

0342-53/1

10773

梁板壳静动力学 译文集(I)

翁智远 主编

同济大学出版社

梁板壳静动力学译文集

(I)

翁智远 主编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书由十二篇论文组成。前十篇论述了有关面结构（如板和壳等）与连续介质（如水、土壤、岩石）在冲击波压下的相互作用；后两篇讨论了开孔压力容器因地震振动或飞机撞击的响应问题。论文所涉及的内容均属国内外应用力学界正在探讨并亟需解决的问题。本书可供高等院校和工程技术部门有关专业人员参考。

责任编辑 洪建华
封面设计 王肖生

梁板壳静动力学译文集(I)

翁智远 主编
同济大学出版社出版
(上海四平路 1239 号)
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 10 字数: 256 千字
1986年3月第1版 1986年3月第1次印刷
印数: 1—4000 科技新书目: 115—238
统一书号: 13335·010 定价: 1.60 元

前 言

《梁板壳静动力学译文集》自前年八月（内部）出版以来，曾得到国内同行和一些学者、专家的好评，这给我们科研小组以极大的鼓励和鞭策。在总结过去经验的基础上，我们又选译了十二篇重要的文献在这一期里刊出，主要内容是有关面结构（板与壳）与连续介质（水、土壤、岩石）在冲击波压下的相互作用问题，计有十篇，另外两篇分别是开孔压力容器因地震引起的振动和飞机撞击设备的响应。据编者所知，这里所涉及的内容均是当前国内外应用力学界十分关心而又是工程和工业建设中亟待解决的紧迫问题。

限于我们的经验与水平，可能有译得不够准确的地方，恳切地希望读者批评指正。

同济大学 翁智远科研小组

1985年8月

目 录

前言

1. 声学平面波与弹性圆柱壳瞬态相互作用的精确分析—H. Huang (1)
2. 瞬态声学波对弹性圆柱壳的激发—T. L. Geers (14)
3. 冲击波对于潜浸水中的充满流体容器的传递—A. J. Kalinowski (30)
4. 埋置的圆柱壳的动力响应—R. Parnes (51)
5. 在弹性介质中圆柱壳附近的压力波的衍射—M. L. Baron, R. Parnes (66)
6. 爆炸波对球形壳片的作用—P. Г. Якупов (85)
7. 球面爆炸波对平板的作用—P. Г. Якупов (91)
8. 爆炸波对板的作用—P. Г. Якупов (96)
9. 爆炸波对圆柱片的作用—P. Г. Якупов (101)
10. 地震环境下埋管的动力行为—S. K. Datta, A. H. Shah, N. El-Akily (107)
11. 由地震所引起开孔和有裂纹的压力容器的振动—H. T. Tezduyar,
T. Ariman, L. H. N. Lee (118)
12. 飞机撞击所引起的设备响应—J. P. Wolf, K. M. Bucher, P. E.
Skrikerud (124)

声学平面波与弹性圆柱壳瞬态相互作用的精确分析*

H. 黄

本文把平面声波和潜浸弹性圆柱壳瞬态相互作用的线性问题的控制微分方程组变换为第二类 Volterra 积分方程组。用逐步积分的格式解该积分方程组,在吉布现象影响级数解的范围内和数值截断与舍入误差的范围内精确地得到该问题的数值结果,揭示了壳体瞬态响应的详细特征。

引 言

具有垂直波前的平面波与无限长弹性圆柱壳瞬态相互作用问题首先由 Carrier^[1] 用积分变换和级数解技巧给予系统地阐述。

Mindlin 和 Bleich^[2] 首先对横向阶跃入射波的情况给出了早期渐近解,级数解取前三个振型。由于熟知的吉布现象 (Gibb's phenomenon)^[3],表示阶跃入射波的级数不适合波前的间断,因而级数技巧不能用来计算壳体径向加速度初始值。为了克服这一困难,Payton^[4] 应用双重积分变换的技巧采用最速下降法,获得了壳体和流体运动早期总响应的渐近解,而不是横态响应。

Haywood^[5] 引进流体压力和柱面波速度之间的一个近似关系式,并用它得到了壳体响应前三个振型的近似解。

用等高线积分术来计算反演积分变换, Murray^[6] 得到了与刚体运动相对应的零浮力壳的第二振型精确解。Forrestal^[7] 得到了与壳体轴对称变形相应的第一振型精确解。对于第三振型,Forrestal 用了变换解答的近似极点,因此,对该振型的结果似乎不很精确。

好象除了零浮力壳体的早期相互作用和刚体响应外,前面所述的结果都没有对横向平面波与弹性圆柱壳相互作用提供清楚的物理描述。为了从物理上更清楚地洞悉瞬态和振动响应以及入射波场的性质,就要求较完备和较严格的问题解和对不同材料特性作一些参数研究。

如前述,由于吉布现象,级数解不利于精确计算壳体初始加速度和初始压力荷载。然而,当表示入射波的有限级数项数取得足够多时,在间断面后的附加“法兰”宽度将小到趋近消失,这样和最小二乘法的计算结果就没有差别了^[3]。因此,壳体挠度级数和速度级数可望得到均匀收敛,把采用足够多项数的精确级数解和由 Payton 近似法得到的早期加速度和压力组合起来,可以获得该问题较完整的解。当然,欲得到这一精确级数解的最直接的方法应该是应

*译自: "An Exact Analysis of the Transient Interaction of Acoustic Plane Waves with a Cylindrical Elastic Shell," by H. HUANG, Journal of Applied Mechanics, Vol. 37, No. 4, December 1970.

用变换解答的精确复极点以等高线积分算出反演积分变换的值。但是，要找到精确的极点值是相当困难的，除非能够容易地确定与这些极点相当接近的近似值^[8]。再者，这些极点会因为壳体和周围介质性质不同而有不同的值，因此，等高线积分是相当困难和无效的。

本文给出这样阐述的一种精确方法：把决定壳体挠度和波压级数解的各振型系数的基本微分方程简单地变换为第二类 Volterra 积分方程。Nielsen^[9]为应用于超声波干涉问题而详细制作的特殊函数表建立积分方程的核。用逐步积分的格式求解积分方程。这一方法对参数研究也很有效，全部计算过程十分简单，而且能容易控制以得到高的精度。

在本文完成时，Geers^[10]在一文中引进了模态残余势来构成壳体模态运动的控制方程，这是一个含有一阶、二阶及三阶导数的卷积积分-微分方程，即使对一个已简化的壳体方程也是如此。本文作者认为，他的公式把问题弄复杂了，是不需要的。他的数值结果似乎也没有清晰地显示出模态位移在入射波通过后的振动性质以及在时间充分大时或者是在波正好开始到达圆柱壳背后时壳体总速度和应变响应的渐近行为。因此，就本文作者看来，他的结果仍然是不够完备的。

