高等学校教材

机械振动基础

过永德 编

兵器工业出版社

机械振动基础

过永德　编

兵器工业出版社

（京）新登字049号

内容简介

本书着重介绍了离散线性系统振动的基本理论和分析方法，列举了许多工程实例。对连续系统也给予了适当的注意。简明扼要地叙述了随机振动的基本内容和分析方法。

本书共分六章：振动学的基本概念；单自由度系统的自由振动；单自由度系统的强迫振动；二自由度系统的振动；多自由度系统和连续弹性体的振动。每章附有习题。

本书可用作高等工科院校机械类专业大学生或研究生的教科书或参考书，适合于50学时左右的专业使用。也可供从事机械振动，结构振动方面研究的工程技术人员和研究人员自学或参考。

机械振动基础

过永德　编

*

兵器工业出版社出版

（北京市海淀区车道沟10号）

新华书店总店科技发行所发行

各地新华书店经销

昌平沙河印刷厂印装

*

开本：787×1092　1/16　印张：10.25字数：248.04千字

1992年6月第1版　1992年6月第1次印刷

印数：1—1850　定价：2.71元

ISBN7-80038-420-9/TH.24（课）

前　　言

机械振动理论几乎对每一个机械工程师都是十分必要的知识。机械、车辆、船舶、军工、宇航等方面无不存在振动问题，需要工程师们去解决，所以作为培养高级工程技术人材的高等工科院校，开设振动理论课程就显得十分迫切和需要。这种紧迫感已被多数工科院校所接受，并先后开设了机械振动课程。编者从1982年开设此课程后，编写了机械振动基础讲义，本书就是在此讲义的基础上编写而成的。

因受学时数所限（50个学时），在编写过程中，编者力图做到：讲清讲透振动分析的基本方法，深度适宜；既充分应用数学工具，又不费过多篇幅去证明定理、定律；由浅入深，实用性强；文字朴实，通俗易懂；多举实例，加深理解。使初学者既易于理解理论，又易于掌握计算方法。

本书的重点讲解单自由度和多自由度系统的响应分析。连续系统主要讨论简单支承条件下固有频率的求解和振型函数的连续性概念，为了照顾某些专业的需要，随机振动在第三章中做了简要的叙述。

在具体内容上，第一章简要介绍了振动的基本概念；讨论了简谐运动的性质及其各种表示法；周期运动的谐波分析；振动系统的组成元素，为后续各章打好基础。

第二和第三章详细地讨论了单自由度系统的自由振动和强迫振动，并列举了大量应用实例。这是振动理论最基本的部分，也是研究振动问题的理论基础，读者应牢固掌握。

第四章讨论二自由度系统的振动，它是最简单的多自由度系统。为便于向多自由度系统过渡，本书是用矩阵的形式来进行讨论的，多自由度系统的许多基本概念可以从这里得到。某些少学时专业，可能不讲多自由度系统，故在本章中引出了坐标解耦和主坐标的概念，给读者自学多自由度系统打下基础。

第五章讨论多自由度系统的振动，着重介绍用振型叠加法（模态分析法）求解系统动态响应的基本理论和计算方法；还简要叙述了矩阵迭代法和固有频率的近似解法。

第六章介绍简单支承条件下的弹性体振动，着重讨论弦，杆，梁等系统固有频率的求解方法，振型函数的连续性概念，以及振型叠加法在连续系统中的应用和固有频率的近似解法。

全书各章均有适量的例题和习题。

振动理论的内容很丰富，很多理论已相当成熟。无论是在振动的利用和防振减噪，还是在参数识别，载荷识别和动态设计等方面振动理论都得到相当广泛的应用。本书由于篇幅所限，只讨论线性系统振动的基本理论，未涉及更为深入的内容。

限于编者水平及时间仓促，书中错误和缺点在所难免，请读者给予指正。

编　　者

1991年5月

目　　录

第一章　振动学的基本概念

第一节　引　　言

对当今的机械工程师来说，振动知识是迫切需要的。一方面是由于机器运行速度的普遍提高，振动和噪声日益严重，人们迫切要求改善机器的动态特性，以提高机器的使用质量并减少对环境造成的污染；另一方面是近代振动理论得到了迅速发展，特别是数字电子计算机和电子仪器的发展和完善，使振动分析的方法和手段发生了飞跃性的变革。现在，振动已成为一门独立的科学，几乎可以对任何复杂的机器或结构进行工程所需精度的分析。因此，今天的工程师们需要而且能够获得和掌握有关振动的理论和分析的方法。近十多年来，我国许多工科院校的专业，都已先后开设了有关振动的课程，把振动理论和分析方法作为工程专业学生的必备知识。

