析:

本题实质上是考虑带有参数的二次三项式的不等式 $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) > 0$ 对于任意 x 均成立的问题, 结合该不等式的定义域, 确定 a 的取值范围。

若一开始就想消去对数符号, 问题便复杂了。要能正确求出 a 的取值范围, 必须熟悉对数的性质, 具有熟练的解不等式组的技巧。在求解③式时, 不用变量代换 $z = \log_2 \frac{2a}{a+1}$

便不易达到目的。(也可以令 $N = \frac{a}{a+1}$) 解对数不等式应

该考虑定义域。解题时不要疏忽。

此题还有如下简捷解法:

因为对于一切 $x \in \mathbf{R}$, 不等式恒成立.

所以当 $x=0$ 时, 不等式也成立.

$$\text{则} \quad \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$$

$$\text{即} \quad \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 1$$

$$\text{亦即} \quad 0 < \frac{4a^2}{(a+1)^2} < 1$$

$$\text{由定义域得} \quad \frac{2a}{a+1} > 0$$

$$\therefore 0 < \frac{2a}{a+1} < 1.$$

由此解得 $0 < a < 1$.

3. 设 $0 < x < 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, 比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小。(要写出比较过程)

(1982年考题)

证明一: (1) 当 $a > 1$ 时, 有 $\log_a(1-x) < 0$,

$$\log_a(1+x) > 0,$$

$$\therefore |\log_a(1-x)| = -\log_a(1-x)$$

$$|\log_a(1+x)| = \log_a(1+x)$$

$$\text{于是} \quad |\log_a(1-x)| - |\log_a(1+x)|$$

$$= -\log_a(1-x) - \log_a(1+x)$$

$$= -\log_a(1-x^2)$$

$$\because a > 1, \quad 0 < 1-x^2 < 1.$$

$$\therefore -\log_a(1-x^2) > 0$$

$$\therefore |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|;$$

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,

$$\text{有 } |\log_a(1-x)| = \log_a(1-x),$$

$$|\log_a(1+x)| = -\log_a(1+x)$$

$$\text{于是 } |\log_a(1-x)| - |\log_a(1+x)|$$

$$= \log_a(1-x) + \log_a(1+x)$$

$$= \log_a(1-x^2)$$

$$\because 0 < a < 1, \quad 0 < 1-x^2 < 1$$

$$\therefore \log_a(1-x^2) > 0$$

$$\therefore |\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|。$$

综合(1)、(2)可知, 当 $0 < x < 1$, $a > 0$, $a \neq 1$ 时, 恒有 $|\log_a(1-x)| > |\log_a(1+x)|$

$$\text{证明二: 设 } A = \frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|} = \left| \frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)} \right|$$

$$= |\log_{1+x}(1-x)|$$

$$= -\log_{1+x}(1-x) \quad (\because 0 < 1-x < 1)$$

$$= \log_{1+x} \frac{1}{1-x}$$

$$= \log_{1+x} \frac{1+x}{1-x^2}$$

$$= \log_{1+x}(1+x) - \log_{1+x}(1-x^2)$$

$$= 1 + [-\log_{1+x}(1-x^2)] > 1$$

$$(\because 1+x > 1, \quad 0 < 1-x^2 < 1, \quad \log_{1+x}(1-x^2) < 0)$$

$$\text{证明三: 设 } y = \log_a^2(1-x) - \log_a^2(1+x)$$

$$\text{则 } y = [\log_a(1-x) + \log_a(1+x)] \cdot$$

$$\cdot [\log_a(1-x) - \log_a(1+x)]$$

$$= \log_a(1-x^2) \cdot \log_a \frac{1-x}{1+x}$$

1) 当 $a > 1$ 时,

$$\because 0 < 1 - x^2 < 1, \quad \therefore \log_a(1 - x^2) < 0$$

又 $\because 1 + x > 0, 1 - x > 0$, 且 $1 + x > 1 - x$

$$\therefore 0 < \frac{1 - x}{1 + x} < 1$$

$$\therefore \log_a \frac{1 - x}{1 + x} < 0,$$

则 $y > 0$;

(2) 当 $0 < a < 1$ 时,

$$\log_a(1 - x^2) > 0, \quad \log_a\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) > 0$$

则 $y > 0$;

综合(1)(2)恒有 $y > 0$,

即恒有 $\log_a^2(1 - x) > \log_a^2(1 + x)$,

$$\therefore \sqrt{\log_a^2(1 - x)} > \sqrt{\log_a^2(1 + x)},$$

$$\therefore |\log_a(1 - x)| > |\log_a(1 + x)|.$$

分析:

比较两个实数的大小,一般是作差,再将差式化为积式、商式或完全平方式,然后确定它的符号。

题中两个实数都带有绝对值符号。应该根据绝对值符号内实数的正负,先脱去绝对值符号。然后根据底数 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 的不同情况进行讨论,以决定 $\log_a(1 - x)$ 与 $\log_a(1 + x)$ 的符号。也可以利用 $|a| = \sqrt{a^2}$, 先比较 $\log_a^2(1 - x)$ 与 $\log_a^2(1 + x)$ 的大小。

4. 已知函数 $f(x)$ 对其定义域内的任意两个实数 a, b , 当 $a < b$ 时, 都有 $f(a) < f(b)$ 。试用反证法证明: 方程

$f(x)=0$ 至多有一个实数根。(1985年上海考题)

证法：假设方程 $f(x)=0$ 至少有两个不相等的实根 x_1 和 x_2 ，不妨设 $x_1 < x_2$ ，

则 $f(x_1)=0$ ， $f(x_2)=0$ 。

$$\therefore f(x_1)=f(x_2)$$

但根据已知条件，由 $x_1 < x_2$ 应有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，从而得出矛盾。

所以方程 $f(x)=0$ 至多有一个实数根。

分析：

对于“至多”、“至少”一类的问题可以考虑用反证法。这点已在试题中点拨清楚了。矛盾的关键在于“方程有根 x_0 ，则有 $f(x_0)=0$ 。”

5. 已知函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$ ($m \in R$)

(1) m 为何值时， y 的极值是 0？

(2) 求证：不论 m 是什么数值，函数图象(即抛物线)的顶点都在同一条直线 l_1 上，画出 $m=-1, 0, 1$ 时抛物线的草图来验证这个结论。

(3) 平行于 l_1 的直线中，哪些与抛物线相交，哪些不相交？求证：任一一条平行于 l_1 而与抛物线相交的直线，被各抛物线截出的线段都相等。(1978年考题)

解：(1) 用配方法

$$y=x^2+(2m+1)x+m^2-1=\left(x+\frac{2m+1}{2}\right)^2-\frac{4m+5}{4}$$

$$y \text{ 的极小值为 } -\frac{4m+5}{4}$$

$$\text{令 } -\frac{4m+5}{4}=0, \quad \therefore m=-\frac{5}{4}.$$