由于采用了较为一般形式的壳体方程，本文的 Volterra 积分方程就比较直接，并且还比前面提到的微分-积分方程更容易进行数值处理，本文给出了精确而又充分的级数解，它适合于水中零浮力壳和正浮力壳承受阶跃和指数衰减入射波情况。本文还展示了壳体总的运动和应力响应的完整图象。

数 学 公 式

图1是无限长圆柱壳横截面简图，壳体周围是声学介质无限体。笛卡尔坐标系和柱坐标系是这样定位的，即入射波沿 x 轴负方向运动。用未搅动密度 ρ ，声速 c 来完整描述周围介质各向同性、均匀的特性。认为壳体是由各向同性和弹性材料制成的，其特征为：中面半径 a ，半厚度 h ，杨氏模量 E ，泊松比 ν ，密度 ρ_0 。对于本文的二维问题，壳体中面在 z 轴方向的位移 δ_z 不和径向位移 δ_r 及环向位移 δ_θ 相耦合，因此不必考虑。为清楚起见，引进下列无量纲量。

$$\begin{aligned} R &= r/a, \quad T = ct/a, \quad X = x/a, \quad w = \delta_r/a, \\ v &= \delta_\theta/a, \quad P(r, \theta, t) = p(r, \theta, t)/\rho c^2, \\ M &= \rho a / (2h\rho_0), \quad C^2 = E / [\rho_0(1-\nu^2)c^2]. \end{aligned} \quad (1)$$

在式(1)中， ξ 是有量纲时间座标。 $p(r, \theta, t)$ 表示有量纲总压力场。调整时间座标，使得入射波的波阵面在 $T=0$ 时冲击到 $(\theta=0, R=1)$ 处。任意平面入射波能用数学形式表示为：

$$\begin{aligned} p^{i\infty c}(R, \theta, T) &= \Omega F(X-1+T)u(X-1+T) \\ &= \Omega F(R \cos \theta - 1 + T)u(R \cos \theta - 1 + T) \end{aligned} \quad (2)$$

其中， F 是宗量的任意函数， Ω 是衡量波阵面强度的常数， u 是 Heaviside 阶跃函数。

壳体周围介质的合压力场 $P(R, \theta, T)$ 由两部分组成：入射波压力 $p^{i\infty c}(R, \theta, T)$ 和散射，

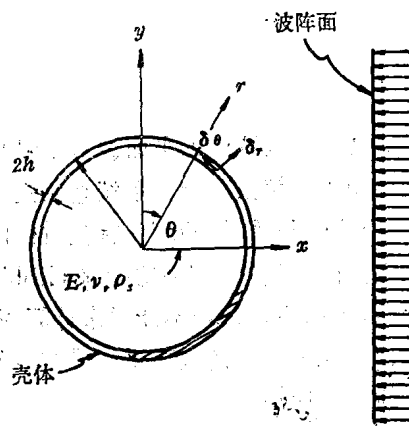


图1 问题的几何图形

辐射波压力 $p^{'''}(R, \theta, T)$, 后者是由于介质中壳体作为一个固定阻碍物存在且有随时间变化的刚体运动和弹性运动而产生的, 即

$$P(R, \theta, T) = P^{'''}(R, \theta, T) + P^{''''}(R, \theta, T) \quad (3)$$

对于线性问题, $P^{''''}$ 和 $P^{''''}$ 分别满足波动方程。由方程(2)所定义的入射波到达时间的选择, 使问题对于 w, v , 和 $P^{''''}$ 有零初始条件。

在壳体与流体界面上法向速度的连续条件得到边界条件

$$\text{在 } R=1 \text{ 上} \quad -\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial^2 w}{\partial T^2} \quad (4)$$

波压和壳体位移可展开成下列傅立叶级数^[11]:

$$\begin{aligned} P(R, \theta, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(R, T) \cos n\theta \\ p^{''''}(R, \theta, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{''''}(R, T) \cos n\theta \\ p^{'''''}(R, \theta, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{'''''}(R, T) \cos n\theta \\ w(\theta, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(T) \cos n\theta \\ v(\theta, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(T) \sin n\theta \end{aligned} \quad (5)$$

在圆柱坐标中, 对 $P^{''''}$ 解波动方程, 利用方程(2)的级数展开式, 并应用边界条件, 容易得到总压力场的拉普拉斯变换:

$$\begin{aligned} \bar{P}(R, \theta, S) &= \Omega f(S) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \exp(-s) I_n(SR) \cos n\theta \\ &\quad - \Omega f(s) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \exp(-s) \frac{I_n'(S) K_n(SR)}{K_n'(s)} \cos n\theta \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S \bar{w}_n K_n(SR)}{K_n'(S)} \cos n\theta \end{aligned} \quad (6)$$

其中, 字母上方带有一横的量表示在变换以后的域内, S 是拉普拉斯变换参数, $I_n(s)$ 和 $K_n(s)$ 分别代表第一和第二类修正的贝塞耳函数, 右上角有一撇的表示贝塞耳函数对其宗量的导数。

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & n=0 \text{ 时} \\ 2 & n>0 \text{ 时} \end{cases} \quad (7)$$

$f(s)$ 是方程(2)中 $F(\tau)$ 的拉氏变换, 如果入射波是阶跃波, 则 $f(s) = 1/s$ 。

对本问题壳体运动方程可写为^[11]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_n}{dT^2} + A_n w_n + B_n v_n &= -M P_n(1, T) \\ \frac{d^2 v_n}{dT^2} + C_n v_n + D_n w_n &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $n=0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} A_n &= c^2 [1 + n^4 h^2 / (3a^2)] \\ B_n &= D_n = nc^2 [1 + n^2 h^2 / (3a^2)] \\ C_n &= n^2 c^2 [1 + h^2 / (3a^2)] \end{aligned} \quad (9)$$

在方程(8)的推导中,壳体中面的长度及剪切相对变化、中面曲率和扭率的变化都考虑在内^[11]。因此,这一形式的壳体方程极为一般,在壳体理论的Kirchoff假设范围内^[12],它决定壳体精确的弹性行为。尽管本文作者选择采用这样形式的壳体方程,但决不是说本文所发展的解法和步骤对任何形式的线性壳体方程不加限制。

具有零初始条件的方程(8)的拉氏变换是:

$$\begin{aligned}(s^2 + A_n)\bar{w}_n + B_n\bar{v}_n &= -M\bar{P}_n(1, s) \\ (s^2 + C_n)\bar{v}_n + D_n\bar{w}_n &= 0\end{aligned}\quad (10)$$