不能否认，许多振动现象是造福于人类的，如光和电磁波的激发、乐器的发声、振动机械的利用等。但是对多数的机器和结构而言，振动却带来不良的影响，由于振动，降低了机器的动态精度和其它使用性能，如机床的振动会降低工件的加工精度；枪炮的振动会影响射击精度；汽车行驶在不平路面上产生的振动，会使乘客疲劳并降低行驶系统的寿命等等。而且由于振动，在机器和结构中产生往复的交变应力，导致机器使用寿命的降低和灾难性事故的发生，如桥梁的毁坏，烟囱的倒塌，飞机的坠落及地震等。此外，由于振动而产生的噪声公害日益严重，使人烦噪、厌倦和疲劳，降低工作效率，影响人体健康。因此，振动的研究对机器的使用和设计具有重要的实际意义，随着大型复杂的高运转速度机械的不断增加，和工业发展水平的不断提高，这种研究的迫切性也就大为增加了。

在振动研究中，一般把被研究的对象(如一台机床、一辆汽车)称为系统；把外界对系统的作用或机器运动所产生的力称为激励或输入；把机器或结构在激励作用下产生的动态变化称为响应或输出。机械振动这门学科就是研究这三者之间的关系，从计算分析的观点看，只要知道其中二者，就可求得第三者。随着电子仪器的发展和完善，振动的试验研究已发展成一种独立的解决问题的手段。振动问题的理论分析和试验研究，这两种方法的相互补充，为解决复杂机械振动问题创造了有利的条件。

振动研究所要解决的问题可归纳为以下几类：

1.响应分析

已知输入和系统的参数，求系统的响应，即求系统的位移、速度、加速度和力的响应，为计算机器的结构强度、刚度、允许的振动能量水平提供依据。

2.系统设计

已知系统的激励，设计合理的系统参数，以满足预定的动态响应要求。这是机械产品动态设计的主要内容。

3.系统识别

在已知输入和输出的情况下求系统参数，以了解系统的特性。用现代测试手段，对已有

的机械系统进行激振，测得在激励下的响应，然后识别系统的结构参数。

4.环境预测

已知系统的输出及系统的参数，确定系统的输入，以判别系统的环境特性。

本教程主要讨论系统在激励（含初始干扰）下的响应。

研究机械系统的振动问题，一般分下列几个步骤：

1.建立力学模型

对于实际的机械系统，根据工程分析的需要，可以用一个简化的力学模型来描述它。如图1-1（a）表示一辆汽车沿道路行驶时车身振动的力学模型，它是一个二自由度系统，其中弹簧常数就是悬架和轮胎的等效刚度，阻尼器表示减振器、悬架和轮胎的等效阻尼，车身的惯性简化为平移质量m和绕质心的转动惯量J；图1-1（b）表示一桥式起重机起吊重物时的情况。若研究突然吊起重物时绳索及桥架结构中的动力响应，则可简化为双质量弹簧系统，其中m_1是小车质量加二分之一桥架质量，m_2为重物的质量；k_1是桥架跨中的刚度；k_2是绳索的刚度。所建立的力学模型与实际的机械系统越接近，则分析的结果与实际情况越接近。如何建立一个确切描述实际系统的力学模型，尚无一般规则，通常取决于研究者的经验和聪明才智。

