高等学校工程专科教材

线性代数

彭玉芳　尹福源　编

高等教育出版社

高等学校工程专科教材

线 性 代 数

彭玉芳　尹福源 编

高等教育出版社

（京）112号

本书根据国家教委高等工程专科学校线性代数课程教学基本要求编写而成。内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。

本书可供高等工程专科学校作为线性代数课程的试用教材使用。

高等学校工程专科教材
线性代数
彭玉芳　尹福源 编
•
高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省三河县科教印刷厂印装
•
开本850×1168　1/32　印张4.625　字数120 000
1993年5月第1版　1993年5月第1次印刷
印数0001—20 306
ISBN7-04-004155-3/O•1198
定价1.95元

高等工程专科数学编审组

组　长：彭玉芳

副组长：尹福源　黄奕佗

成　员：钱翼文　盛祥耀　潘鹤屏　周正中

　　　　李效羽　邢文斗　常柏林　汪瑶同

　　　　苏永法　彭延铭　卢静芳　樊启宙

秘　书：范以纲

前　　言

本书是在国家教育委员会高教司的领导下，由高等工程专科数学教材编审组统一组织编写的供高等工业专科学校试用的《线性代数》教材.

本教材根据国家教委组织制订的线性代数教学基本要求编写。在内容选择，结构体系及应用举例诸方面都努力体现基础课为专业课服务的思想及培养技术应用型人才的知识能力的要求.力求贯彻少而精的原则，注意学生基本运算能力和运算方法的训练及理论联系实际能力的培养.

高等工程专科学校学生着重学习矩阵和线性方程组的内容.完成第一、二、三章的参考学时为22学时；第四、五章可根据不同专业的需要作为选学内容，参考学时为8学时。本教材也可供职工大学、业余大学、干部训练班、专业培训班等作为选用教材，还可供已有高等数学基础的同志自学以及工程技术人员参考.

本书由常州工业技术学院彭玉芳副教授，长沙有色金属专科学校尹福源副教授编写.

本书由湖南大学郭忠教授担任主审，参加审稿的还有北京机械工业学院朱[illegible][illegible]教授、重庆钢铁专科学校郑吉富副教授、上海冶金专科学校彭延铭副教授、南昌水利水电专科学校樊启宙老师.他们认真审阅了全稿，提出了许多宝贵意见，对此，我们表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，敬请读者批评指正.

编　者

一九九二年四月

目　录

第一章　行　列　式

行列式是一种基本的数学工具，本章将以三阶行列式为主介绍行列式的性质，在此基础上给出n阶行列式的定义，进而讨论行列式在解线性方程组方面的应用，以及由此得出的判别方程个数和未知量个数相同的齐次方程组有非零解的必要条件。

§1　行列式的定义、性质及计算

一、二阶和三阶行列式

在中学代数解二元线性方程组时曾见到过下列符号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

这个符号称为二阶行列式，它由2^2个数组成，它代表一个算式，等于数$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$a_{ij}(i=1、2，j=1、2)$称为行列式的元素，第一个下标i表示第i行，第二个下标j表示第j列，a_{ij}就是表示行列式第i行第j列相交处的那个元素。

符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

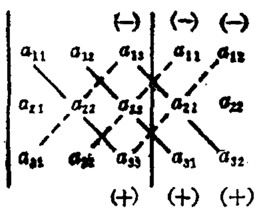
称为三阶行列式，它由3^2个数组成，也代表一个算式，等于数

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$.

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}\cdot a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

计算三阶行列式有几种不同的方法．我们常见的方法是对角线法，即将行列式D中的第一列与第二列重写于D的右侧，然后求对角线上元素乘积的代数和，即得行列式的值，方法如下

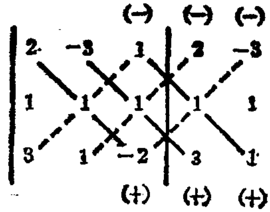


其中位于三条实线上三个元素的乘积都带正的符号，位于三条虚线上的三个元素的乘积都带负的符号．

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

解 按对角线法有



$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1-1\times1$$

$$\times3-2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2)$$

$$=-23$$

二、行列式的性质及其计算

将行列式D的行与相应的列互换后得到的新行列式，称为D的转置行列式记为D^T。

即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

行列式具有如下性质：

性质 1 行列式转置后，其值不变，即$D=D^T$。

性质 2 互换行列式中的任意两行(列)，行列式仅改变符号。

性质 3 如果行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式为零。

性质 4 如果行列式中有一行元素全为零，则这个行列式等于零。

性质 5 把行列式的某一行（列）的每个元素同乘以数k，等于以数k乘该行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论 1 如果行列式某行（列）的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式外面。

推论 2 如果行列式有两行（列）的对应元素成比例，则行列式等于零。

性质 6 如果行列式中的某一行（列）所有元素都是两个数的和，则此行列式等于两个行列式的和，而且这两个行列式除了这一行（列）以外，其余的元素与原来行列式的对应元素相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 7 以数k乘行列式的某行（列）的所有元素，然后加到另一行（列）的对应元素上，则行列式的值不变。

数k乘第i行（列）加到第j行(列)，记作$kr_i+r_j(kc_i+c_j)$。

三、行列式的展开

为了讲述行列式的展开，先引进余子式和代数余子式的概念。在三阶行列式中划去a_{ij}元素所在的第i行和第j列的元素，剩下的元素按原次序构成的二阶行列式称为a_{ij}的余子式，记作M_{ij}，a_{ij}的余子式乘上$(-1)^{i+j}$称为a_{ij}的代数余子式，记作A_{ij}，即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中元素a_{23}的代数余子式是$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$.