应用方程(6),并消去 \bar{v}_n ,从方程式(10)得到

$$\begin{aligned}& [s^4 + (A_n + C_n)s^2 + (A_nC_n - B_nD_n)]\bar{w}_n(s) \\ &= M(s^2 + C_n)\bar{P}_n(1, s) = -M(s^2 + C_n)[\Omega f(s)\epsilon_n \exp(-s) \\ & \times I_n(s) - \Omega f(s)\epsilon_n \exp(-s)I'_n(s)K_n(s)/K'_n(s) \\ & - s\bar{w}_nK_n(s)/K'_n(s)].\end{aligned}\quad (11)$$

把上述方程中的有关项合并,并应用有关修正的贝塞耳函数的Wronskian关系式,变换后的径向位移傅立叶分量解可写为

$$\bar{w}_n(s) = \frac{sf(s)\Omega\epsilon_n M(s^2 + C_n)e^{-s}}{s^2\{[s^4 + (A_n + C_n)s^2 + (A_nC_n - B_nD_n)]K'_n(s) - M(s^2 + C_n)sK_n(s)\}}\quad (12)$$

从(12)中能明显地看出,如果因子 $sf(s) = 1$,它就是入射波为阶跃平面波时的解答。因此,首先就能找到阶跃波情形下 $\bar{w}_n(s)$ 的逆变换,并且运用线性迭加原理就能得到任意时间入射波特征函数 $F(X-1+T)$ 的解。

解 法

如在前言中讨论的那样,直接从方程(12)应用正规的拉氏逆变换过程来求 $\bar{w}_n(s)$ 的逆变换形式是非常困难和无效的。 $w_n(T)$ 的精确解能够通过下列步骤将方程(11)变换为积分方程来求得。令 $sf(s) = 1$,并在方程(11)两边都加上 $M(s^2 + C_n)\bar{w}_n$,经重新整理可得到如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{w}_n}{\Omega} &= \frac{-M(s^2 + C_n)}{s^4 + Ms^3 + (A_n + C_n)s^2 + MC_ns + (A_nC_n - B_nD_n)} \\ & \times \left\{ \frac{\epsilon_n \exp(-s)}{s} I_n(s) + \frac{\epsilon_n \exp(-s)}{s} I'_n(s) \right. \\ & \left. - \frac{\epsilon_n \exp(-s)}{s} I'_n(s) \left[\frac{K_n(s)}{K'_n(s)} + 1 \right] \right\} \\ & + \left\{ \frac{Ms(s^2 + C_n)}{s^4 + Ms^3 + (A_n + C_n)s^2 + MC_ns + (A_nC_n - B_nD_n)} \right. \\ & \left. \times \left[\frac{K_n(s)}{K'_n(s)} + 1 \right] \right\} \frac{\bar{w}_n}{\Omega}\end{aligned}\quad (13)$$

方程(13)中第一对大括号中前两项的逆变换很容易借助标准的拉氏变换表找到,它们是

$$\begin{aligned}g_o(T) &= L^{-1}[\exp(-s)I_o(s)/s] \\ &= [\cos^{-1}(1-T)]/\pi \quad \text{当 } 0 \leq T \leq 2 \\ &= 1 \quad \text{当 } T > 2\end{aligned}\quad (14)$$

$$g_n(T) = L^{-1}[2\exp(-s)I_n(s)/s]$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin [n \cos^{-1}(1-T)] / (n\pi) && \text{当 } 0 \leq T \leq 2, n > 0 \\
 &= 0 && \text{当 } T > 2, n > 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 G_0(T) &= L^{-1}[\exp(-s)I'_0(s)/s] \\
 &= [T(2-T)]^{1/2} / \pi && \text{当 } 0 \leq T \leq 2 \\
 &= 0 && \text{当 } T > 2
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 G_1(T) &= L^{-1}[2 \exp(-s)I'_1(s)/s] \\
 &= \{\cos^{-1}(1-T) + (1-T)[T(2-T)]^{1/2}\} / \pi && \text{当 } 0 \leq T \leq 2 \\
 &= 1 && \text{当 } T > 2
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 G_n(T) &= L^{-1}[2 \exp(-s)I'_n(s)/s] \\
 &= \frac{2\{n(1-T) \sin [n \cos^{-1}(1-T)] - [T(2-T)]^{1/2} \cos [n \cos^{-1}(1-T)]\}}{(n^2-1)\pi}, \\
 &\quad \text{当 } n > 1, 0 \leq T \leq 2 \\
 &= 0 \quad \text{当 } n > 1, T > 2
 \end{aligned} \tag{18}$$

有理函数的逆变换

$$\begin{aligned}
 L^{-1}[f'_n(s)] &= L^{-1}\left\{\frac{s^2 + C_n}{s^4 + Ms^3 + (A_n + C_n)s^2 + MC_n s + (A_n C_n - B_n D_n)}\right\} \\
 &= F'_n(T)
 \end{aligned} \tag{19}$$

很容易精确地以封闭形式得到，因为它的分母仅仅是个四次实多项式，并且

$$\begin{aligned}
 &L^{-1}\left\{\frac{s(s^2 + C_n)}{s^4 + Ms^3 + (A_n + C_n)s^2 + MC_n s + (A_n C_n - B_n D_n)}\right\} \\
 &= \frac{d}{dT} F'_n(T) = F''_n(T)
 \end{aligned} \tag{20}$$

函数 $[K_n(s)/K'_n(s) + 1]$ 的逆变换是 Nielsen 函数 $W_n(1, T)$ ，这已经由他为用于超声波干涉问题而列成表。在 Nielsen 的表中^[9]，对于 $n = 4 \sim 10$ 仅就 $T = 0 \sim 4$ 给出 $W_n(1, T)$ 值，仅就 $T = 0 \sim 7$ 给出 $W_2(1, T)$ 和 $W_3(1, T)$ 的值。因此，这些表格对现有的问题显得不够用。再者，Nielsen 用于计算 $W_n(x, T)$ 的方法主要是积分方程法和特征法。这些方法对大的 T 和 n 值可能得不到足够精确的结果。为了求得 $T > 5$ 时的 $W_n(1, T)$ 并兼查 Nielsen 的结果，本文作者井然有序地用等高线积分法计算了 $[K_n(s)/K'_n(s) + 1]$ 的拉氏逆变换，发现 Nielsen 的结果非常精确。 $[K_n(s)/K'_n(s) + 1]$ 的正规逆变换的细节和 $T = 0 \sim 10$ 时 $W_n(1, T)$ 的值在文献^[13]中给出。