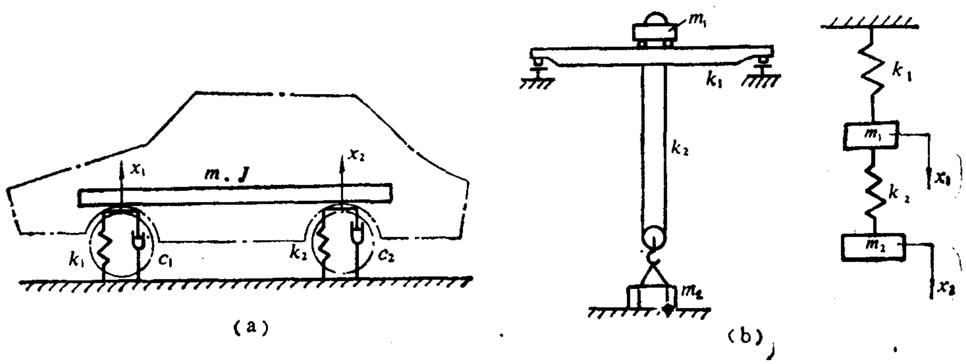

图 1-1　不同实际系统的力学模型
（a）汽车车身振动　（b）起重机突然起吊时的振动

2.建立数学模型

应用某些物理定律对所建立的力学模型进行分析，导出一个或几个描述系统特性的数学方程。通常振动问题的数学模型表现为微分方程的形式。

3.方程的求解

为得到描述系统运动的数学表达式，就需对数学模型求解。通常这种数学表达式是位移为时间函数的形式。它表明系统运动和系统性质和激励（含初始干扰）的关系。

4.分析结论

根据方程解提供的规律和系统的工作要求及结构特点，可以作出设计和改进的决断，以获得问题的最佳解决方案。

第二节　机械振动的概念

机械振动是一种特殊形式的运动。在这种运动过程中，机械系统将围绕其平衡位置作往

复运动。从运动学的观点看，机械振动是指机械系统的位移、速度、加速度在某一数值附近随时间的变化规律。这种规律如果是确定的，则可用函数关系式

$$x=f(t) \tag{1-1}$$

来描述其运动。也可以用函数图形来表示，图1-2就是以x为纵坐标，t为横坐标表示的几种典型的机械振动。

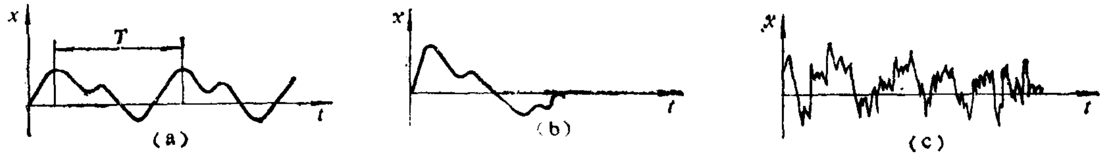

图 1-2 几种典型的机械振动
（a）稳态振动 （b）瞬态振动 （c）随机振动

图1-2（a）表示在相等的时间间隔内物体作往复运动，称为周期振动。运动往复一次所需的时间间隔称为周期T，其单位以秒（s）计。周期振动可用时间的周期函数表示为

$$f(t)=f(t+nT) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{1-2}$$

以一定周期持续进行的等幅振动称为稳态振动，而最简单的周期振动是简谐振动。

图1-2（b）表示机械系统受到冲击后产生的振动，这种振动没有一定的周期，故不能用周期函数来表示，称为非周期振动，它往往经过一定时间后逐渐消失，故又称瞬态振动。

图1-2（c）表示机械系统在随机激励下产生的振动，这种运动不能用时间函数来描述，称为随机振动。

上面几种振动中，无论是周期振动或是非周期振动，都可以用方程（1-1）来描述，这就是说运动是确定的，只要给定任一瞬时t，就可得到确定的x值。而随机振动是一种不能预知运动物理量大小的振动，它不是时间的确定性函数，根据其运动参数的某些规律性，可用数理统计的方法来进行研究。

简谐振动是最简单的振动，也是最简单的周期振动。

一、简谐振动

简谐振动可以用支持在弹簧上的质量块来演示，如图1-3所示。在静止时以小锤敲击质量块，则质量块将在平衡位置附近作上下振动。如在质量块上置一光源，使一束光线照射在一条匀速水平移动的感光纸带上，纪录在感光纸带上的运动过程可用下面正弦函数表达

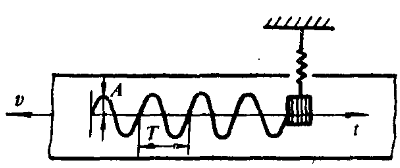

图 1-3 简谐振动演示

$$x=A\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{1-3}$$

式中T为周期；A为质量块m离开平衡位置的最大距离，称为振幅。这种按时间的正弦函数（或余弦函数）所作的运动称为简谐振动。

简谐振动常用作等速圆周运动的点在铅垂轴上的投影来表示，如图1-4所示。一长度为A的半径OP，由水平位置开始，以等角速度ω绕O点反时针方向转动，任一瞬时t，P点在铅垂轴上的投影为

$$x=A\sin\omega t \tag{1-4}$$

式中ω的单位为rad/s。ωt称为相位，表示OP在时间t的转角。

由于OP转过2π rad为一个周期，故上式应满足

$$A\sin\omega(t+T)=A\sin(\omega t+2\pi)$$

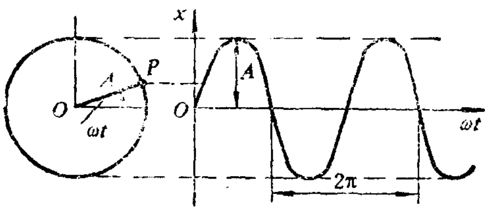

图 1-4　匀速圆周运动点的投影

即

$$\omega T=2\pi$$

或

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

代入（1-4）式，就得到和（1-3）式同样的形式，通常用（1-4）式表示简谐振动。

在周期振动中，周期的倒数定义为频率，以f表示，则

$$f=\frac{1}{T} \tag{1-5}$$

频率f的单位为1/s，称赫芝，写为Hz，即每秒钟振动的次数，它和ω的关系为

$$\omega=2\pi f \tag{1-6}$$

ω的单位为rad/s，称为圆频率。

如果图1-4中作均速圆周运动的点不是从水平位置开始，或图1-3中的质量块m不以平衡位置为振动起始点，则其位移表达式具有一般形式：

$$x=A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1-7}$$

式中φ为初相位，表示质量块或作匀速圆周运动点的初始位置。

对位移表达式求一阶导数和二阶导数，就可得简谐振动的速度和加速度表达式

$$\dot{x}=\omega A\cos(\omega t+\varphi)=\omega A\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right) \tag{1-8}$$