定理 三阶行列式D的值等于它任意一行（列）的所有元素与它们对应的代数余子式乘积之和，即：

$$
\begin{aligned}
D &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\
&= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}\\
&= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\\
&= a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}\\
&= a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}\\
&= a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

或简写为：

$$
D=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad\begin{pmatrix}i=1,\ 2,\ 3\\ j=1,\ 2,\ 3\end{pmatrix}\tag{2}
$$

证 只要证（1）中的第一个等式，其余证法相同。

$$
\begin{aligned}
D&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\
&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\
&\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\\
&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}\\
&\quad -a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\
&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\\
&\quad +a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\
&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}
\end{aligned}
$$

这样，我们可以通过计算三个二阶行列式来计算三阶行列

式，这个定理称为**拉普拉斯定理**。其（1）或（2）称为拉普拉斯展开式。

例 2 将行列式$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$按第一行，第三列展开。

解 按第一行展开得：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -32$$

按第三列展开得：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -32$$

从上例可以看到行列式按不同行或不同列展开计算的结果相等。

推论 三阶行列式D的某一行（列）的元素与另一行（列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0, \quad i \neq j \tag{3}$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + a_{3i}A_{3j} = 0, \quad i \neq j$$

证 行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 第i行(i=2) \\ \leftarrow 第j行(j=3) \end{array}$$

在D中的第三行用第二行的各对应元素代替，有

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

由性质 5 的推论 2 可知$D'=0$，对D再按第三行展开，即得

$$a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0$$

从而有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0 \quad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

同理可证

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=0 \quad (i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

把(2)式和(3)式结合起来可写成：

$$\sum_{k=1}^{3}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{3}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

把定理和行列式的性质结合起来，可以使行列式的计算大为简化。计算行列式时，常常利用行列式的性质使某一行（列）的元素出现尽可能多的零，这种运算叫做化零运算。

例 3 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix} \xlongequal{-35\times r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{-23\times r_1+r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=7$$

四、n阶行列式

有了拉普拉斯定理，就可以给出n阶行列式的定义。我们知道，行列式某一元素的代数余子式总是比原行列式降低一阶的，而二阶三阶行列式是有明确定义的，三阶行列式中讲到的余子式和代数余子式的概念完全适用于n阶行列式，其定义和记法可以照搬过来。于是我们有了三阶行列式，就可以用拉普拉斯展开式的方法，定义四阶行列式；同样有了四阶行列式就可以定义五阶行列式。依此类推，假定有了$n-1$阶行列式，我们给出n阶行列式的定义。

定义 由n^2(n是正整数)个数组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式(横排称为行，纵排称为列)。它是一个算式，其值定义为：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

(按第i行展开，$i=1,2,3,\cdots,n$)

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \qquad (4)$$

(按第j列展开，$j=1,2,3,\cdots,n$)

其中A_{ij}是a_{ij}(i, $j=1,2,3,\cdots,n$)的代数余子式，都是$n-1$阶行列式。

必须说明，对于三阶行列式所具有的性质，对n阶行列式也是如此。

例 4 由定义可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

用例4完全类似的方法可求得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可求得n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 5 计算下面行列式的值：

$$\begin{vmatrix} -1 & -9 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & 6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

解 如果按第一行展开，则要计算四个三阶行列式，如果按第四行展开，则可以少算一个三阶行列式，因为在此行中有一个元素是零，显然若将这一行中其它元素尽可能变为零，则计算可以大大简化。

$$D=\begin{vmatrix} -1 & -9 & -4 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & -2 \\ -12 & 6 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}\xrightarrow{2c_4+c_3}\begin{vmatrix} -1 & -9 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & -1 & -2 \\ -12 & 6 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-9c_4+c_1}\begin{vmatrix}-28&-9&2&3\\13&5&-1&-2\\-21&6&3&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}\xlongequal{按r_4展开}(-1)^{4+4}$$

$$\begin{vmatrix}-28&-9&2\\13&5&-1\\-21&6&3\end{vmatrix}$$

这样，计算一个四阶行列式变为计算一个三阶行列式，为了计算方便，还可以再将此三阶行列式化简为二阶行列式的计算，为此，作如下变换：

$$D=\begin{vmatrix}-28&-9&2\\13&5&-1\\-21&-6&3\end{vmatrix}\xlongequal{2r_2+r_1}\begin{vmatrix}-2&1&0\\13&5&-1\\-21&-6&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{3r_2+r_3}\begin{vmatrix}-2&1&0\\13&5&-1\\18&9&0\end{vmatrix}\xlongequal{按c_3展开}(-1)(-1)^{2+3}$$

$$\begin{vmatrix}-2&1\\18&9\end{vmatrix}=(-2)\times9-18\times1=-36$$

例6 证明

$$\begin{vmatrix}b&a&a&a\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\a&a&a&b\end{vmatrix}=(3a+b)(b-a)^3$$

证 容易看出，左端行列式的特点是每列元素之和是 $3a+b$，作如下变换：

$$D=\begin{vmatrix}b&a&a&a\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\a&a&a&b\end{vmatrix}\xlongequal{将r_2、r_3、r_4加到r_1上}$$