应用卷积定理，可得出方程(13)中第一对大括号中的项的拉氏逆变换如下：

$$p''_n{}^{(0)}(T) = g_n(T) + G_n(T) - \int_0^T G_n(T-\lambda) W_n(1, \lambda) d\lambda \tag{21}$$

第二对大括号中的项的逆变换是

$$Q_n(T) = \int_0^T F''_n(T-\lambda) W_n(1, \lambda) d\lambda \tag{22}$$

再次应用卷积定理，方程(13)的拉氏逆变换现可写成

$$\frac{w_n(T)}{\Omega} = -MS_n(T) + M \int_0^T Q_n(T-\lambda) \frac{w_n(\lambda)}{\Omega} d\lambda \tag{23}$$

其中
$$S_n(T) = \int_0^T F_n'(T-\lambda) P_n^{i0}(\lambda) d\lambda \quad (24)$$

方程(21)、(22)和(24)中的卷积积分包含有已知的函数, 这些函数性质良好又能精确地计算, 因此, 对这些卷积积分进行数值计算能易于控制地获得高精度。

方程(23)是第二类 Volterra 积分方程。虽然解这一积分方程的方法很多, 但本文作者选择了最直接的方法——由 Jones^[14] 研究并发展的逐步积分法。在计算 $w_n(T)$ 时, 把 Simpson 规则和 Newton 的 3/8 规则组合起来用有限和代替方程(23)的积分。逐步法包含的误差与 $(\Delta T)^2$ 成比例, 其中 ΔT 是所采用的时间步长。采用适当的 ΔT 值, 可在截断和舍入数值误差的范围内得到 $w_n(T)$ 的精确解。

当刚性而又静止的圆柱壳受到单位(无量纲)阶跃平面入射波的冲击时, 作用在其上的入射波和瞬态散射波合压力的傅立叶分量用方程(21)中所定义的 $p_n^{i0}(T)$ 表示, 它与圆筒尺寸和周围介质的材料特性无关。作为力函数, 它们不仅适用本问题, 而且对包括圆筒几何形状在内的其他波的散射问题也是有用的, 因而, 首先从方程(14)至(18)以及(21)中用 Nielsen 函数对其进行了精确计算, 并已列于文献[13]中。除了 $p_n^{i0}(T)$ 、 $p_n^{s0}(T)$ 是 T 的有阻尼振荡函数外, 对于大的 n , 它们的振动周期较短, 而且阻尼较大。为了解决现在这一特定声学介质中特种壳体问题, 采用线性壳体理论的一种特定形式, 只需把相应的有理函数 $f_n'(s)$ 进行逆变换以求得 $F_n'(T)$ 和 $F_n^{i0}(T)$ 。积分方程的核 $Q_n(T)$ 及非齐次部分 $S_n(T)$ 能按方程(22)和(24)加以精确计算, 积分方程(23)的求解能方便地进行。用阶跃波解作为核进行卷积积分能求得任何时间特征的入射波解。

结 果 及 讨 论

本文研究了在阶跃增加而后按指数规律衰减的波冲击下潜浸于水中的钢壳的瞬态响应。钢的性质是: 杨氏弹性模量 ($E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$), 泊松比 ($\nu = 0.3$), 密度 ($\rho_s = 486 \text{ lb/ft}^3$)。水的密度为 62.4 lb/ft^3 。这里考虑 $M = 2.0, 4.41890, 6.41975$ 和 9.09184 lb/ft^3 的壳体。对于上述材料特性, 这些 M 值分别相应于 $h/a = 1/31, 1/69, 1/100$ 和 $1/142$ 壳体。对于 $M = 2.0, 6.41975$ 的情况, 声速取为 4794 fps , 对 $M = 4.41890, 9.09184$, 水中声速取为 5000 fps 。指数衰减的平面脉冲入射波可用如下的数学式表示

$$p^{i0}(R, \theta, T) = Q \exp[-\beta(R \cos \theta - 1 + T)] u(R \cos \theta - 1 + T) \quad (25)$$

其中 β 是无量纲的指数衰减时间常数。由于阶跃增加而后按指数规律衰减的入射波作用所引起, 在很长时间后 $w_n(T)$ 的渐近值能容易地从方程(12)得到, 如下:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w_0(T) = -M/C^2, \text{ 当 } \beta = 0$$

$$= 0 \quad \text{当 } \beta > 0 \quad (26)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dw_1(T)}{dT} = -2M/(M+2), \text{ 当 } \beta = 0$$

$$= 0 \quad \text{当 } \beta > 0 \quad (27)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w_n(T) = 0, \text{ 当 } n \geq 2 \quad (28)$$

在图 2 中给出 $\beta = 0$ 时 $w_0(T)$ 的值; 数值数据表明大约在 $T = 10$ 以后 $w_0(T)$ 达到 $-M/C^2$ 值, 是在取 $\Delta T = 0.1$, 积分方程(23)的解的误差在 1% 以内所得。如果取更小的 ΔT , 误差

就更小。例如，对于 $M = 4.41089$ 情况，取 $\Delta T = 0.025$ ， $w_0(T)$ 在 $T = 12$ 后的值为 -0.3510 ，而 $-M/C^2 = -0.35123$ ，因此其误差小于 0.03% 。

由 $w_1(T)$ 的数据按有限差分格式 $dw/dT = (w^{i+1} - w^i)/\Delta T$ 计算 $\beta = 0$ 时的 dw_1/dt 值，并将它绘于图 3 中。在 $T = 10$ 以后，某值达到 $+2M/M+2$ ，也取 $\Delta T = 0.1$ ，其误差在 1% 以内。

按照这种解法的性质， T 的数值越大，每步积分所积累起来的数值误差就越大。既然 $w_0(T)$ 和 dw_1/dT 的数据，在 T 值大时仍只有很小的误差，那么， T 较小时误差一定还要小，因此这充分说明本文解法有高的精度。

Mindlin 和 Bleich 的“平面波”近似^[2]总是给出 dw_1/dt 单一的渐近值，而不管 M 值如何。即他们的近似解答仅仅预示了 $M = 2$ 时零浮力情形下 dw_1/dt 的正确渐近值。

Haywood 柱面波近似，即[5]中的方程(5.2)，给出

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dw_1}{dT} = \frac{M(1 + \bar{g}_1)}{M + 2g_1} \quad (29)$$

又对于在文献[5]中取 \bar{g}_1 的值为 0.727 的情形，这预示 dw_1/dt 的渐近值仅仅对具有 $M = 2$ 的零浮力情形才是正确的。对 $M = 9.09184$ 的情形，方程(29)给出的值比方程(27)给出的精确值小 9% 。