$$\ddot{x}=-\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi)=\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi+\pi) \tag{1-9}$$

由此可见，只要位移是简谐函数，则速度和加速度也是简谐函数，而且与位移具有相同的频率，但速度的相位比位移超前$\pi/2$，加速度比位移超前π。

从（1-7）式和（1-9）式可得

$$\ddot{x}=-\omega^2 x \tag{1-10}$$

这表明在简谐运动中，加速度的大小与位移成正比，而其方向与位移相反，加速度的方向始终指向静平衡位置。

二、简谐振动的矢量表示法

在振动问题中，有时用旋转矢量表示简谐振动。设有一个模为$\bar{A}$的旋转矢量$\mathbf{OP}$，以等角速度ω从水平位置开始作逆时针旋转，如图1-5所示。任一瞬时t，旋转矢量$\mathbf{OP}$在铅垂轴上的投影为

$$x=A\sin\omega t \tag{1-11}$$

它表示一简振谐动。其在水平轴上的投影为一余弦函数，也表示一简谐振动，故任一简谐振动都可以用一旋转矢量的投影来表示。旋转矢量的模A即为振幅，其旋转角速度ω即为简谐振动的圆频率。

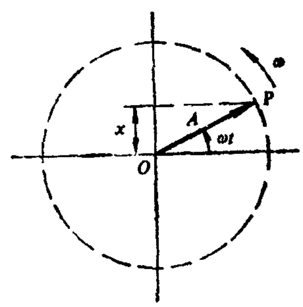

图 1-5　旋转矢量的投影

当一个简谐振动是两个同频率的简谐振动所合成，则这个简谐振动可以用两个代表原简谐振动的旋转矢量的合成矢量来表示。如某一振动的表达式为

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad (1\text{-}12)$$

可改写为

$$x = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + b\sin\omega t$$

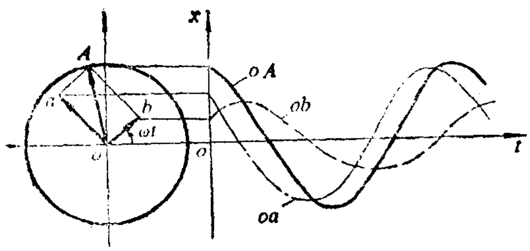

图 1-6　简谐运动的叠加

等式右边的两项可以看成是旋转矢量a和b在铅垂轴上的投影，而且a比b超前$\pi/2$相位，故两个矢量是相互垂直的，都以角速度ω同步旋转。图1-6表示了这两个矢量。根据矢量合成原理，将矢量a和矢量b合成旋转矢量A，A与b之间的夹角为φ，A在铅垂轴上投影为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (1\text{-}13)$$

将式（1-13）展开为

$$x = A\sin\varphi\cos\omega t + A\cos\varphi\sin\omega t \qquad (1\text{-}14)$$

由图1-6可知

$$a = A\sin\varphi,\quad b = A\cos\varphi \qquad (1\text{-}15)$$

将（1-15）式代入（1-14）式，得

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

因此（1-12）式和（1-13）式表示同一个简谐振动，在数学上两式是可以互换的。由图1-6中还可看出两式常数之间的关系

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\quad \tan\varphi = \frac{a}{b} \qquad (1\text{-}16)$$

从物理概念上说，两个同频率的简谐振动可以合成一个与原来频率相同的简谐振动，反之，一个简谐振动也可以分解成两个频率相同的简谐振动。另一方面，说明一个质量块如不在其平衡位置开始振动，便相当于两个频率相同，相位差为$\pi/2$的简谐振动的合成。

如前所述，如果振动的位移是简谐函数，则振动的速度和加速度也是简谐函数。故速度和加速度也可以用旋转矢量来表示。根据（1-7）式—（1-9）式，这三个矢量之间的关系如图1-7所示。