对 $M = 2$ 的情形，忽略了薄膜或拉伸影响的 dw_1/dT Murray 精确解^[6]也列于图 3 中作比较。它没有振动分量，在 T 值较小，例如 $T \leq 0.5$ 时，其值比本文的结果小得多。这些速度值很重要，因为如在后面可看到的那样，壳体受短期入射波作用引起的最大速度就发生在这早期时间范围里， dw_1/dT 在总速度中起主要作用。换言之，在本问题中忽略拉伸影响会导致过低估计壳体的瞬态速度，并且不能预示达到最大速度的正确上升时间。应该指出的是，运用平面波近似法^[2]得出在 $T \leq 0.5$ 时的 dw_1/dT 结果与本文解答相当吻合。为保持图面清晰没有把它们画在图 3 中。

$\beta = 0$ 时 $w_2(T)$ 的值描绘在图 4 中。它们在过渡时间里 ($T = 0 \sim 2$) 上升相当快，一出过渡时间正好就达到最大值，然后相当缓慢地下降，因为壳体 $w_2(T)$ 的主要自振频率相当低。对于 M 值较小的情形 ($M = 2 \sim 5$)，在 T 值大时， $w_2(T)$ 是 T 的有阻尼振荡函数，对于 M 值较小的情形， T 值大时 $w_2(T)$ 呈现为过阻尼，辐射是唯一的阻尼机理。

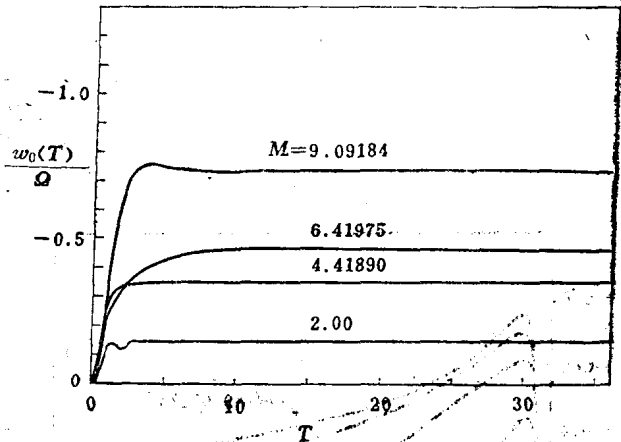


图 2 阶跃入射波情形下 $w_0(T) - T$ 曲线

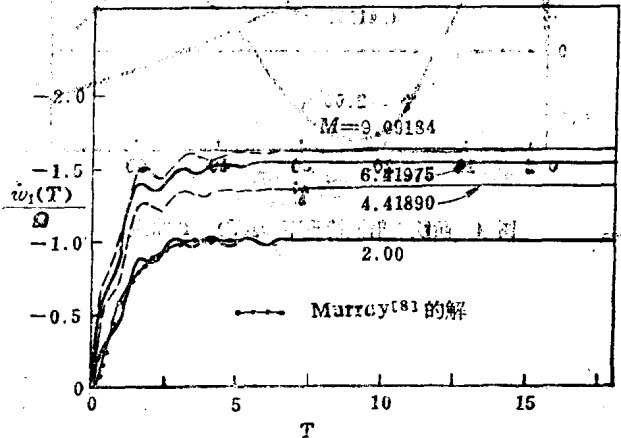


图 3 阶跃入射波情形下 $w_1(T) - T$ 曲线

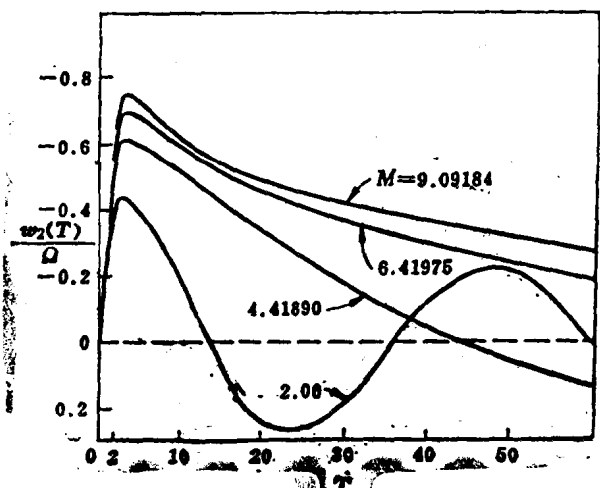


图 4 阶跃入射波情形下 $w_2(T)-T$ 曲线

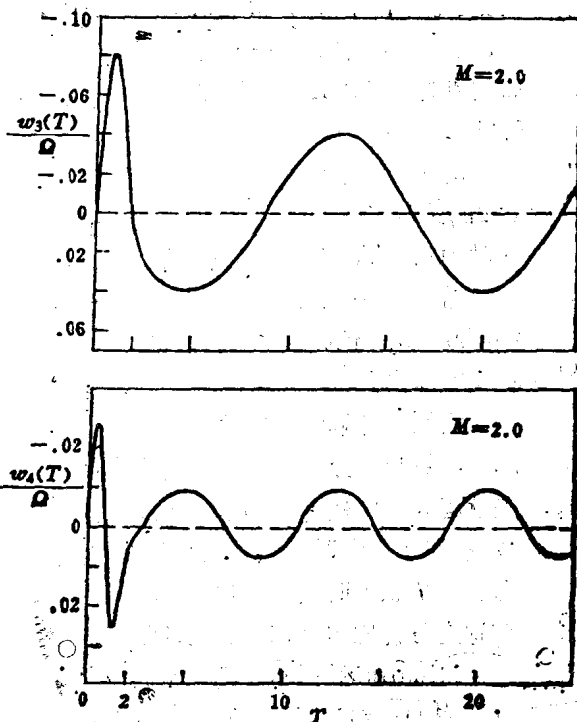


图 5 阶跃入射波情形下 $w_n(T)-T$ 曲线, $M=2.0$

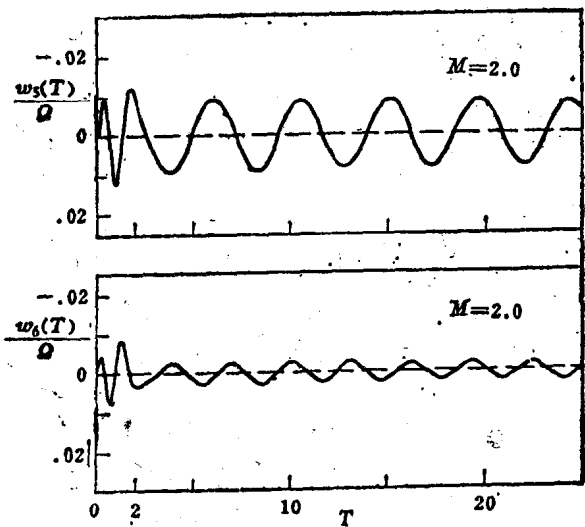


图 6 阶跃入射波情形下 $w_n(T)-T$ 曲线, $M=2.0$

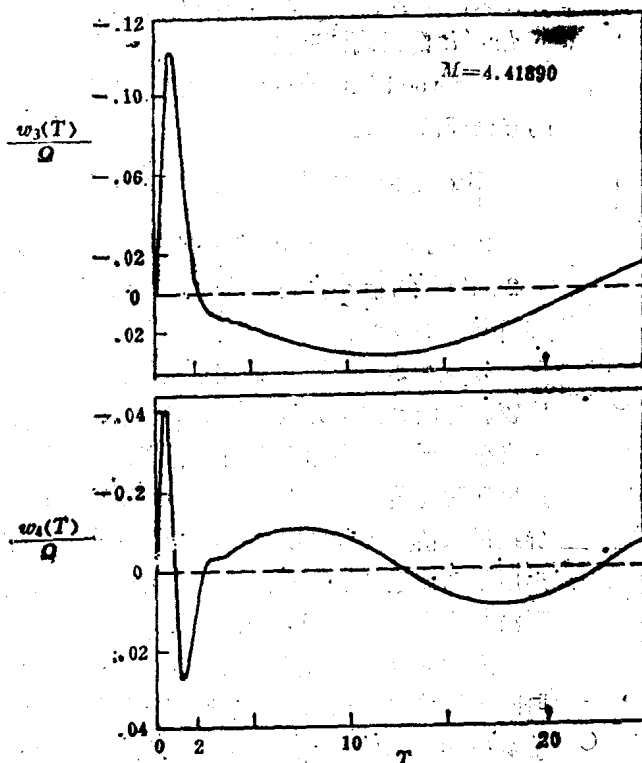


图 7 阶跃入射波情形下 $w_n(T)-T$ 曲线, $M=4.41890$

在计算 $n=3\sim 7$ 时的 $w_n(T)$ 用 $\Delta T=0.025$, 这是因为 $P_n^{(i)}(T)$ 有快速振荡的性质, 在图 5 至图 8 中给出的是 $M=2.0$ 和 $M=4.41890$ 时的 $w_n(T)$ 值, 数值结果清楚地展示和说明 $w_n(T)$ 的特殊数学性质, Carrier 在其开创性的论文中也已认识到这一点^[1], 即在时间间隔 $0\leq T\leq 2$ 以内和以外时, $w_n(T)$ ($n>2$) 的解析性质迥然不同。

在这个过渡时刻, 入射波横向通过该壳体 $w_n(T)$ ($n\geq 2$) 具有快速振荡性质, 这是因为激励压力 $P_n^{(i)}(T)$ 在 $T>2$ 后具有快速消失为零的性质, 因此 $T>2$ 时 $w_n(T)$ 在周围介质中以壳体的自由振动频率作小组尼缓慢振荡。对于相应的三维弹性球壳问题, $w_n(T)$ 的傅立叶分量均是 T 的简单的阻尼振荡函数, 并且在区间 $0\leq T\leq 2$ 以内和以外没有表现出不同的解析特征^[15]。

从图 2 和图 4 至图 8 可以看出, $w_n(T)$ 收敛很快, 而且数值结果表明, 方程 (5) 中的级数只要取 7 或 8 项就足以对所有的 θ 和 T 值计算壳体的瞬态位移和应变。对于 $M=4.41890$

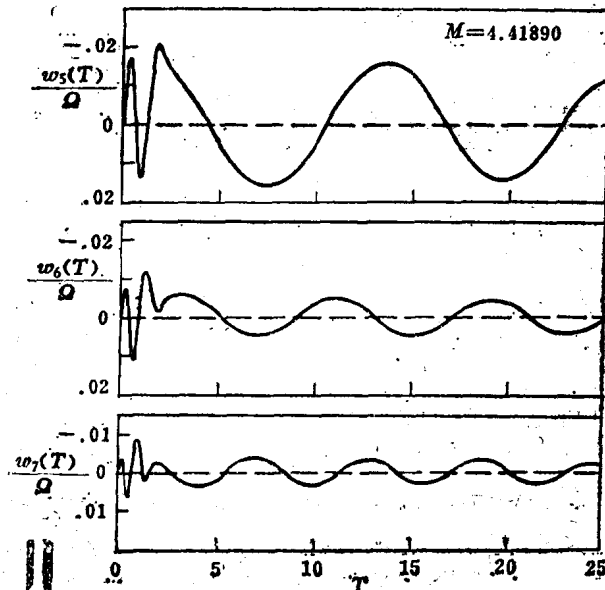


图 8 阶跃入射波情形下 $w_n(T)-T$ 曲线 $M=4.41890$

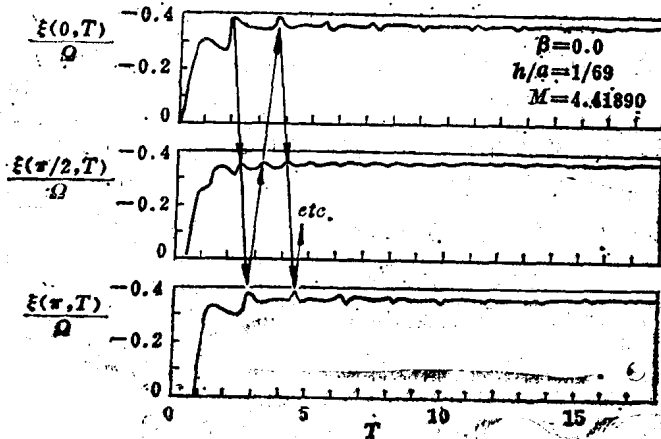


图 9 阶跃入射波作用下壳体线性应变时程曲线 $M=4.41890$.