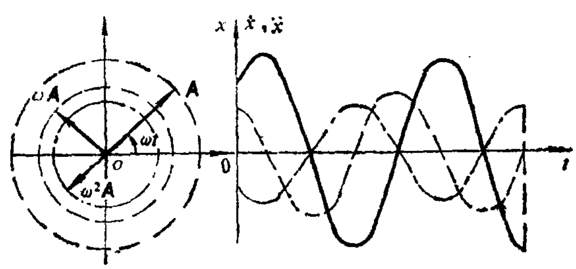

图 1-7　位移、速度及加速度间关系

三、简谐振动的复数表示法

在复平面上有一个矢量OP代表复平面上的一个复数Z，如图1-8所示。这个矢量的模A就是复数Z的模，其位置由复角θ确定，若i表示虚轴上的单位长度，则其表达式为

$$Z = A(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = A\exp(\mathrm{i}\theta)$$

如果使复矢量OP绕O点以等角速度ω在复平面内逆时针旋转，就成为一复数旋转矢量，如图1-8（b）所示。它在任一瞬时的复角$\theta = \omega t$，则此复数表达式为

$$Z = A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) = A\exp(\mathrm{i}\omega t)$$

如前所述，我们同样可以用一复数旋转矢量在复平面的实轴上或虚轴上的投影来表示简谐振动。复数旋转矢量OP在虚轴上的投影为

$$x=A\sin\omega t=I_mZ=I_m(A\exp(\mathrm{i}\omega t))$$

符号I_mZ指取复数Z虚数部分的值，它也表示简谐振动，以后对复数表达式

$$x=A\exp(\mathrm{i}\omega t) \tag{1-17}$$

不作特别说明时，即表示取虚数部分。

运用复数运算法则，可以方便地合成两个同频率的简谐振动，现将

$$x=a\cos\omega t+b\sin\omega t=a\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\omega t$$

以复数形式表示为

$$x=a\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]+b\exp(\mathrm{i}\omega t)$$

由复数相加原理得

$$x=A\exp[\mathrm{i}(\omega t+\varphi)]$$

式中

$$A=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\arctan\frac{a}{b}$$

以上关系用复旋转矢量表示如图1-9。

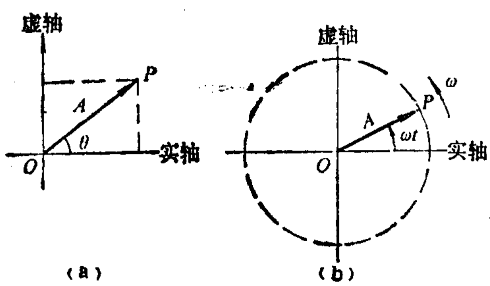

图 1-8 简谐振动的复矢量表示
（a）复矢量 （b）旋转复矢量

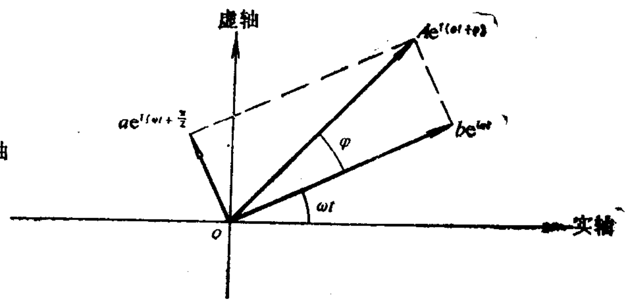

图 1-9 复旋转矢量的合成

速度和加速度同样可用复数旋转矢量表示，并用复数求导的方法得到位移、速度和加速度之间的关系，设

$$x=A\exp(\mathrm{i}\omega t)$$

则

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A\exp(\mathrm{i}\omega t)=\mathrm{i}\omega A\exp(\mathrm{i}\omega t)$$

$$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{i}\omega A\exp(\mathrm{i}\omega t)]=-\omega^2A\exp(\mathrm{i}\omega t)$$

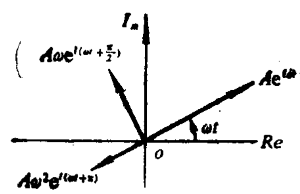

图 1-10 位移、速度及加速度间关系

因
$$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

当$\theta=\pi/2$时，有$e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{i}$；当$\theta=\pi$时，有$e^{\mathrm{i}\pi}=-1$，因此上两式可写成

$$\dot{x}=A\omega\exp\left[\mathrm{i}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{1-18}$$

$$\ddot{x}=A\omega^2\exp[\mathrm{i}(\omega t+\pi)] \tag{1-19}$$

位移，速度和加速度在复平面上的关系如图1-10所示。

第三节　构成机械振动系统的基本元素

机械系统之所以会产生振动是因为它本身具有质量和弹性。阻尼则使振动受到抑制。从能量观点来看，质量可储存动能，弹性可储存势能，阻尼则消耗能量。当外界对系统作功时，系统的质量就吸收动能，使质量获得速度，弹簧就获得变形能，具备了使质量回到原来状态的能力。这种能量不断的转换就导致系统质量围绕平衡位置的往复运动。系统如果没有外界不断地输入能量，由于阻尼的存在，振动现象将逐渐消失。因此，质量、弹性和阻尼是振动系统的三要素。此外，在重力场中，当质量离开平衡位置后就具有了势能，同样产生恢复力，如单摆，虽然没有弹簧，但可看成等效弹簧系统。