($h/a = 1/69$), 入射波为阶跃增加而后按指数衰减, 衰减系数 $\beta = 3.0$ 的情况, 中面环向应变可按下列公式计算^[12]

$$\epsilon(\theta, T) = w + \partial v / \partial \theta \quad (30)$$

这些结果分别示于图 9 和图 10 中。对于 $\theta > \theta_i = \sin^{-1}(1/C)$ 的情形, 可以按公式 (4) 算得

$$T_i = (\theta - \theta_i) / C + (1 - \cos \theta_i) \quad (31)$$

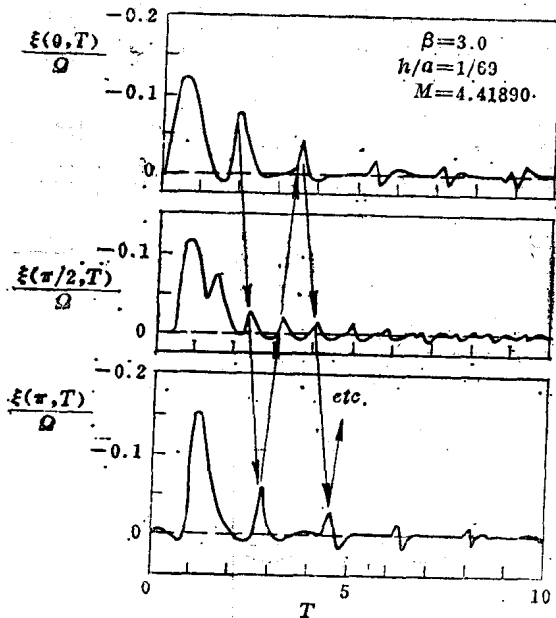


图 10 按指数规律衰减入射波作用下壳体线性应变时程, $\beta=3.0$, $M=4.41890$

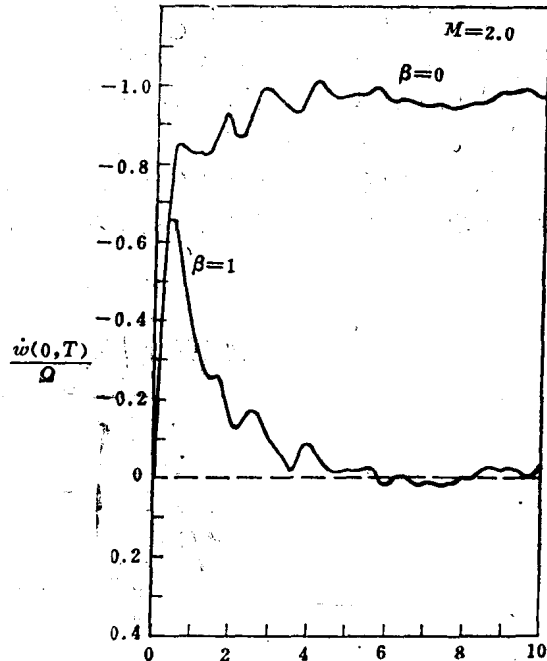


图 11 突加而后按指数规律衰减的入射波作用下零浮力壳体径向瞬态速度, $M=2.0$

对于弹性扰动分别到达点 $(1, \pi/2)$ 和 $(1, \pi)$ 的此无量纲时间可得 0.4029 和 0.8457 单位。图 9 和图 10 中的数值结果明显指出, 应变波到达点 $(1, \pi/2)$ 和 $(1, \pi)$ 的时间很接近这两个 T 值。在这两个时刻以前应变曲线微小摆动是完全没有物理意义的, 它们的存在是由于用的是级数解和吉布现象引起的, 而且与其他 T 值时的应变相比确实是可以忽略的。在过渡时间后应变波反射, 在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 和 $\pi < \theta \leq 2\pi$ 中, 来回四次, 这是由几何对称所引起。 $(1, 0)$ 或 $(1, \pi)$ 处应变曲线比其他 θ 处的峰值高而陡, 因为来自壳体上下四分之一的应变都集中在这两点处。正如在图 9 和图 10 中用箭头所表示的那样, 对于从 $(1, 0)$ 点到达 $(1, \pi/2)$ 和 $(1, \pi)$ 点的应变峰值分别约为 T 的 0.4425 和 0.8850 单位, 并以相同的时间返回, 即它以弹性弯曲和拉伸波速传播。在反射来回四次过程中, 应变波逐渐稀疏, 最后由于辐射阻尼全部耗散, 对于 $\beta=0$, 这时壳体应变达到渐近值 (或静应变值) $-M/C^2$, 而对于 $\beta > 0$ 其渐近值为零。这些结果本可从物理上预计到, 因此, 这一解法的精度高再次得到证实。注意, $(1, \pi)$ 点的应变值会大于入射波首先冲击到的点 $(1, 0)$ 处的值, 这在图 10 中可以看出。

壳体的径向速度 $\frac{dw}{dT}$ 用有限差分格式计算, 其中 $w(\theta, T)$ 得自取八项的级数解。图 11 表示阶跃增加而后按指数规律衰减的入射波作用下 $M=2$ 时零浮力壳上位于波最先冲击到之点 $(1, 0)$ 处的径向速度。图 12 和 13 分别表示阶跃增加而后按指数规律衰减的入射波作用下 M

$= 4.41890$ (或 $h/a = 1/69$) 时壳体上不同 θ 值的径向速度, 其中入射波衰减指数 $\beta = 4.8$ 。在波最先冲击到的点 $(1, 0)$ 处, 径向速度急剧上升并很快达到相对最大值 ($\beta = 0$ 时) 和绝对最大值 ($\beta > 0$ 时), 随后它们就振荡。这种振荡逐渐被阻尼掉, 在 T 值大时它接近 dw_1/dT 的渐近值, 这是壳体的刚体速度, 即在 $\beta = 0$ 和 $\beta > 0$ 时的刚体速度分别为 $-2M/(2+M)$ 和零。壳体上不在 $(1, 0)$ 附近的点的径向速度上升不急, 当 $\beta > 0$ 时径向速度峰值较 $(1, 0)$ 点处为小, 它们是由弹性波产生的而不是由入射波引起。对于不同的 θ 值, 壳体初始运动的开始时间由方程(31)给出。另外, 除了开始时间以前的小摆动外, 图 12 和图 13 中的数值结果与方程(31)相当吻合。

对于 $M = 4.41890$, $\beta = 0$ 的情形, 在 $\theta = 0$ 处壳体早期精确的径向加速度由 Payton 的解, 即文献[4]介绍的方程(7.4)求得, 并且与图 14 中本文的八项级数计算得到的 $\ddot{w}(0, T)$ 作了比较。大约在 $T = 0.08$ 时, 级数解的最大值为 -7.8536Ω , 比精确值 $-2M\Omega$ 小 11%。如果级数项取得多, 最大值可能会接近 $T = 0$ 时发生, 但 $\ddot{w}(0, T)$ 曲线在 $T = 0$ 处的斜率决不会达到无穷大。尽管这一限制受到吉布现象的影响, 但级数解对早期加速度仍提供了一个较好的近似。把级数解和 Payton 解配合起来构成加速度 $\ddot{w}(0, T)$ 的完整描述, 其结果示于图 15 中。加速度在 $T = 0$ 时有跳跃, 随后下降很快, 结果其幅值小于初始跳跃。另外也很明显, $\ddot{w}(0, T)$ 的后继振荡由弹性扰动在 $0 \leq \theta \leq \pi$ 和 $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ 间的传播组成。由图 15 还可看出弹性扰动峰值以弯曲和拉伸的波速传播且渐渐耗散并阻尼掉。最后, 很明显, 对于在约半个过渡期中是精确的任何简单渐