现将质量、弹簧和阻尼器的特性讨论如下

1.质量

在力学模型中，质量被抽象为不变形的刚体，根据牛顿第二运动定律，若对质量作用一F_m力，则此力与质量在F_m相同方向获得的加速度$\ddot{x}$成正比。表示为

$$F_m = m\ddot{x} \tag{1-20}$$

式中的比例常数m称为刚体的质量，是惯性的一种量度。对于扭振系统，广义力为扭矩M，广义加速度为角加速度$\ddot{\varphi}$，则扭矩与角加速度成正比，表示为

$$M = J\ddot{\varphi} \tag{1-21}$$

式中的比例常数J为刚体绕其旋转中心轴的转动惯量。质量m和转动惯量J是表示力（力矩）和加速度（角加速度）关系的元件。

2.弹簧

在力学模型中，弹簧被抽象为无质量并具有线性弹性的元件。在振动系统中，弹性元件提供使系统恢复到平衡位置的弹性力，又称恢复力。恢复力与弹簧两端的相对位移的大小成正比

$$F_s = -k(x_2 - x_1) \tag{1-22}$$

式中负号表示弹性恢复力F_s与相对位移的方向相反，k为比例常数，通常称为弹簧常数或弹簧刚度。扭转弹簧常数（刚度）用符号k_t表示，扭转弹簧产生的是恢复力矩，扭转弹簧的位移是角度。

3.阻尼

在力学模型中，阻尼器被抽象为无质量而具有线性阻尼系数的元件。在振动系统中，阻尼元件提供阻止系统运动的阻尼力，其大小与阻尼器两端相对速度成正比

$$F_d = -c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \tag{1-23}$$

式中负号表示阻尼力的方向与阻尼器两端相对速度的方向相反，c为比例常数，称为阻尼系数，满足（1-23）式表示的这种阻尼称为粘性阻尼，系数c称为粘性阻尼系数。

在国际单位制（SI）中，质量的单位为千克（公斤）（kg）；转动惯量的单位为千克（公斤）·米²（$kg\cdot m^2$）；力的单位为牛顿（N）；位移的单位为米（m）；扭矩的单位为牛顿·米（N·m）；速度的单位为米／秒（m／s）；直线弹簧刚度的单位为牛顿／米（N／m）；扭转弹簧刚度的单位为牛顿·米／弧度（N·m／rad）。可以导出阻尼系数c的单位为牛顿·秒／米（N·s／m）。

第四节 谐 波 分 析

前面所介绍的简谐振动是最简单的周期振动，而实际问题中更多的是非简谐的周期振动，如图1-11所示。一般的周期振动，可以通过谐波分析将其分解成简谐振动。

任何一个周期函数，只要满足一定的条件，都可以展成傅里叶级数。这些条件是：(1)函数在一个周期内连续或者只有有限个间断点，而且间断点上函数的左右极限分别存在；(2)函数在一个周期内只有有限个极大和极小值。把一个周期函数展开成一个傅里叶级数，亦即展开成一系列简谐函数之和，这个过程称为谐波分析或频谱分析。

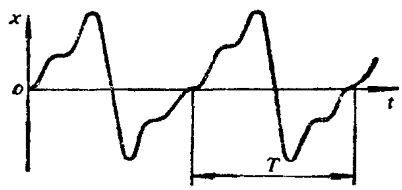

图 1-11 一般周期振动

设一周期函数为$F(t)$，其周期为T，展成傅里叶级数为

$$
\begin{aligned}
F(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos 2\omega_0 t + \cdots \\
&\quad + b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \cdots \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad (1\text{-}24)
\end{aligned}
$$

式中$\omega_0 = 2\pi/T$称为基频，a_0、a_n和b_n均为待定常数，称傅里叶系数，只要$F(t)$是已知的，它们可从三角函数正交性得到

$$
\left.
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_0 t\,dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_0 t\,dt
\end{aligned}
\right\} \qquad (1\text{-}25)
$$

若将(1-24)式中相同频率的正弦函数与余弦函数相合成，则该式可写成

$$
F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \qquad (1\text{-}26)
$$

式中

$$
\left.
\begin{aligned}
A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\
\varphi_n &= \arctan\frac{a_n}{b_n}
\end{aligned}
\right\} \qquad (1\text{-}27)
$$

由上分析可知，周期函数可用傅里叶级数展开为各阶谐波分量的叠加来表示。组成各阶谐波分量的频率是基频的整数倍，即ω_0，$2\omega_0$，$3\omega_0$，…，$n\omega_0$，而不含有其它频率的谐波分量。

为了把谐波分析的结果形象化，可把A_n、φ_n与ω_0之间的变化关系用图形来表示，如图1-12所示。这种图形称为周期函数的频谱，这种分析也称频谱分析。由于只有在$n\omega_0$($n=1$，2，3…)各点A_n和φ_n才有一定的数值，所以频谱图是一组离散的铅垂线。

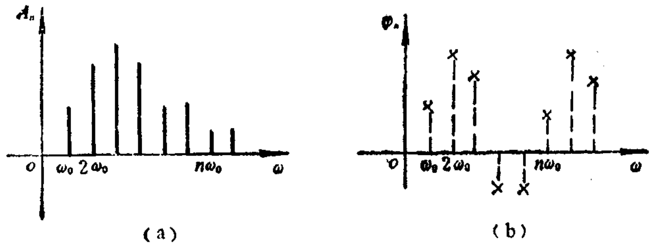

图 1-12 周期函数的频谱图

(a) 幅值频谱图 (b) 相位频谱图

例1-1 一周期为T、振幅为F_0的矩形波，如图1-13(a)所示。在一个周期内函数表达式为

$$F(t)=\begin{cases} F_0 & 0<t<\frac{1}{2}T \\ -F_0 & \frac{1}{2}T<t<T \end{cases}$$

试作傅里叶分解，并画出一个周期内的幅值频谱图。

[解] 由(1-25)式求出各傅里叶系数

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\,dt=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}F_0\,dt-\int_{T/2}^{T}F_0\,dt=0$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega_0 t\,dt=0$$

因为上式中$F(t)$对$t=\frac{1}{2}T$是反对称的，而$\cos n\omega_0 t$对$t=\frac{1}{2}T$却是对称的，故两者之积必然为零，则积分亦为零。

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega_0 t\,dt=\frac{4F_0}{n\pi}\ (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)$$

故矩形波的傅里叶级数为

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\omega_0 t$$

各次谐波的幅值为

$$A_1=\frac{4F_0}{\pi},\quad A_3=\frac{4F_0}{3\pi},\quad A_5=\frac{4F_0}{5\pi},\ \cdots$$

幅值频谱图如图1-13(b)所示。

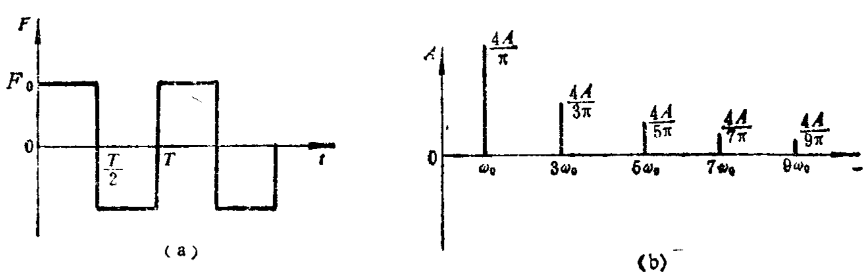

图 1-13 矩形波及幅值频谱图

(a) 矩形波 (b) 幅值频谱图

由以上频谱分析可知，其基频为

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

由幅值频谱图可看出，基频的谐波分量占主要成分，其幅值也最大。当在基频分量上叠加上三阶谐波分量后，所给出的波形已接近于矩形波。若再叠加上五阶谐波分量，已近似于矩形波。其叠加情况如图1-14所示。在实际问题中为了使分析简化，常用有限项谐波分量的叠加来代替周期波。

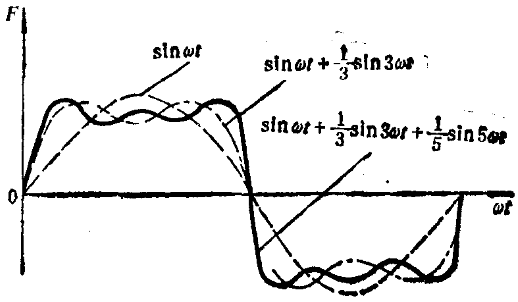

图 1-14 谐波的叠加

习　　题

1-1 用一加速度计测得某结构按频率25Hz作简谐振动时的最大加速度为5g（g=980cm/s²），求此结构的振幅、最大速度和振动周期。

1-2 一简谐振动，振幅为0.20cm，周期为0.15s，求最大的速度和加速度。

1-3 已知某机器的振动规律为$x=(0.5\sin\omega t+0.3\cos\omega t)$cm，$\omega=10\pi$rad/s，求振幅、最大速度和最大加速度，并用旋转矢量表示出它们之间的关系。