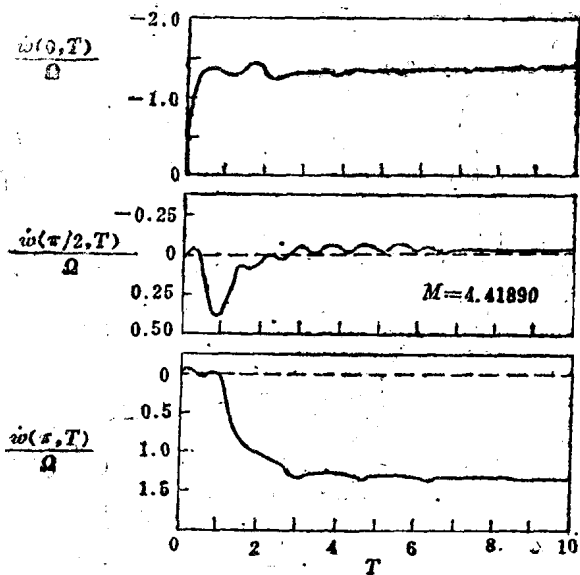


图 12 阶跃入射波作用下径向瞬态速度, $M = 4.41890$,

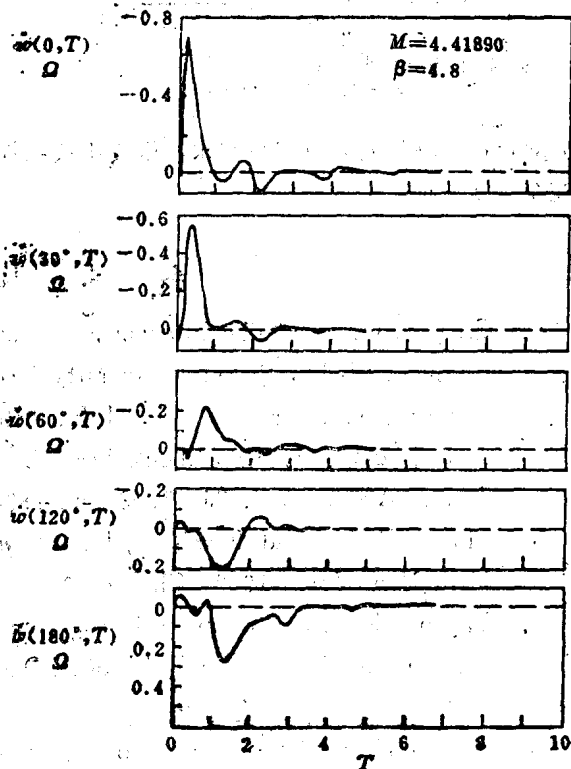


图 13 按指数规律衰减的入射波作用下径向瞬态速度, $\beta = 4.8$, $M = 4.41890$

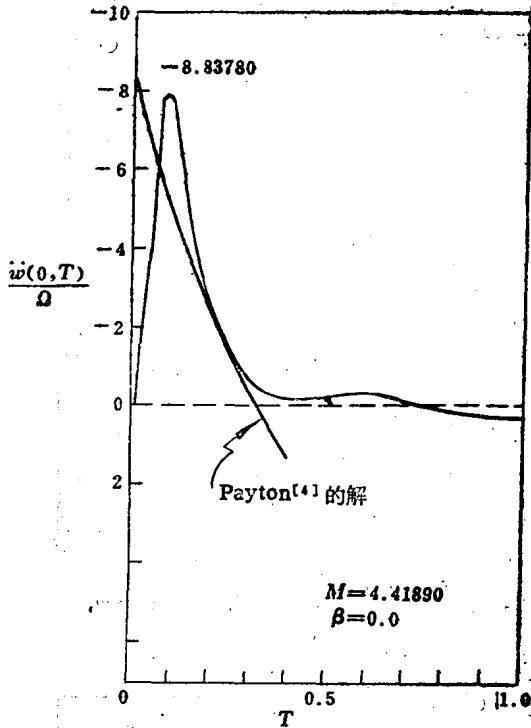


图 14 阶跃入射波作用下壳体早期加速度的比较, $M=4.41890$

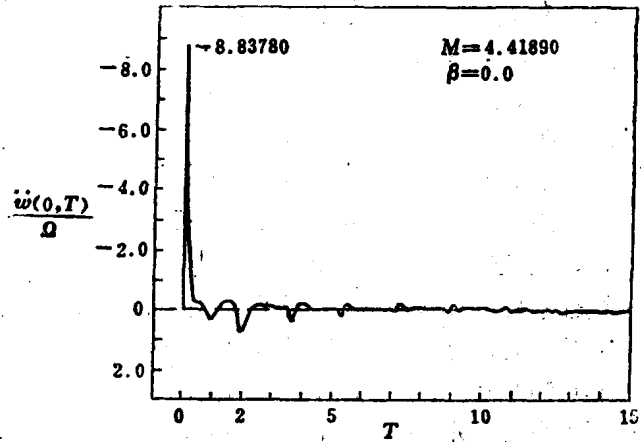


图 15 阶跃入射波作用下 \$\ddot{w}(T)\$ 的时程曲线, $M=4.41890$

近类型解将能满足大多数工程要求, 因为由按指数规律衰减入射引起的壳体最大响应往往出现在 $T=1$ 之前。

参 考 文 献

1. Carrier, G. F., "The Interaction of an Acoustic Wave and an Elastic Cylindrical Shell", Brown University Technical Report No. 4, 1951.
2. Mindlin, R. D., and Bleich, H. H., "Response of an Elastic Cylindrical Shell to a Transverse, Step Shock Wave", Journal of Applied Mechanics, Vol. 20, Trans. ASME, Vol. 75, 1953, pp. 189-195.
3. Morse, P. M., and Feshback, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, New York, 1953, Chapter 6.
4. Payton, R. G., "Transient Interaction of an Acoustic Wave with a Circular Cylindrical Elastic Shell", Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 32, 1960, pp. 722-729.
5. Haywood, J. H., "Response of an Elastic Cylindrical Shell to a Pressure Pulse", Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XI, Part 2, 1958, pp. 129-141.
6. Murray, W. W., "Interaction of a Spherical Acoustic Wave with a Beam of Circular Cross Section", Underwater Explosion Research Division Report