1-4 求图1-15所示锯齿形波的傅里叶级数。

1-5 求图1-16所示矩形波的傅里叶级数。

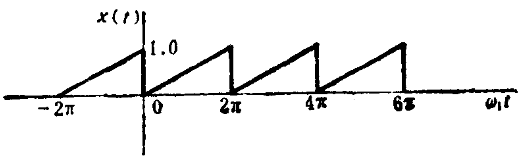

图 1-15 锯齿形周期波

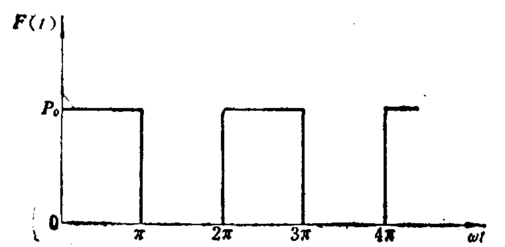

图 1-16 矩形周期波

第二章　单自由度系统的自由振动

第一节　引　　言

任何具有质量和弹性的系统都可能产生振动。

一个振动系统的自由度是指在振动过程中任何瞬时都能完全确定系统在空间的几何位置所需要的独立坐标的数目。如果任一瞬时振动系统在空间的几何位置可以由一个独立坐标来确定，则此系统就称为具有一个自由度的系统。图2-1所示为几种单自由度系统的力学模型，每个系统都只需要一个独立坐标$x(t)$或$\theta(t)$来描述系统的运动。

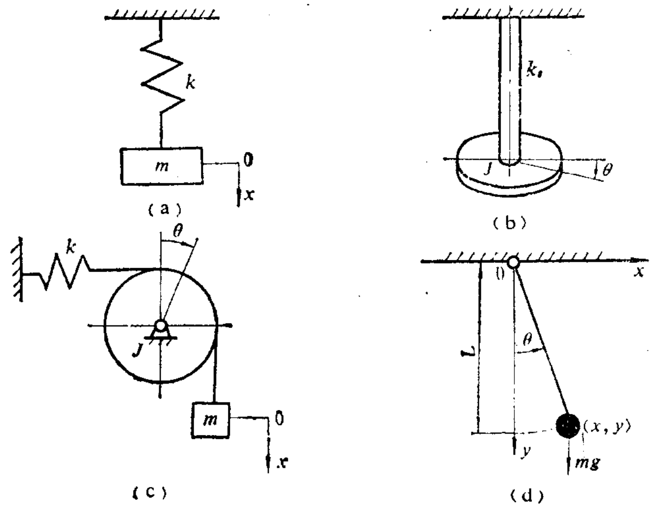

图 2-1　单自由度系统

（a）弹簧质量系统　（b）扭摆

（c）质量滑轮弹簧系统　（d）单摆

图2-1（a）是一质量为m的重物通过刚度为k的弹簧悬挂在支座上。若质量m只能在静平衡位置附近作铅垂方向的上下振动，则m在空间的几何位置只需一个坐标$x(t)$就可完全描述。

图2-1（b）是一扭摆。转动惯量为J的圆盘由扭转刚度为k_t、质量可忽略不计的扭轴与支座连接。若系统仅绕轴线扭转振动，并忽略扭轴在振动中的轴向伸缩，则圆盘J的空间位置可由角坐标$\theta(t)$来描述。

图2-1（c）表示质量块m通过无伸缩的绳索绕过一转动惯量为J的滑轮，再用刚度为k的弹簧与支座连接。若绳索与滑轮间无相对滑动，则系统虽有两个刚体m和J，但其位移坐标$x(t)$和转角坐标$\theta(t)$不是互相独立的。系统的运动既可由$x(t)$也可以由$\theta(t)$来描述，故仍为单自由度系统。

图2-1（d）为一单摆，其摆杆质量不计，且摆长L为定值，系统被限制在$x-y$平面内运动，则摆锤m的位置可由位移坐标$x(t)$和$y(t)$，也可由转角坐标$\theta(t)$来描述。但$x(t)$、$y(t)$和$\theta(t)$这三者之间受下列两个方程的约束

$$x^2+y^2=L^2 \tag{2-1}$$

$$\tan\theta=\frac{x}{y} \tag{2-2}$$

故系统仍是单自由度的。

一个系统如只在起始时受到外界干扰，或原有的激励去掉以后，依靠本身弹性恢复力维持的振动，称为自由振动。初始干扰可能是初始位移，也可能是初始速度，或两者兼而有之，这种初始干扰称为初始条件。